測量に必要な数学

mathematics for survey

測量数学上の留意点

1）必ずしも厳密解は正しくない。

たとえば、$cos30° = \sqrt{3}/2$ですが、測量では→0.866025403が正しい数値になります。

ただし、桁数の取り方は計算上の有効数字によります。

仮に斜め距離D＝162.325m、鉛直角$\theta = 30°$で水平距離Sは $S = Dcos\theta = 162.325 \times 0.866025 = 140.578m$となります。

有効数字は6ケタに合わせて計算します。

1. 代数の公式･定理

1.1代数規則

a)交換則:$a + b = b + a, ab = ba$

b)結合則:$a + (b + c) = (a + b) + c,$

$a(bc) = (ab)c$

c)分配則:$c(a + b) = ca + cb$

1.2分数

- $$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$
- $$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$
- $$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

1.3 指数

a>0,b>0のとき

$a^0 = 1$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

a^{m-n}

$(ab)^n = a^n b^n$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$(ab)^m = a^m b^m$

$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} =$

1.4 虚数

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

$i^5 = i$, $i^6 = -1$,…

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

1.5 乗法(展開)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(ax + b)(cx + d) =$$

$$cx^2 + (ad + bc)x + bd$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

1.6 2次方程式の解

a,b,cが実数で$a \neq 0$のとき

$$ax^2 + bx + c = 0$$

をxについての2次方程式という。これを満たすxの値を方程式の解という。

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

つまり

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a},\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって、2次方程式の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

1.7 对数等

0!=1

3!=3·2·1＝6

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots$(n-1)$\cdot\, n$

$logab = loga + logb$

$log\frac{a}{b} = loga - logb$

$loga^n = nloga$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a$$

$$\log\frac{1}{a} = -\log a$$

$$\log_k k = 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log_k a = \log_m a \times \log_k m = \frac{\log_m a}{\log_m k}$$

2. 三角関数

2.1 定義

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} = \frac{対辺}{斜辺}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{底辺}{斜辺}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}$$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$1 + tan^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

(続き)

（負の角）

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

2.1　角度

（角度の単位）

度・分・秒：

円の1周=360°

$1° = 60'$ $1' = 60''$

グラード法：

$360° = 400^g$　　$1^g = 100^c$

$1^c = 100^c$

ラジアン：

$360° = 2\pi$　$180° = \pi$

$90° = \pi/2$

$60° = 2\pi/3$ $45° = \pi/4$

$30° = \pi/3$

$\rho° = 180°/\pi$

$\rho' = 180 \times 60'/\pi$

$\rho'' = 180 \times 60 \times 60''/\pi$

π=円周率

(続々)

（微小角）

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta$$
$$\cos\theta \fallingdotseq 1$$
$$\tan\theta \fallingdotseq \theta$$

ただし、θはラジアン

測量では$\theta \approx 4^\circ$まで上の式が利用できる。

三角関数(続)

（三角関数値）

$$\sin 30^o = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^o = \sqrt{3}$$

$$\sin 45^o = \cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^o = 1$$

(続き)

（和と差）

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

(例)$\sin(\theta + \Delta\theta)$の近似値

$cos\Delta\theta \approx 1,\ sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ とすれば

$$\sin(\theta + \theta\Delta)$$
$$= \sin\theta\, cos\Delta\theta sin\Delta\theta \cos\theta$$
$$\approx sin\theta \cdot 1 + \Delta\theta\cos\theta$$
$$= \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$$

余角

- $\sin x = \cos(90^o - x)$
- $\cos x = \sin(90^o - x)$
- $\tan x = \cot(90^o - x)$

倍角

- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
- $\cos 2x = cos^2x - sin^2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sin^2x$
- $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-tan^2x}$

半角

- $\sin x = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}$
- $\cos x = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = 2cos^2\frac{x}{2} - 1$

  $= 1 - 2sin^2\frac{x}{2}$
- $\tan x = \frac{2tan\frac{x}{2}}{1-tan^2\frac{x}{2}}$

2.2　正弦比例式

- $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$
- $C = 180^o - (A + B)$
- R:外接円の半径
- 内接円の半径r,(Sは三角形の面積)
- $S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}(a + b + c)$
- $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$とおくと
- $S = rs$より$\mathrm{r} = \frac{S}{s}$、（Sはヘロンの公式などで）

2.3 余弦定理(2辺夾角)

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

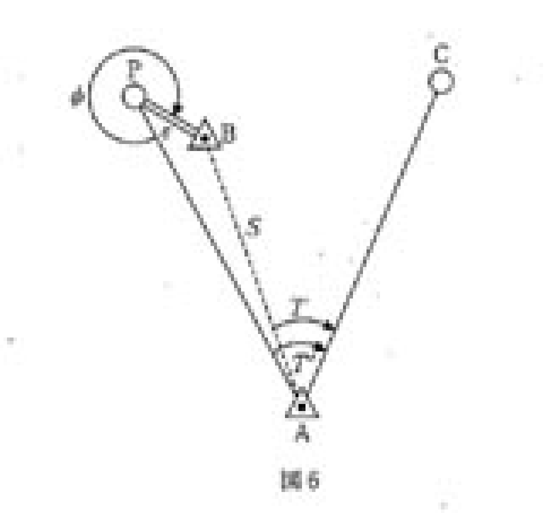
偏心計算（補H23）

∠BAC＝Tの算出

S=2, 000m

観測結果	
T'	53°25'23"
e	2.000m
φ	330°00'00"

$$\sin x = \frac{e}{S}\cdot\sin\varphi = \frac{2\mathrm{m}}{2000\mathrm{m}}\times\sin(360^{\mathrm{o}}-330^{\mathrm{o}}) = \left(\frac{1}{1000}\right)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2000}$$



$$x = \left(\frac{1}{2000}\right)\cdot 2\times10^{5} = 100'' = 1'40''$$

$$\therefore T = T' - x = 53°23'43''$$

偏心（補H22）

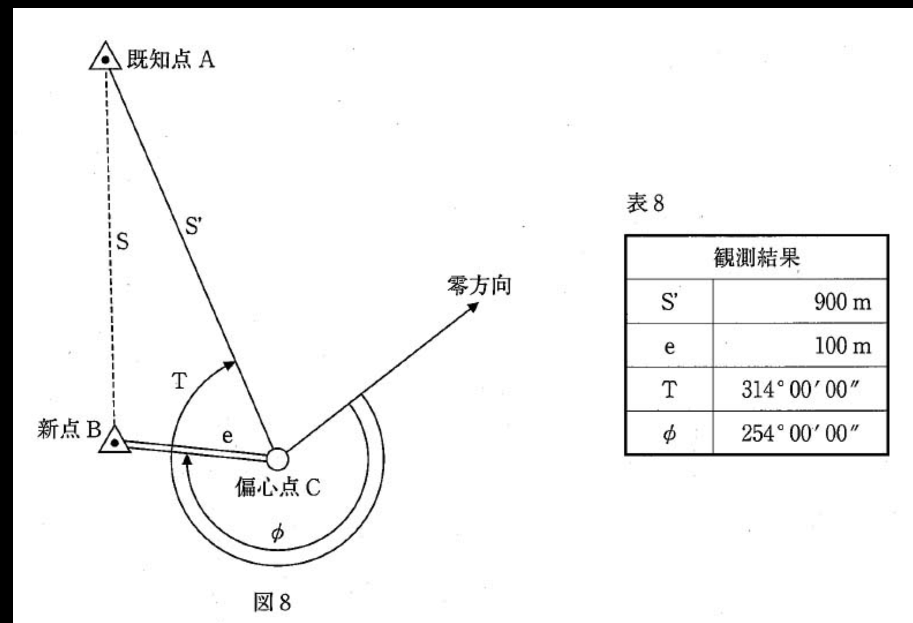
距離AB=Sの算出

$$S^2 = S'^2 + e^2 - 2S'e \times cos\,(T - \varphi)$$

$$= 900^2 + 100^2 - 2 \times 900 \times 100 cos\,60°$$

$$= 730,000$$

$$\therefore S = 100\sqrt{73} = 854.40m$$



偏心観測(土H25)

内角Tを求めよ。

AB=$S_1 = 1{,}200m$

観測結果	
e_1	2.00m
e_2	1.00m
φ_1	90°
φ_2	150°
T'	90°

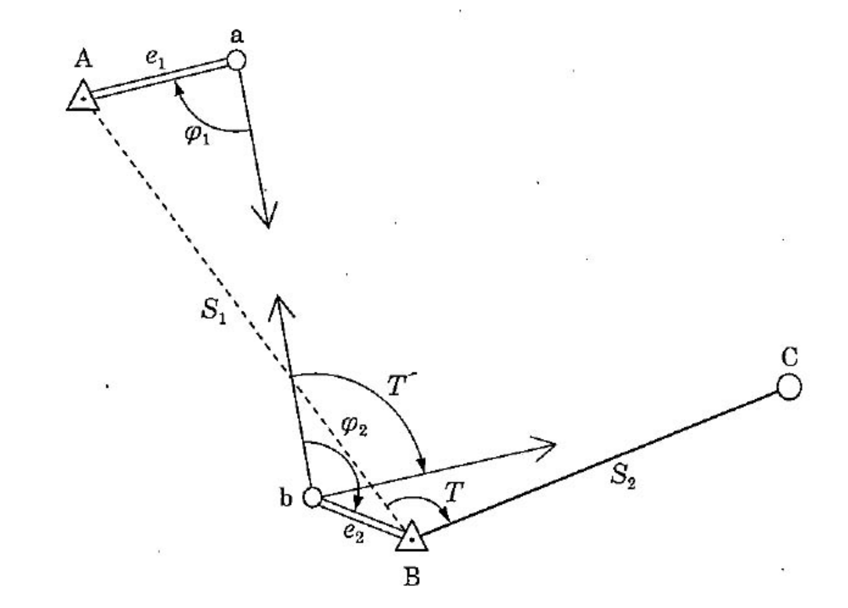


図6

$$BC = S_2 = 1{,}000m$$

(解)

