ケプラー法則入門

0. はじめに

3年生の理系への進学を目的とする生徒のための「総合的な学習の時間」のプランとして，微分・積分を応用したニュートン力学の大きな成果であるケプラーの法則を高校生レベルで導き出すことを提案します.

普通，ケプラーの法則を導き出すことは微分方程式の解法やかなり微積分に熟達していることを前提としています．その意味で，ケプラーの法則を導き出すことは大学生の初年級の教材として適切であると考えられます．しかし，力学は解析学の多くの結果を道具として使い，非常に実際的で豊かな結果を得ることもできる非常に魅力的なテーマです．他方，この時期は大学入試を無視する訳にはいきません．そのためにもこのテーマは高校の数学の総復習としても適切であると考えます.

ここでは，微分方程式が高校の教材から無くなっていることや，なるべく複雑な計算をさせないこと等を考慮しながら，一応ニュートン力学からケプラー法則を高校の数学の範囲内で導き出す方法を提案します.

1. ケプラーの法則

ケプラーはチコ・ブラーエの残した膨大な観測記録を解析して，惑星運動に関する3つの法則を発見した (1619).

◇第1法則：惑星は太陽を1つの焦点とする楕円軌道を描く.

◇第2法則：惑星の面積速度はそれぞれに一定である.

◇第3法則：惑星の公転周期Tの2乗は楕円軌道の長半径の3乗に比例する.

2. 単振動の微分方程式

まず，次の問題から始めます.

> **問**　A，B，k を定数とする.
> 関数 $f(x)=A\cos kx+B\sin kx$ は，等式
> $$f''(x)+k^2f(x)=0 \qquad (2\text{-}1)$$
> を満たすことを示せ.

解答　略

さて，バネ振り子の方程式を導いてみます.

バネに錘をつるし引き下げると，釣り合いの位置からのずれに比例する求心力が働く．バネの質量をm，釣り合いの位置からの高さをy，求心力Fを$-ky$と表すと，運動の方程式は,

$$F=m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky \quad (k>0)$$

となります.

ここに，$\frac{d^2y}{dt^2}$ は加速度です.

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{m}y$$

これを改めて

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-cy \quad (c>0)$$

この方程式は等式 (2-1) 方程式です．その他，単振り子 (近似をすることにより) やLC直列回路 (コイルL，コンデンサー) も等式 (2-1) 方程式になります.

等式 (2-1) は単振動の微分方程式と呼ばれるもので，**問**から

$$f(x)=A\cos kx+B\sin kx \qquad (2\text{-}2)$$

が解になることがわかります.

逆に等式 (2-1) の解は (2-2) に限ることを示すことが難しいです.

そのために，まず,

$$f(x_0)=f'(x_0)=0 \qquad (2\text{-}3)$$

(初期条件と呼ばれる)を満たす解をもつことから始めます．与えられた等式(2-1)の両辺に$2f'(x)$をかけて

$$2f'(x)f''(x)+2k^2f(x)f'(x)=0$$

これを積分すると，

$$\{f'(x)\}^2+k^2\{f(x)\}^2=C$$

初期条件(2-3)から，

$$C=\{f'(x_0)\}^2+k^2\{f(x_0)\}^2=0$$

となるので

$$\{f'(x)\}^2+k^2\{f(x)\}^2=0$$

fは実数関数ですから，この方程式を満たす関数fは，定数関数 $f(x)=0$ に限ります．(背理法等で証明できます．)