ABとabの交点をb',b'B=yとし、△Bbb'において

$\angle bb'B = x_1$とすると

偏心計算

$$\frac{y}{\sin\varphi_2}=\frac{e_2}{\sin x_1}$$

$$\sin x_1=\frac{e_2}{y}\sin\varphi_2$$

$$=\frac{1}{2y}\cdots①$$

△Aab’において

$$\frac{e_1}{\sin x_1}=\frac{S_1-y}{\sin\varphi_1}$$

$$\sin x_1=\frac{e_1}{S_1-y}\sin\varphi_1$$

$$=\frac{2}{1200-y}\ \cdots②$$

①＝②より

$$\frac{1}{2y}=\frac{2}{1200-y}$$

$$1200-y=4y$$

$$5y=1200$$

$$\therefore y=240$$

①より$\sin x_1=1/480$

偏心

$x_1 = 0.119366°$

$\angle bCB = x_2$とおくと

$\frac{S_2}{\sin CbB} = \frac{e_2}{\sin x_2}$

$\sin x_2 = \frac{e_2}{S_2} \sin CbB \ldots$③

T’=∠abC=90° なので

∠CbB= $\varphi_2 - T' = 150° - 90° = 60°$

③=$\frac{\sin 60°}{1000} = 0.000866$

$x_2 = 0.049620°$

$\angle \mathrm{bBb}' = 180° - (\varphi_2 + x_1)$
$= 29.880634°$

$\angle bBC = 180° - (\angle CbB + x_2)$
$= 119.950380°$

$\therefore T = \angle bBC - \angle bBb'$
$= 90.069746°$
$= 90°04'11"$

2.4 三角形面積

$a + b + c = 2s$とすると、内接円の半径rは

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

三角形の面積

$$K = \frac{1}{2} bcsin\, A = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = sr$$

K=$\frac{abc}{2R}$

2.5　逆三角関数

- $y = \sin x$のとき$x = sin^{-1}y$
- $y = \cos x$のとき$x = cos^{-1}y$
- $y = \tan x$のとき$x = tan^{-1}y$

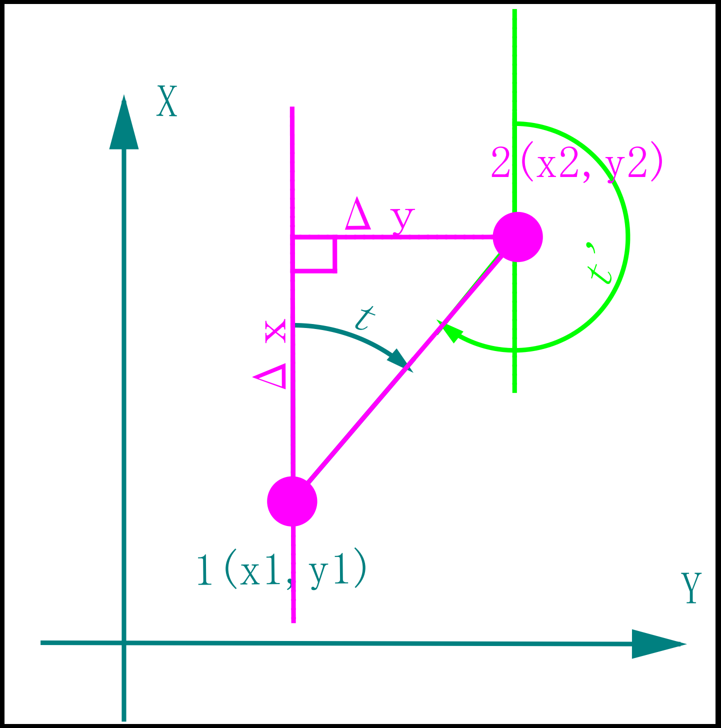
　なお、測量では360°を超えた角は360°を引いて表します。

2.6　測量のX,Yと方向角

（第1象限）点1における点2の方向角

$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$, $\Delta y = y_2 - y_1 > 0$

$t = tan^{-1}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



点2における点1の方向角

反方向角$t' = t + 180°$

第2象限

点1における点2の方向角(t)

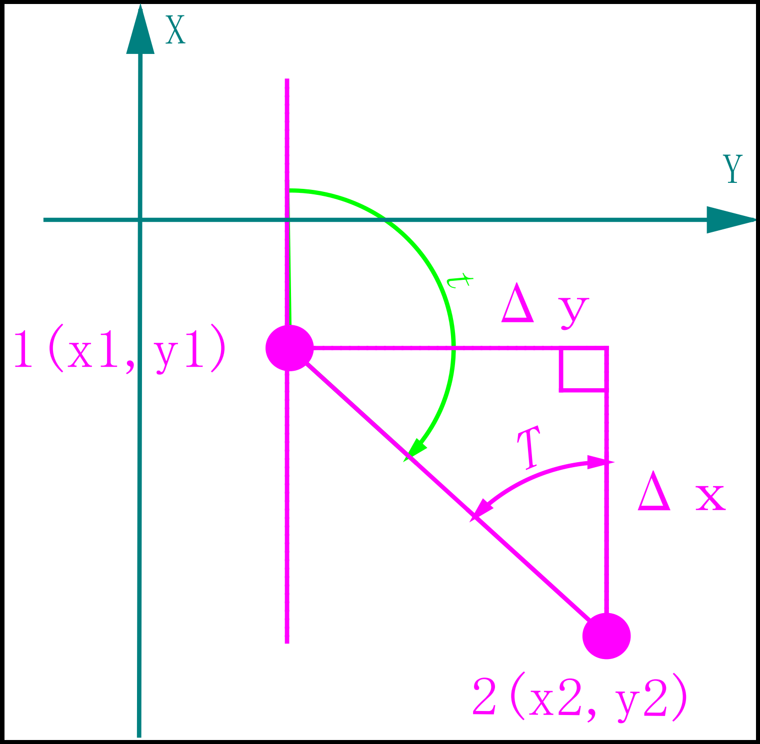
$$T = tan^{-1}\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 < 0$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 > 0$$

$$\therefore t = T + 180°$$

ただしT<0



第3象限

点1における点2の方向角(t)

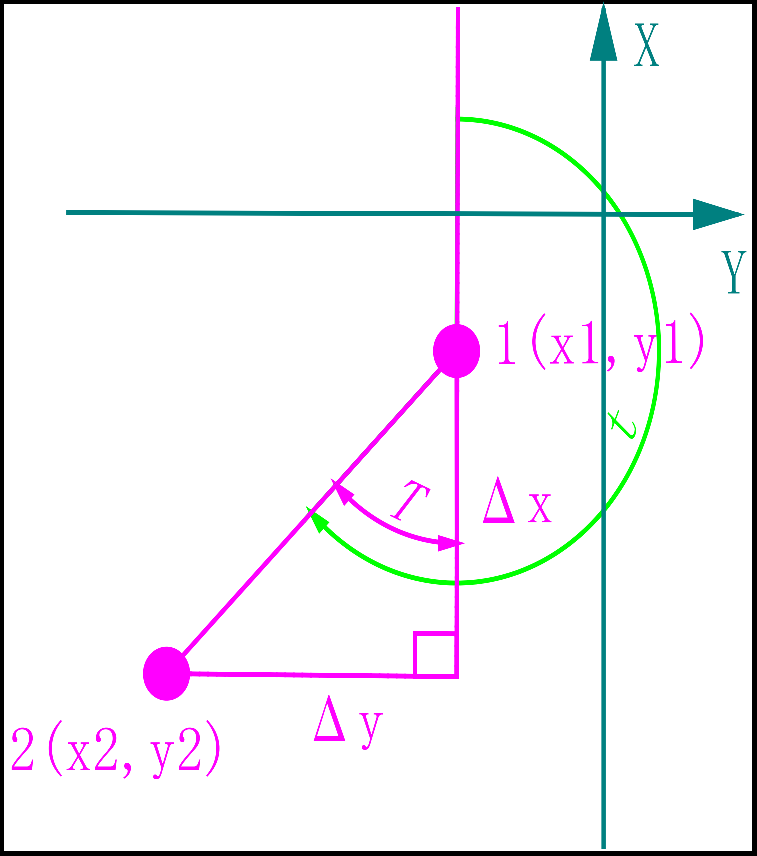
$$T = tan^{-1}\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 < 0$$

$$\Delta y = y_2 - x_2 < 0$$

$$\therefore t = T + 180°$$

ただし、T>0



第4象限

点1における点2の方向角(t)

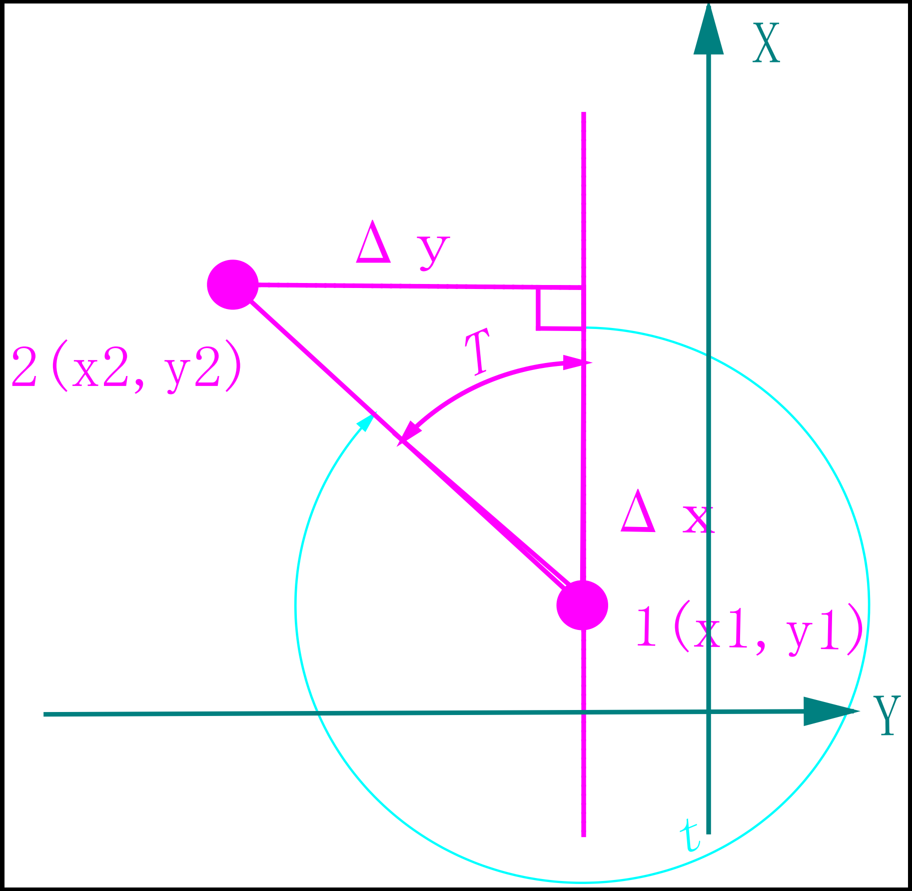
$$T = tan^{-1}\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 > 0$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 < 0$$

$$\therefore t = T + 360°$$

ただし、T<0



（注意）

上の方向角の計算で第1象限～第4象限の方向角を、1～4象限内で示したが、第1象限その他でも

$\mathrm{t} = 180° + T$、$T + 360°$など

の角があることに留意してください。

近似計算

1）斜め距離D＝150.625m、高低角$\theta = 4°$を測定した。水平距離（S)を求めよ。（高低差h＝10.507m）

（解答）

$S = Dcos\theta$…①

$cos\theta$を展開すると

$cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$…②

この第2項までを利用して

距離誤差δ

$S = D(1 - \frac{\theta^2}{2})$ …③

補正値δ=-誤差Δ$= S - D = D - \frac{D\theta^2}{2} - D$

$\delta = \frac{-D\theta^2}{2}$ …④

$\sin\theta = \tan\theta = \frac{h}{D} \approx \theta$…⑤これを④に代入して

$$\delta = \frac{-D}{2}(\frac{h}{D})^2 = \frac{-h^2}{2D}$$

正しい距離S

$S = D + \delta = D - \frac{h^2}{2D} \ldots$⑤

①より$S = 150.625 \times 0.997564 = 150.258m$

$$\delta = \frac{-h^2}{2D} = -\frac{10.507^2}{2 \times 150.625} = -0.366m$$

⑤より$S = 150.625 - 0.366 = 150.259m$

平面とみなせる範囲(接円筒)

地球のA点に平面又は円筒を置いたとき、球面距離S(正しい)と平面距離s(正しくない)の差の関係式を以下に解く。

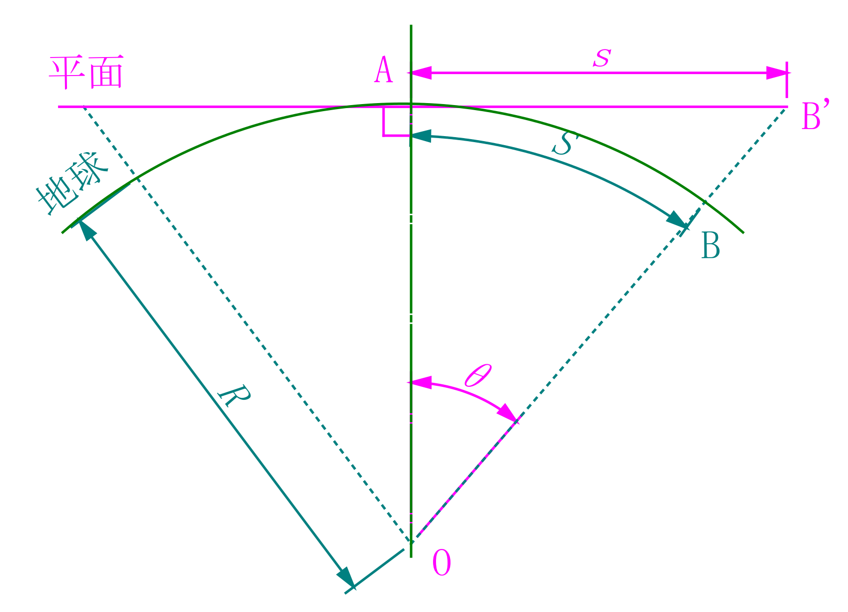
$s = R\tan\theta \approx R(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \cdots)$ …①

$S = R\theta$ …②

誤差$\delta = s - S = R\theta + \frac{R\theta^3}{3} - R\theta = \frac{R\theta^3}{3}$ …③

②より$\theta = \frac{S}{R}$ …④

これを③に代入すると



平面とみなせる範囲S

$$\delta = s - S = \frac{R}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^3 = \frac{S^3}{3R^2}$$

両辺をSで割ると

$$\frac{s - S}{S} = \frac{S^2}{3R^2}$$

式を変形すると

$$S = \sqrt{3}R\sqrt{\frac{s - S}{S}}$$

（例）測量精度$\frac{s-S}{S} = \frac{1}{10{,}000}$,
地球の半径R=6,370kmとするとき、平面とみなせる投影原点からの半径Sはいくらか。

（解答）

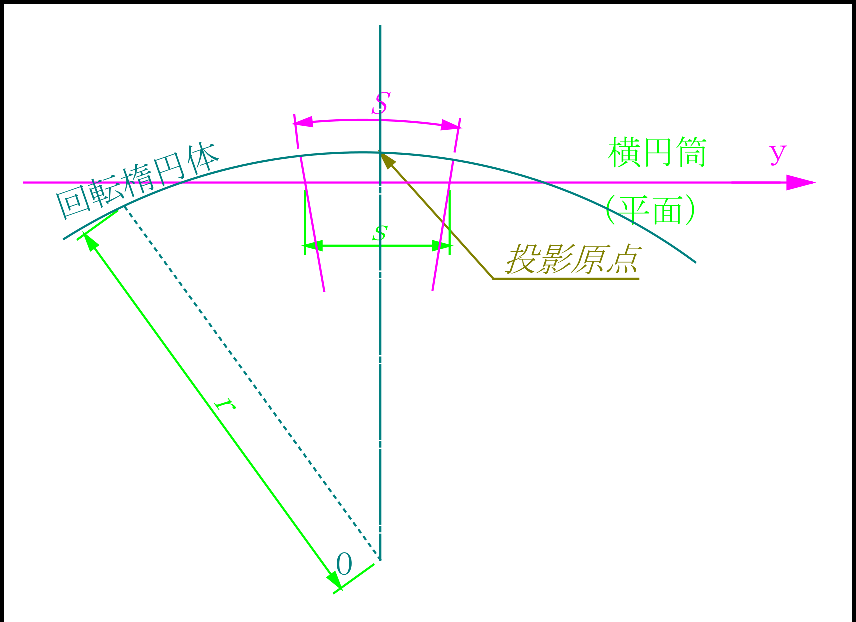
$$\therefore S = \sqrt{3} \times 6{,}370km \times \sqrt{\frac{1}{10{,}000}} = 110km$$

ガウス・スクリューゲル投影の範囲

平面距離dsと球面距離dSとすると縮尺係数は

$$m = \frac{ds}{dS} = m_0\left[1 + \frac{(y_1+y_2)^2}{8r^2{m_0}^2}\right] \cdots ①$$

ここで、m_0:投影原点の縮尺係数（平面直角座標系=0.9999, UTM=0.9996）,y:y（東方向）平均座標、r: 地球平均半径



平面とみなせる半径y

①より

$$4y^2 = 8r^2{m_0}^2(\frac{m}{m_0} - 1)$$

$$\therefore y = \sqrt{2}rm_0\sqrt{\frac{m}{m_0} - 1}$$

ただし、$2y = y_1 + y_2$

(例)平面直角座標系及びUTMの最大半径yを求めよ。r＝6370kmとする。

（平面直角座標系）

$$y = \sqrt{2} \times 6370 \times 0.9999\sqrt{\frac{1.0001}{0.9999} - 1}$$

$$= 127km$$

UTMの場合

（UTM）

$$y = \sqrt{2} \times 6370$$

$$\times 0.9996 \sqrt{\frac{1.0004}{0.9996} - 1}$$

$$= 254km$$

3. 微分

(1)$y = f(x)$ならば

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(2)微分の一般理論

(a)$\frac{dc}{dx} = 0$

(b)$\frac{d(x)}{dx} = 1$

(c)$\frac{d(u+v-w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$

(d)$\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}$

微分(続き)

(e) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

(f) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

(g) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

(h) $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c\frac{dv}{dx}}{v^2}$

4. 問題集[答え]

1) $3^{2x} = 5^{x+1}$, xを求めよ。

ただし、 log5=0.9960, log3=0.4771 [x=2.74]

2) $2^{x+y} = 6^{y}$,

$3^{x} = 6(2^{y})$

x,yを求めよ。[x=2.71, y=1.71]

(解) $2^{x}2^{y} = (2\cdot 3)^{y} = 2^{y}3^{y}$

$2^{x} = 3^{y} \ldots$ ①

$3^{x} = (3\cdot 2)\ 2^{y}$

解2)の続き

$3^{x-1} = 2 \cdot 2^{y}$

$3^{x-1} = 2^{y+1}$…②

①と②からy=x-1,x=y+1…③

①と③から$(y+1)log2 = ylog3$

$y+1 = y\frac{log3}{log2}$

$y - 1.585y = -1$

$-0.585y = -1$

$\therefore y = 1.71, x = y + 1 = 2.71$

問題集

3)$2^{x^2} = 16^{x-1}$, xを解け。[x=2]