次に，初期条件を一般化したとき，解が$f(x)=A\cos kx+B\sin kx$ に限ることを示します．関数fを微分方程式 $f''(x)+k^2f(x)=0$ の解とします．

$$A=f(0),\ B=\frac{f'(0)}{k},$$

$$g(x)=A\cos kx+B\sin kx-f(x)$$

とおくと，

$$g(0)=0,\ g'(0)=0,\ g''(x)+k^2g(x)=0$$

が成立するので，$g(x)=0$ です．したがって

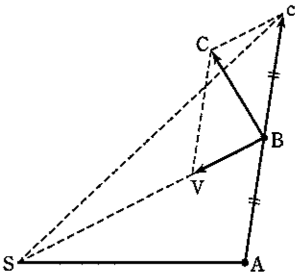
$$\boldsymbol{f(x)=A\cos kx+B\sin kx}$$

3. ケプラーの法則の導出

まず，惑星の軌道と太陽が同一平面上にあるという次の法則を示します．

① ケプラーの第0法則

ニュートンのプリンキピア(1687)より，次の証明を採用します．



一定の時間Δt内に惑星がAからBまで移動したとします．太陽(力の中心)Sに向かう向心力が働かなければ，次の同一時間Δt内には，Bからcに達します．(慣性の法則)

ここで　△SAB=△SBc

勿論，点S，A，B，cは同一平面上にあります．

ところで，Bにおいて働く向心力のために惑星はBSの方向の加速度を得て，BVだけ動くため，変位Bcと変位BVを合成したBCに達します．変位合成の規則によって Cc∥VB です．

したがって　△CSB=△cSB

ゆえに　△SBC=△SAB

以下同様な議論を続け，時間の幅Δtを限りなく0に近づけると面積速度一定の法則が導かれます．また，同時に，太陽と惑星の軌道が同じ平面上にあることが示されます．

備考　同様なことがらを解析的な方法で以下に示してみます．

太陽の位置Oを原点にとり，惑星の座標をP(x，y，z)，太陽の質量をM，惑星の質量をm，OPの長さをrとすると，惑星に働く太陽の引力の大きさは万有引力の法則より

$$\frac{GMm}{r^2}\ (G\text{は万有引力定数}) \tag{3-1}$$

であり，x，y，z方向の惑星の運動方程式はそれぞれ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{x}{r} \tag{3-2}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{y}{r} \tag{3-3}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{z}{r} \tag{3-4}$$

ここに，$\frac{x}{r}:\frac{y}{r}:\frac{z}{r}$ は方向比，すなわち

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{GM}{r^3}x \tag{3-5}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{GM}{r^3}y \tag{3-6}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{GM}{r^3}z \tag{3-7}$$

が得られます．

$y\times(3-5)-x\times(3-6)$ を作ると

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=0 \tag{3-8}$$

$$\left(y\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}\right)-\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}+x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=0 \tag{3-9}$$

したがって

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=c$$

を得ます．同様にして

$$z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}=a$$

$$x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}=b$$

したがって

$$\begin{aligned}&ax+by+cz\\&=xz\frac{dy}{dt}-xy\frac{dz}{dt}+xy\frac{dz}{dt}-yz\frac{dx}{dt}+yz\frac{dx}{dt}-xz\frac{dy}{dt}\\&=0\end{aligned}$$

この式から $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，$\overrightarrow{OP}=(x,\ y,\ z)$ で，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ となり

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{OP}$$

となります．このことから，2点O，Pは常に $\vec{n}$ に垂直な平面上にあることがわかります．したがって，惑星は太陽と同じ平面上にあり，同じ平面上を動きます．

上記の事実から原点(太陽)と惑星の描く軌道は同一平面上にあることがわかります．そこで，この平面を，改めて $x-y$ 平面に選ぶと，$z=0$ となり，以後すべて惑星の軌道を平面上で議論すればよいことになります．

$$\frac{dz}{dt}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=0$$

となります．すると式は

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{fM}{r^3}x & (1)\\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{-fM}{r^3}y & (2)\end{cases}$$

となり，(3-9)と同様にして，それから導かれた式は

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=c \qquad (3)$$

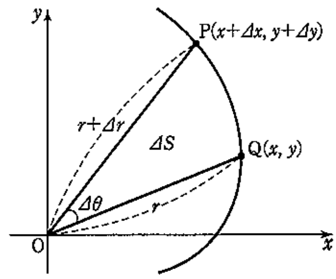
になります．

また，$x-y$ 平面上の軌道であるから $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおけます．

② ケプラーの第2法則(面積速度)