(解)$2^{x^2} = 2^{4(x-1)}$, $x^2 = 4(x-1)$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \therefore x = 2$

4)因数分解せよ。

a)$a^3b^3 + 8$, [(ab+2)($a^2b^2 - 2ab + 4$)]

問題集

b)$a^{m+2n}+7a^{m+n}+10a^{m}$

$[a^{m}(a^{n}+2)(a^{n}+5)]$

c)$18a^{4m+n}-66a^{2m+n}b^{2}-24a^{n}b^{4}$

$[6a^{n}(3a^{2m}+b^{2})(a^{m}+2b)(a^{m}-2b)]$

問題　簡単化

a) $\dfrac{\frac{a^2-3a+2}{a^2+4a-21}}{\frac{4-4a+a^2}{9-a^2}}$ [$-\dfrac{(a-1)(a+3)}{(a-2)(a+7)}$]

b) $\dfrac{x}{(x-y)(z-x)}+\dfrac{y}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{z}{(y-z)(z-x)}$ [0]

c) $2-\dfrac{2}{1-\frac{2}{2-\frac{2}{a^2}}}$ [$2a^2$]

簡単化

a) $\dfrac{(a+\frac{1}{b})^c(a-\frac{1}{b})^d}{(b+\frac{1}{a})^c(b-\frac{1}{a})^d}$ $\quad [(\frac{a}{b})^{c+d}]$

b) $\sqrt[4]{xy^{-1}z^5}\sqrt[4]{x^3y^3z^{-1}}$ $\quad [xz\sqrt{y}]$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{0.004^4 \cdot 0.0036}{120000^2}}$ $\quad [4 \cdot 10^{-8}]$

$$= [\frac{(4\cdot 10^{-3})^4 \cdot (36\cdot 10^{-4})}{(12\cdot 10^4)^2}]^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{2^8\cdot 10^{-12}\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 10^{-4}}{3^2\cdot 2^4\cdot 10^8}}$$

$$= \sqrt[3]{2^6\cdot 10^{-24}} = 2^2\cdot 10^{-8}$$

問題　連立方程式(1)

d)a,b,cを解け。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=5$$

$$\frac{2}{a}-\frac{3}{b}-\frac{4}{c}=-11$$

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}-\frac{1}{c}=-6$$

[a=$\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$, c $=\frac{1}{6}$]

解答(ヒント)

$\frac{1}{a} = A, \frac{1}{b} = B, \frac{1}{c} = C$とおくと上の式は

$A + B + C = 5$ …①

$2A - 3B - 4C = -11$　…②

$3A + 2B - C = -6$　…③

と書けるので、A,B,Cは以下のように解ける。

①＋③より

$4A + 3B = -1$ …④

答え（続き）

①×4+②より

$6A + B = 9 \ldots ⑤$

さらに④-⑤×3

$$
\begin{aligned}
&\quad 4A + 3B = -1 \\
&-)18A + 3B = 27 \\
&-14A = -28
\end{aligned}
$$

$\therefore A = 2 \ (a = \frac{1}{A} = \frac{1}{2})$

⑤にAを代入

$\therefore B = -3 \ (b = \frac{1}{B} = -\frac{1}{3})$

①より

$2 + (-3) + C = 5$

$\therefore C = 6$

$\therefore c = \frac{1}{C} = 1/6$

方程式(2)

以下のaを解け。

a) $2-\sqrt[3]{a^2+2a}=0$ [-4,2]

$a^2+2a-2^3=0 \rightarrow (a-2)(a+4)=0$

$\therefore a=-4,2$

b) $2+\sqrt{a}=\sqrt{7+2a}$ [9,1]

c) $-a=\sqrt{a^2-\sqrt{1+2a}}$ [$\frac{3}{2}$]

d) $\sqrt{2a+5}-\sqrt{8a+25}+\sqrt{2a+8}=0$ [-2]

行列式（因数分解）

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ [abc(a-b)(b-c)(c-a)]

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & b^3 \end{vmatrix}$

[(a-b)(b-c)(c-a)(a-1)(b-1)(c-1)]

ヒント(解答法）

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & b^3 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & b-1 & c-1 \\ 1 & a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 1 & a^3-1 & b^3-1 & b^3-1 \end{vmatrix}$$

続き

$$=(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a^2+a+1 & b^2+b+1 & c^2+c+1 \end{vmatrix}$$

$$=(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & b-a & c-a \\ a^2+a+1 & b^2-a^2+b-a & c^2-a^2+c-a \end{vmatrix}$$

答え

$$=(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1+b+a & 1+c+a\end{vmatrix}$$

$$=(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1+b+a & c-b\end{vmatrix}$$

$$=(a-1)(b-1)(c-1)(a-b)(b-c)(c-a)$$

クラメルの規則

（例）$2x_1 - 3x_2 = 5$

$4x_1 + 9x_2 = 12$ をクラメルの規則で解くと

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 12 = 30$$

$$A_{x1} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 36 = 81 \therefore x_1 = \frac{27}{10}$$

$$A_{x2} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 20 = 4 \therefore x_2 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

クラメルの規則でx_3を解け

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_2 + 3x_4 - x_5 = -5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 1$$

$$2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$$

$$x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \quad [x_3 = 2]$$

三角関数の問題

1) $tan\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{b}$ ならば$\sin\alpha$はいくらか。$[\frac{2ab}{a^2+b^2}]$

(解)$\sin\alpha=\frac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{cos^2\frac{\alpha}{2}+sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\sin\alpha$より

$$\sin\alpha=\frac{2\left(\frac{a}{b}\right)}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{2b^2\frac{a}{b}}{a^2+b^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

証明問題

2）$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1-sin\alpha}{cos\alpha}=1$ を証明せよ。

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1-sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{1+tan\frac{\alpha}{2}}{1-tan\frac{\alpha}{2}}\frac{1-sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{1+\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}}{1-\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}}\times$$

$$\frac{1-sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{1+cos\alpha+sin\alpha-sin\alpha-sin\alpha cos\alpha-sin^2\alpha}{(1+cos\alpha-sin\alpha)cos\alpha}$$

$$=\frac{(1+cos\alpha-sin\alpha)cos\alpha}{(1+cos\alpha-sin\alpha)cos\alpha}=1$$

3)の答え

3)$\frac{tan2\alpha}{tan\alpha} - \frac{1}{cos2\alpha} = 1$ を証明せよ。

$$\frac{tan2\alpha}{tan\alpha} - \frac{1}{cos2\alpha} = \frac{sin2\alpha}{cos2\alpha tan\alpha} - \frac{tan\alpha}{cos2\alpha tan\alpha} =$$

$$\frac{2sin\alpha cos\alpha - \frac{sin\alpha}{cos\alpha}}{cos2\alpha tan\alpha} = \frac{2sin\alpha cos^2\alpha - sin\alpha}{cos2\alpha tan\alpha} =$$

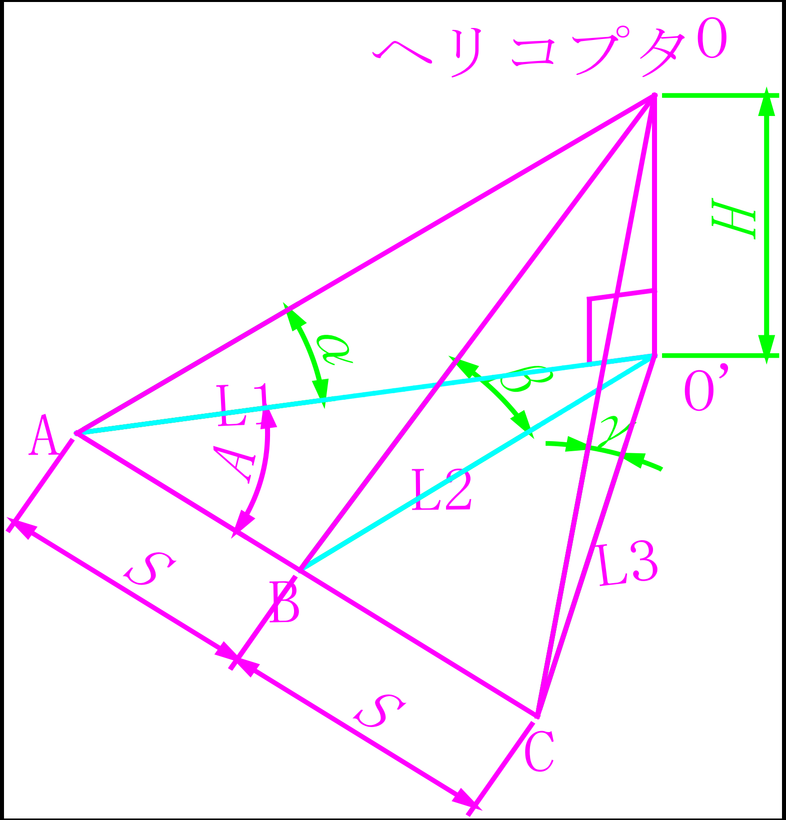
$$\frac{\frac{sin\alpha(2cos^2\alpha - 1)}{cos\alpha}}{cos2\alpha tan\alpha} = \frac{tan\alpha cos2\alpha}{cos2\alpha tan\alpha} = 1$$

問題4）

次の図のように平地の地点A,B,Cから同じ器械高のTSによりヘリコプタを同時観測して、高度角をそれぞれα、β及びγと測定したとする。距離AB=BC=Sであるとき、TSからのヘリコプタの高度（H)は次式で表されることを証明せよ。

$$H = \frac{S\sqrt{2}}{\sqrt{cot^2\alpha - 2cot^2\beta + cot^2\gamma}}$$

4）の証明



$H = L_1 \tan\alpha$ …①

$H = L_2 \tan\beta$ …②

$H = L_3 \tan\gamma$ …③

△ABO'から

$L_2{}^2 = L_1{}^2 + S^2 - 2SL_1 \cos A$…④

△ACO'から

$L_3{}^2 = L_1{}^2 + (2S)^2 - 4SL_1 \cos A$ …⑤

続き

④に①、②を代入して

$H^2cot^2\beta = H^2cot^2\alpha + S^2 - 2SHcot\alpha cosA$⑥

⑤に①、③を代入して

$H^2cot^2\gamma = H^2cot^2\alpha + 4S^2 - 4SHcot\alpha cosA$⑦

⑦-⑥×2より

$$H^2cot^2\gamma - 2H^2cot^2\beta = -H^2cot^2\alpha + 2S^2$$

答え(続)

$$H^2(cot^2\gamma - 2cot^2\beta + cot^2\alpha) = 2S^2$$

$$\therefore H = \frac{S\sqrt{2}}{\sqrt{cot^2\alpha - 2cot^2\beta + cot^2\gamma}}$$

問題(厳密解を求める)

①$sin15°$(厳密に)

$$= \sin(45° - 30°)$$

$$= sin45°cos30° - cos45°sin30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

②$sin292.5°$(厳密に) $= -\sin(292.5° - 270°)$

$$= -sin\frac{45°}{2} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

解析の問題
（関数の指定点の接線の勾配mと式）

1）$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ のx＝2におけるmと接線式

[m=$-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{\sqrt{3}}$]

2)$y = \frac{x^2-2x+1}{x+3}$ のx＝1におけるmと接線式

[x＝0、y＝0]

3）$y = \frac{x^2+1}{x}$ のx＝4におけるmと接線

1)の解答

$y=\frac{(x+1)^{1/2}}{(x-1)^{1/2}}$ の接線の勾配を求めると

$$y'=\frac{(x-1)^{1/2}\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}-(x+1)^{1/2}\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}}{[(x-1)^{1/2}]^2}$$

$$=-(x+1)^{-1/2}(x-1)^{-3/2}$$

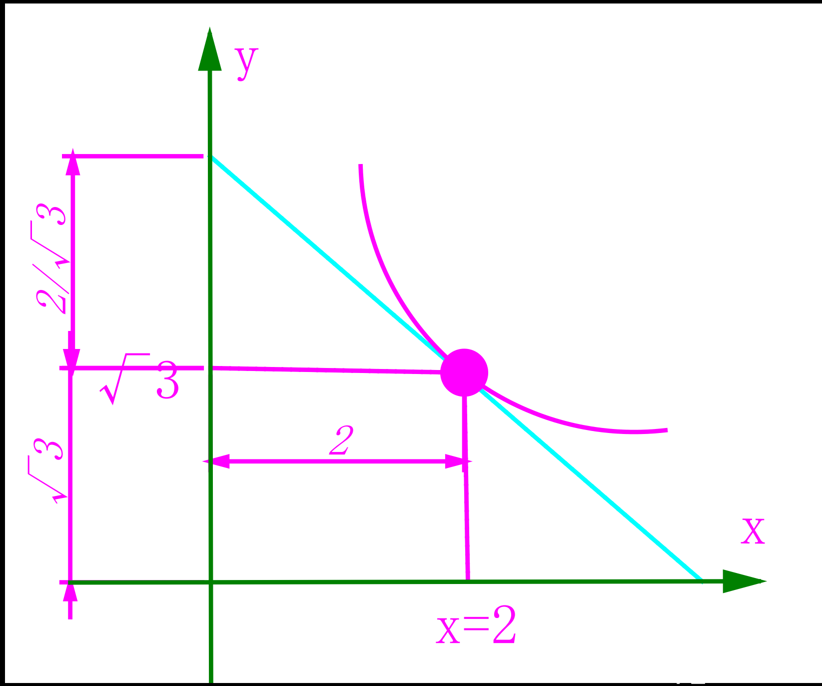
$$=-\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}(x-1)^2}=m$$

1)の解答（続き）

x＝2のとき勾配m＝－$^{1}/_{\sqrt{3}}$

その点におけるy＝$^{5}/_{\sqrt{3}}$

∴接線式$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{\sqrt{3}}$



${}^{dy}/_{dx}$を計算

1)$y=\frac{1}{5}x^5+3x^3\quad[\frac{dy}{dx}=x^4+9x^2]$

2)$y=\frac{1}{x}+x^{\frac{3}{4}}\quad[\frac{dy}{dx}=-x^{-2}+\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}]$

3)$y=2x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{2x}\quad[\frac{dy}{dx}=3x^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{\sqrt{2x}}]$

4)$y=sin^4x\quad[y'=4sin^3x\cdot cosx]$

5)$y=\sqrt{cosx}\quad[y'=-\frac{sinx}{2\sqrt{cosx}}]$

微分（続き）

6)$y = \tan(sinx)$; [$y' = cosx[1 + tan^2(sinx)]$

7)$y = lncos2x$;[$y' = -2tan2x$]

8)$y = sin^{-1}(tanx)$;[$y' = \frac{1+tan^2x}{\sqrt{1-tan^2x}}$]

9)$y = \sin(e^{3x})$; [$y' = 3e^{3x}\cos(e^{3x})$]

10)$y = x^x$;[$y' = x^x(1 + lnx)$]

11)$y = x^{\frac{1}{x}}$; [$y' = (-\frac{1}{x^2}lnx + \frac{1}{x^2})x^{\frac{1}{x}}$]

微分（続々）

12）$U = e^{xyz}$ のとき$\dfrac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z}$を求めよ。

$[e^{xyz}(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)]$

13)$z = xtan\, y + ytan\, x$ のとき

$\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \dfrac{2(cos^2 x+3sin^2 x)}{cos^4 x}$を証明せよ。

最大値、最小値、変曲点

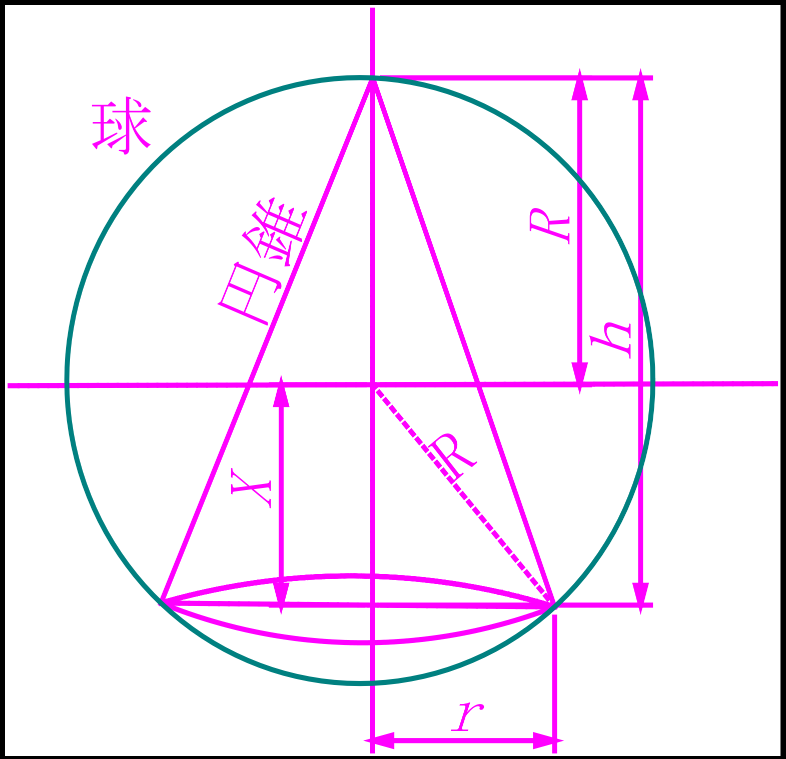
1）$y = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 12$

[max x=-1,min x=4,infl: x=3/2]

2)$y = \frac{x^2}{x+1}$ [max x=-2, min x=0, x=-1]

3)半径Rの球に内接する最大体積の円錐の高さhを求めよ。

3)半径Rの球に内接する最大体積の円錐の高さhを求めよ。



球の半径:R

円錐の高さ:h＝X+R

円錐底面の半径:

$r = \sqrt{R^2 - X^2}$

円錐の体積:

$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - X^2)(R + X)$

または、これを展開しておくと

球に内接する最大体積の円錐

$$V=\frac{\pi}{3}(R^3+R^2X-X^2R-X^3)$$

$\frac{dV}{dX}=0$ により最大値が求められる。

$$\frac{dV}{dX}=R^2-2XR-3X^2=(R-3X)(R+X)$$
$$=0$$

X＝-Rはあり得ないのでX＝R/3

$$\therefore h=R+X=\frac{4R}{3}$$

円筒

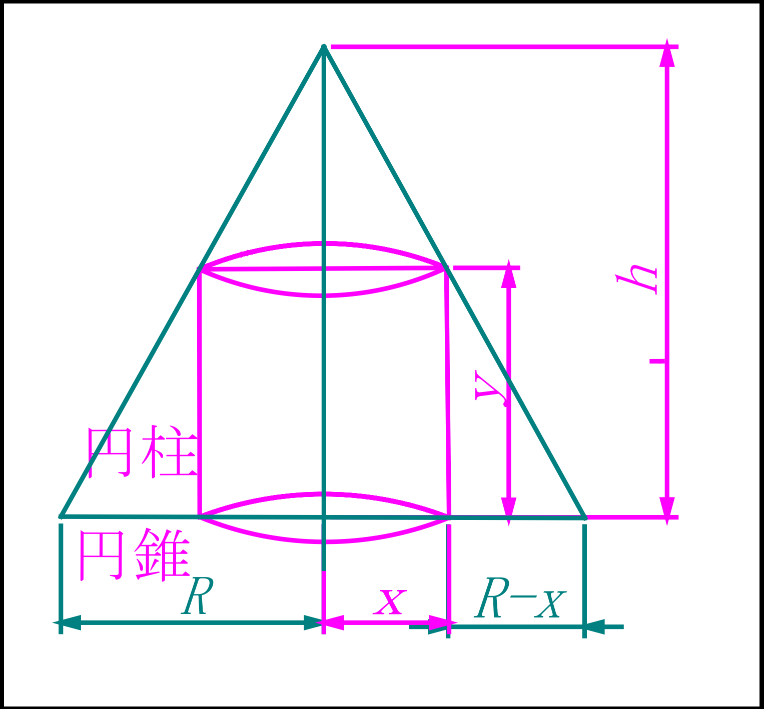
4）半径R、高さhの円錐がある。円錐に内接する最大体積の円筒半径を求めよ。

$\frac{y}{R-x} = \frac{h}{R}$ より

$y = \frac{h}{R}(R - x)$

円柱の体積$V = \pi x^2 y$

$= \pi x^2 \frac{h}{R}(R - x)$



円錐に内接する最大の体積円柱

$$V = \pi x^2 \frac{h}{R}(R - x) = \pi x^2 h - \pi x^3 \frac{h}{R}$$

$\frac{dV}{dx} = 2\pi x h - 3\pi x^2 \frac{h}{R} = 0$ より

$x\left(2 - \frac{3x}{R}\right) = 0$,ここで$x = 0$ではないので、

$$\frac{3x}{R} = 2$$

$$\therefore x = \frac{2R}{3}$$

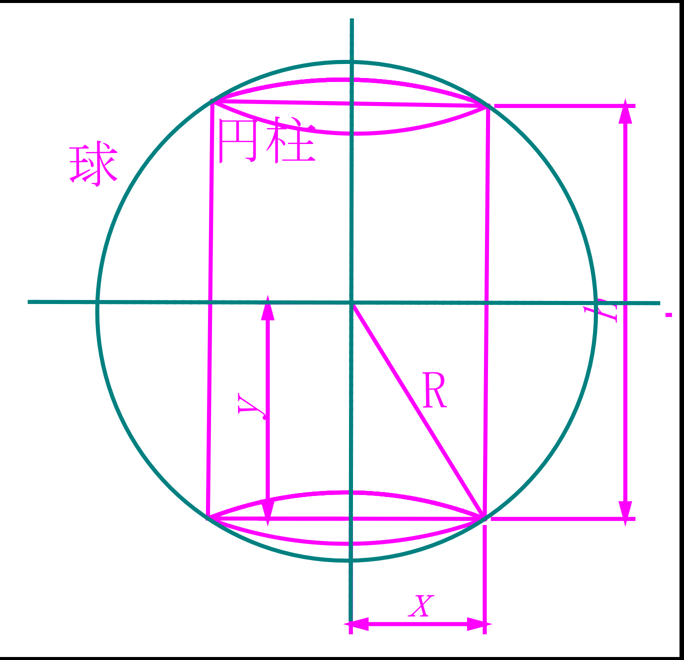
球に内接する最大体積の円柱

5) 半径Rの球がある。球に内接する最大体積の円柱を求めよ。

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$= \sqrt{R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$V = \pi x^2 h = \pi \left[R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right] h$$



球に内接する円柱

$$V = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

$$\frac{3h^2}{4} = R^2$$

$$\therefore h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

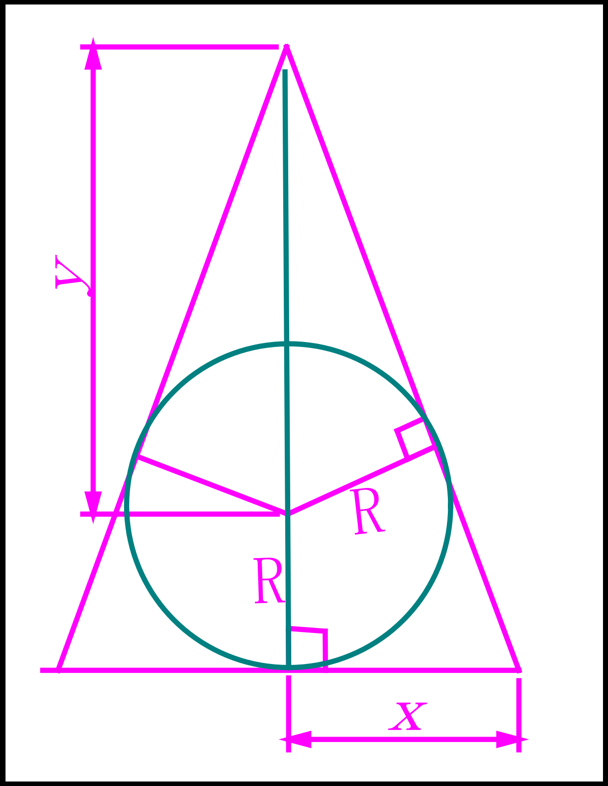
球に接する最小体積円錐

5）半径Rの球に外接する最小体積の円錐の高さと半径を求めよ。

$$\frac{x}{y+R} = \frac{R}{\sqrt{y^2-R^2}}$$

$$x = \frac{R(y+R)}{\sqrt{y^2-R^2}}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 (y+R)$$



球の外接円錐の大きさ(解)

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2(y+R)^3}{y^2-R^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2(y+R)^2}{(y-R)}$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{(y-R)\cdot 2(y+R)(1)-(y+R)^2(1)}{(y-R)^2} = 0$$

$$2(y-R)-(y+R) = 0$$

$$y - 3R = 0$$

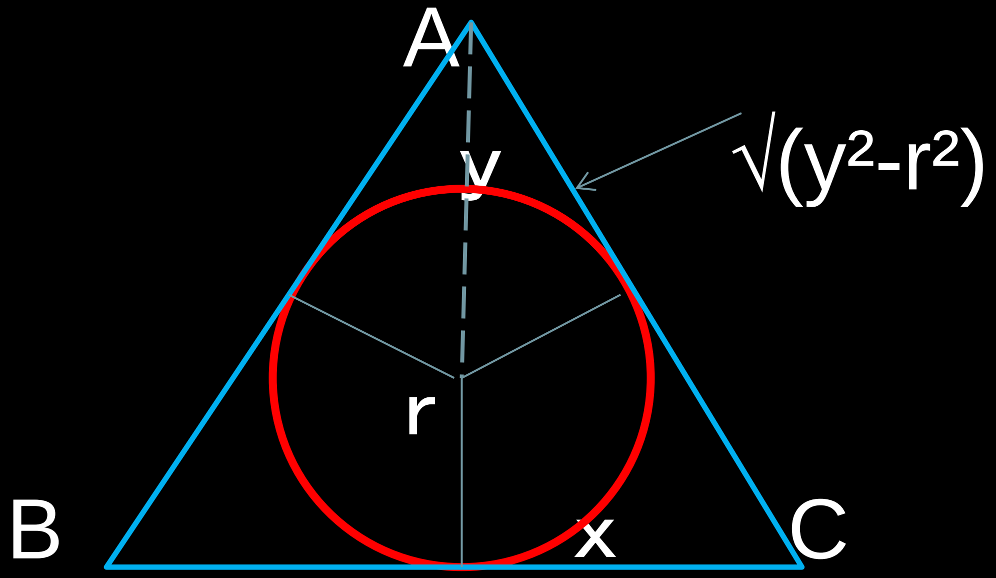
$$\therefore y = 3R$$

円錐の高さ$h = y + R = 3R + R = 4R$

円錐の半径$x = \frac{R(y+R)}{\sqrt{y^2-R^2}} = \frac{R(4R)}{\sqrt{9R^2-R^2}} = \sqrt{\frac{16}{8}}R = \sqrt{2}R$

円に外接する二等辺三角形

△ABCの最小面積Sの決定



ラグランジェの未定乗数法

三角形の面積

$$f(x,y) = x(y+r) = \text{最小}$$

拘束条件

$$g(x,y) = \frac{x}{r} - \frac{y+r}{\sqrt{y^2-r^2}}$$

- $f(x,y) = xy + xr - \lambda\left(\frac{x}{r} - \frac{y+r}{\sqrt{y^2-r^2}}\right)$＝最小

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial(x,y)}{\partial y}=0,\ \frac{\partial(x,y)}{\partial \lambda}=0$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial x} = y + r - \lambda\left(\frac{1}{r}\right)=0..①$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial y} = x - \lambda\left(\frac{-r}{(r-y)\sqrt{y^2-r^2}}\right)...②$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial \lambda} = -\left(\frac{x}{r} - \frac{y+r}{\sqrt{y^2-r^2}}\right)...③$$

未定乗数λ

②より$x = \frac{-\lambda r}{(r-y)\sqrt{y^2-r^2}}$…④

①より$y = \frac{\lambda}{r} - r$

③より$\frac{x}{r} = \frac{y+r}{\sqrt{y^2-r^2}} \rightarrow x = \frac{r(y+r)}{\sqrt{y^2-r^2}}$…⑤

④＝⑤より

$$\frac{-\lambda r}{(r-y)\sqrt{y^2-r^2}} = \frac{r(y+r)}{\sqrt{y^2-r^2}}$$

未定乗数λ

- $\lambda = -(y + r)(r - y) = y^2 - r^2$…⑥
- ①より$y = \frac{\lambda}{r} - r = \frac{y^2 - r^2 - r^2}{r} = \frac{y^2 - 2r^2}{r}$
- 又は$y^2 - 2r^2 - ry = 0$
- $y = -r, 2r$(後者を採用する)
- ⑥に代入して
- $\lambda = 4r^2 - r^2 = 3r^2$

最少の面積(未定乗数法)

$x = \frac{r(2r+r)}{\sqrt{(2r)^2-r^2}} = \frac{3r^2}{\sqrt{3}r} = \sqrt{3}r$…⑤

最小面積

S=x(y+r)= $\sqrt{3}r(2r + r) = 3\sqrt{3}r^2$

マクローリン展開

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

+…

1)e(自然数)

f(x)＝e^xをマクローリン展開して、eの値を求めよ。

$f(0) = e^0 = 1$,

$f'(x) = e^x$, $f'(0)$ =1,…

eのマクローリン展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = 2.718281 \ldots$$

関数の展開

2）$f(x) = \sin x$を展開せよ

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

3）$f(x) = \cos x$を展開せよ

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

展開

4) f(x) $= tan^{-1}x$ を展開せよ

$$tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

そして$^{\pi}/_{4}$の値を求めよ。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

展開

5）$f(x) = sin^{-1}x$ を展開せよ

$$sin^{-1}x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

解析（距離の計算）

1）3点、$P_1(2,3)$,$P_2(5,7)$,$P_3(10,-3)$の三角形の各辺を求めよ。

$$l_1=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

$$l_2=\sqrt{(10-5)^2+(-3-7)^2}=\sqrt{25+100}=5\sqrt{5}$$

$$l_3=\sqrt{(2-10)^2+(3-(-3))^2}=\sqrt{64+36}=10$$

続

2）ある点はy軸上にあり、与点P(-5,-9)から15の距離にある。その点を求めよ。

$d^2 = [0-(-5)]^2 + [y-(-9)]^2 = 15^2$

$25 + y^2 + 18y + 81 - 225 = 0$

$y^2 + 18y - 119 = 0$

$$\therefore \text{その点}: x = 0, y = -9 \mp \sqrt{2}$$

直線

3）2点(-2,-3),(4,5)を通る直線を求めよ。

$$\mathrm{y}-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-(-3)=\frac{5-(-3)}{4-(-2)}(x-(-2)$$

$$y+3=\frac{8}{6}(x+2)=\frac{4}{3}(x+2)$$

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$$

距離（直線と点）

4)直線3x+4y=6と点（2,5）の最短距離を求めよ。

$3\mathrm{x}+4\mathrm{y}-6=0$において

距離d$=\dfrac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{3\times 2+4\times 5-6}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{20}{5}=4$

点と直線の距離dの証明

5）直線ℓ: $Ax + By + C = 0$ …(1)に対する点$P(x_1, y_1)$の最短距離dは

$d = \frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ で表される。これを証明せよ。

ℓは$y = (^{-A}/_{B})x - {}^{C}/_{B}$ で表せるので勾配は
$m = {}^{-A}/_{B}$であり、P_1と直線ℓまでの最短距離は
P_1からℓに直角な直線kなので、kの勾配は
$m_1 = {}^{B}/_{A}$となる。したがってkの式は

続き

$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$ または

$Bx - Ay + Ay_1 - Bx_1 = 0$ …(2)

kとℓの直線の交点Qは式(1)と(2)を解けば次のように求められる。

$$y = \frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2} \qquad x = \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} \quad (3)$$

距離(続き）PQ

$$d^2 = [\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2+B^2} - x_1]^2 +$$

$$[\frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2+B^2} - y_1]^2 = \frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2}$$

$$\therefore d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

円曲線の式

6)円$x^2+y^2-6x-18y+80=0$ の中心の座標と半径を求めよ。

$(x-3)^2$+$(y-9)^2$=10

円の中心(3,9),半径$\sqrt{10}$

5. 測量の問題

1）セオドライト（TS）、レベルの構造

2）器械誤差、測定法

3）光波測距儀の原理

4）座標系の計算原理、座標変換

5）後方交会、トラバース測量

6）測定誤差の影響

高さの計算

次の値を観測した。高さhを求めよ。

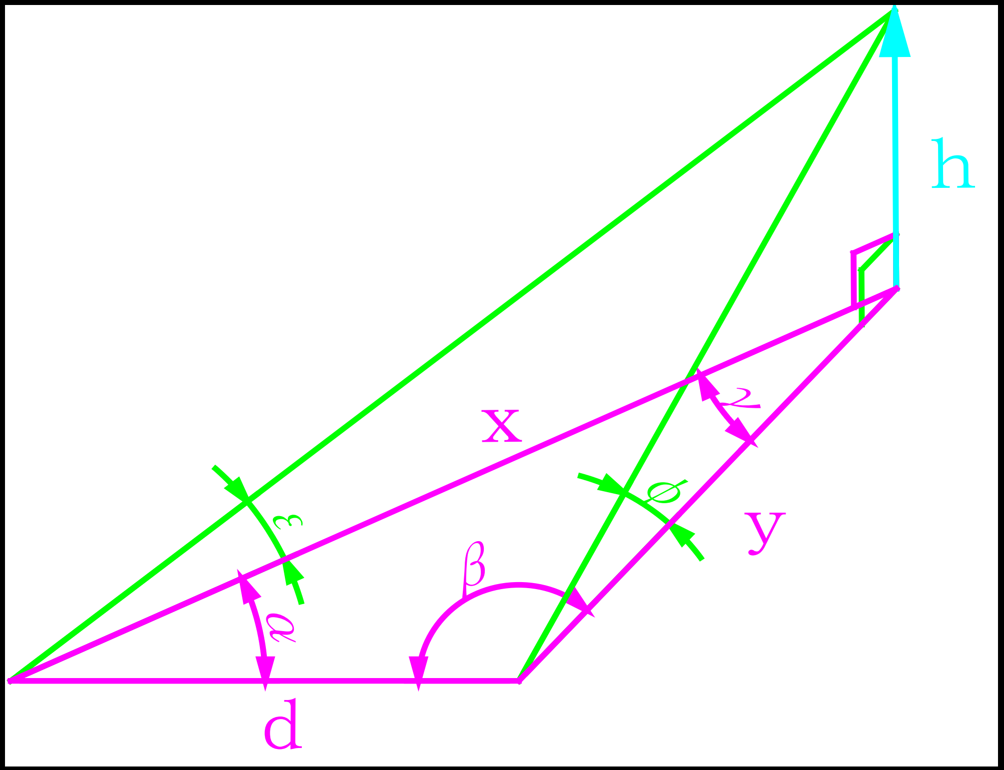
$d = 116m$

$\alpha = 51°$

$\beta = 47°$

$\epsilon = 4°10'$

$\varphi = 3°55'$



解答

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 82°$$

$$\frac{x}{sin\beta} = \frac{d}{sin\gamma} \rightarrow$$

$$x = d\,\frac{sin\beta}{sin\gamma} = 116 \times \frac{0.731}{0.990} = 85.65$$

$$h = xtan\varepsilon = 85.65 \times 0.073 = 6.25$$

$$\frac{y}{sin\alpha} = \frac{d}{sin\gamma} \rightarrow y = \frac{0.777}{0.990} \times 116 = 91.04$$

平均

$$h = y \cdot tan\varphi = 91.04 \times 0.068 = 6.19$$

2つのhの平均

$$h = \frac{1}{2}(6.25 + 6.19) = 6.22m$$

トラバース点Pの座標誤差（H27土）

6）三角点A、Bの座標は表14-1、夾角β1、β2は表14-2に示す。角度の精度は20″であり、距離は表14-3の通りTSで観測した。

TSでの距離の精度は

$\pm 5\mathrm{mm} \pm 5 \times 10^{-6} D$

とする。Dは測定距離。

点Pの座標の標準偏差を求めよ。

ρ＝2”$\times 10^5$とする。

表14-1	X座標（m）	Y座標（m）
既知点A	205	10
既知点B	20	195

表14-2	水平角
β1	345°
β2	120°

表14-3	距離
既知点A~TS点C	140m
TS点C~求点P	100m

方向角

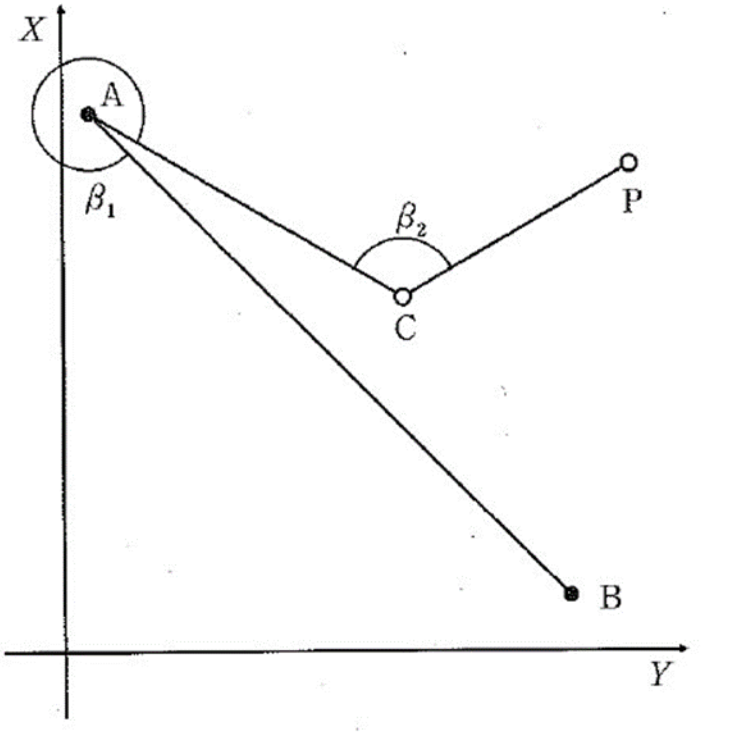


図14

$$\tan T_{AB} = \frac{195-10}{20-205}$$
$$= -1$$
$$T_{AB} = 180^o - 45^o$$
$$= 135^o$$
$$T_{AC} = T_1 = T_{AB} + \beta_1$$
$$= 120^o$$
$$T_2 = T_1 + \beta_2$$
$$= T_{AB} + \beta_1 + \beta_2$$
$$= 60^o$$

誤差式

$$x_P = x_A + S_1 \cos T_1 + S_2 \cos T_2$$

$$\Delta x_p = \frac{\partial x_p}{\partial S_1}\Delta S_1 + \frac{\partial x_p}{\partial S_2}\Delta S_2 + \frac{\partial x_p}{\partial \beta_1}\Delta \beta_1 + \frac{\partial x_p}{\partial \beta_2}\Delta \beta_2$$

$$= cosT_1 \Delta S_1 + cosT_2 \Delta S_2 - S_1 sinT_1 \Delta \beta_1$$

$$-S_2 sinT_2 \Delta \beta_1 - S_2 sinT_2 \Delta \beta_2$$

$$\Delta x_p = cosT_1 \Delta S_1 + cosT_2 \Delta S_2$$

$$-(S_1 sinT_1 + S_2 sinT_2)\Delta \beta_1 - S_2 sinT_2 \Delta \beta_2$$

分散・標準偏差xp

$$\Delta x_p = cosT_1\Delta S_1 + cosT_2\Delta S_2$$
$$-(S_1sinT_1 + S_2sinT_2)\Delta\beta_1 - S_2sinT_2\Delta\beta_2$$
$${M_{xp}}^2 = cos^2T_1{M_{s1}}^2 + cos^2T_2{M_{s2}}^2$$
$$+(S_1sinT_1 + S_2sinT_2)^2{M_{\beta 1}}^2 +$$
$${S_2}^2sin^2{T_2}^2{M_{\beta 2}}^2$$
$${M_{s1}}^2 = 5^2 + (5\times 10^{-6}1.4\times 10^5)^2 = 25.49$$
$$cos^2T_1{M_{s1}}^2 = (\frac{-1}{2})^2 5.049^2 = 6.3725$$

TSIによる距離誤差

$$cos^2 T_2 {M_{s2}}^2$$

$${M_{s2}}^2 = 5^2 + (5 \times 10^{-6} 1.0 \times 10^5)^2 = 25.25$$

$$cos^2 T_2 {M_{s2}}^2 = (\frac{1}{2})^2 5.025^2 = 6.3125$$

$$(S_1 sinT_1 + S_2 sinT_2)^2 {M_{\beta 1}}^2 +$$

$${S_2}^2 sin^2 {T_2}^2 {M_{\beta 2}}^2$$

$${M_{\beta 1}}^2 = {M_{\beta 2}}^2 = (\frac{20"}{2"10^5})^2 = 10^{-8}$$

座標誤差Mxp

$$(S_1 sinT_1 + S_2 sinT_2)^2 {M_{\beta 1}}^2 =$$

$$(1.4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.0 \times \frac{\sqrt{3}}{2})^2 10^{10} 10^{-8} = (1.2\sqrt{3})^2 10^2$$

$$= 432$$

$${S_2}^2 sin^2 {T_2}^2 {M_{\beta 2}}^2 = (1.0 \frac{\sqrt{3}}{2})^2 10^{10} 10^{-8}$$

$$= 0.75 \times 10^2 = 75$$

${M_{xp}}^2$ =6.3725+6.3125+432+75=519.685

$$M_{xp} = 22.8mm$$

yp

$$y_P = y_A + S_1 \, sin \, T_1 + S_2 \, sin \, T_2$$

$$\Delta y_p = \frac{\partial y_p}{\partial S_1}\Delta S_1 + \frac{\partial y_p}{\partial S_2}\Delta S_2 + \frac{\partial y_p}{\partial \beta_1}\Delta\beta_1 + \frac{\partial y_p}{\partial \beta_2}\Delta\beta_2$$

$$= sinT_1\Delta S_1 + sinT_2\Delta S_2 + S_1cosT_1\Delta\beta_1$$

$$+S_2cosT_2\Delta\beta_1 + S_2cosT_2\Delta\beta_2$$

$$\Delta y_p = sinT_1\Delta S_1 + sinT_2\Delta S_2$$

$$+(S_1cosT_1 + S_2cosT_2)\Delta\beta_1 + S_2cosT_2\Delta\beta_2$$

座標の誤差yp

$$M_{yp}{}^2 = sin^2T_1M_{s1}{}^2 + sin^2T_2M_{s2}{}^2$$
$$+(S_1cosT_1 + S_2cosT_2)^2M_{\beta1}{}^2 +$$

$$sin^2T_1M_{s1}{}^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2\times 25.49$$
$$= 19.1175S_2{}^2cos^2T_2{}^2M_{\beta2}{}^2$$

$$sin^2T_2M_{s2}{}^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2\times 6.3125 = 4.734375$$

ypの標準偏差

$$(S_1 cosT_1 + S_2 cosT_2)^2 {M_{\beta 1}}^2 =$$

$$(1.4\frac{-1}{2} + 1.0\frac{1}{2})^2 10^{10} 10^{-8} = 0.04 \times 100 = 4$$

$${S_2}^2 cos^2 {T_2}^2 {M_{\beta 2}}^2 = (1.0 \times \frac{1}{2})^2 10^{10} 10^{-8}$$

$$= 0.25 \times 100 = 25$$

$${M_{yp}}^2 = 19.1175 + 6.3125 + 4.734375 + 4 + 25$$

$$= 59.164375$$

$$M_{yp} = 7.7mm$$

7)２点の高低差の精度

2点の斜め距離D=2km,Dの距離誤差5cm、高低角 $\alpha = 3°$、αの測定誤差1'とすると、高低差の誤差はいくらか？

$h = Dsin\alpha$より

$$\Delta h = \frac{\partial h}{\partial D}\Delta D + \frac{\partial h}{\partial \alpha}\Delta\alpha$$

$$\Delta h = sin\alpha\Delta D + Dcos\alpha\Delta\alpha$$

$$\sigma h^2 = sin^2\alpha{\sigma_D}^2 + D^2cos^2\alpha{\sigma_\alpha}^2$$

$$= 0.0027 \times 0.0025 + 4 \cdot 10^6 \times 0.997 \cdot \frac{1^2}{1.18\times10^7} =$$
$$0.00000675 + 0.338 = 0.338$$

$$\therefore \sigma_H = 0.58m$$

（付録:歴史）解伏題之法（関孝和）

天和3年1683年

真虚第一（一番最初の問題）

I　直角三角形の三辺をa,b,c（a<b<c）とする。

$\sqrt{a}+c,\ a+b$ が与えられているとき、aはいくらか。

（コメント）$\sqrt{a}$+cを与えると、aは既知となってしまうので、この問題の目的は不明。しかし、$\sqrt{a}$を小数と仮定し、$\sqrt{a}+c$を与えた場合と考え、以下に解いてみます。

（最初の留意点）

1） a>b>cとした場合,求める式は二次方程式になります。

2） 本題はa<b<cなので,式は四次方程式になります。

前術　$\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{a}}+\mathrm{c}=\sqrt{\mathrm{x}}+\mathrm{c}, \rightarrow \mathrm{c}=\mathrm{A}-\sqrt{\mathrm{x}} \ldots$①

$\mathrm{B}=\mathrm{a}+\mathrm{b}=\mathrm{x}+\mathrm{b}, \rightarrow \mathrm{b}=\mathrm{B}-\mathrm{a}=\mathrm{B}-\mathrm{x} \ldots$②

$\mathrm{c}^2=\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2=\mathrm{x}^2+b^2 \ldots$③

(x=aとおいた。)

①、②を③に代入すると

$$x^2 + (B - x)^2 = (A - \sqrt{x})^2$$

$$x^2 + B^2 - 2Bx + x^2 = A^2 - 2A\sqrt{x} + x$$

$$2x^2 - A^2 + B^2 - 2Bx - x = -2A\sqrt{x}$$

$$(2x^2 - A^2 + B^2 - 2Bx - x)^2 = (-2A\sqrt{x})^2$$

$$4x^4 - 4A^2x^2 + 4B^2x^2 - 8Bx^2 - 4x^3$$
$$+A^4 - 2A^2B^2 + 4A^2Bx + 2A^2x$$
$$+B^4 - 4B^3x - 2B^2x$$
$$+x^2 = 4A^2x$$

$$4x^4 - 4(2B+1)x^3 + [1 - 4A^2 + 4B(2B+1)]\,x^2$$
$$+ 2[A^2(2B-1) - B^2(2B+1)]x$$
$$+ (A^2 - B^2)^2 = 0$$

(例)a=3,b=4,c=5と仮定して、上の方程式を解くと、4個出てくるが、正解はa=3である。

$$4x^4 - 60x^3 + \left(309 - 40\sqrt{3}\right)x^2$$
$$+ \left(-742 + 260\sqrt{3}\right)x + 741 - 420\sqrt{3} = 0$$

1)a>b>c（関の問題ではないが）

1）a>b>cを解いてみると

$A=\sqrt{a}+c=\sqrt{x}+c$, $c=A-\sqrt{x}$…①

$B=a+b=x+b$, $b=B-x$ …②

$a^2=b^2+c^2$, $x^2=(B-x)^2+(A-\sqrt{x})^2$ …③

$$x^2=B^2-2Bx+x^2+A^2-2A\sqrt{x}+x$$

$$2A\sqrt{x}=A^2+B^2-2Bx+x$$

$$(2B-1)^2x^2-2[A^2(2B+1)+B^2(2B-1)]x$$
$$+(A^2+B^2)^2=0$$

（例）$A=\sqrt{a}+c=\sqrt{x}+c=\sqrt{5}+3$

$B=a+c=x+c=8$とすると

$$289x^2-\left(3286+228\sqrt{5}\right)x+9205+1140\sqrt{5}$$
$$=0$$

$$\therefore x=a=5$$