ニュートンのプリンキピア(1687)にある方法で証明済みですが，次の解析的な方法で証明してみましょう．

惑星の点 $P(x,\ y,\ 0)$ が Δt の時間の間に $P(x+\Delta t,\ y+\Delta t,\ 0)$ まで動いたとすると，動径OPが掃いた微少な面積 ΔS は直交座標と極座標で表すことができます．点Pの直交座標表示が $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ で，極座標表示が $(r+\Delta r,\ \theta+\Delta\theta)$，点Qの直交座標表示が $(x,\ y)$ で，極座標表示が $(r,\ \theta)$ です．



(a) 直交座標による表し方

$\Delta S\cong\triangle OPQ$ の面積を考えて計算します．

$$\Delta S\cong\frac{1}{2}(x\Delta y-y\Delta x)$$

この両辺を Δt で割って

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}\cong\frac{1}{2}\left(x\frac{\Delta y}{\Delta t}-y\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

ここで，$\Delta t\to 0$ とすると

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

となります．これはいまの惑星では(3)式より $-\dfrac{c}{2}$ となって，一定であることがわかり，これを V とします．

すなわち

$$\frac{dS}{dt}=V\quad(一定)\qquad(*)$$

(b) 極座標による表し方

いま，区間 $[t,\ t+\Delta t]$ における $r(t)$ の最大値を R，最小値を R' とすれば，POQの面積 ΔS は次の不等式を満たします．

$$\frac{1}{2}R'^2\Delta\theta\leqq\Delta S\leqq\frac{1}{2}R^2\Delta\theta \qquad (3\text{-}10)$$

$$\frac{1}{2}R'^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\leqq\frac{\Delta S}{\Delta t}\leqq\frac{1}{2}R^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ここで，

$$\Delta t\to 0 \text{ のとき } R\to r(t),\ R'\to r(t)$$

であるから，面積の変化率すなわち面積速度は

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\qquad(**)$$

となります．

ところで面積速度は一定，すなわち $(*)$ より

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=V\quad(一定)\qquad(***)$$

備考　いまの事実を解析的な方法で証明してみましょう．

まず，$xy'-yx'$ を t で微分して変化率を調べると，(1)，(2)式よりこれが 0 であることがわかります．したがって，$xy'-yx'$ は定数です．次にこの式と面積速度の関係を示します．実際，

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

を t で微分すれば，

$$x'=r'\cos\theta-r\theta'\sin\theta$$
$$y'=r'\sin\theta+r\theta'\cos\theta$$

となるから，

$$\begin{aligned}xy'-yx'&=rr'\sin\theta\cos\theta+r^2\theta'\cos^2\theta\\&\quad-rr'\cos\theta\sin\theta+r^2\theta'\sin^2\theta\\&=r^2\theta'\end{aligned}$$

となり，面積速度の 2 倍となります．

③　ケプラーの第 1 法則（楕円軌道）

$2\dfrac{dx}{dt}\times(1)+2\dfrac{dy}{dt}\times(2)$ を作ると

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{fM}{r^3}\left(2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=-\frac{fM}{r^3}\cdot\frac{d}{dt}(x^2+y^2)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=-\frac{fM}{r^3}\cdot\frac{d}{dt}(r^2)$$

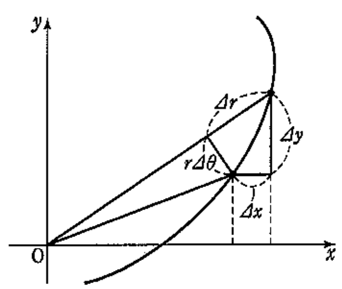
$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=-\frac{fM}{r^3}\cdot 2r\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=-\frac{2fM}{r^2}\cdot\frac{dr}{dt}$$

両辺を時間 t で積分して

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2fM\cdot\frac{1}{r}+C$$

を得ます。ここに C は積分定数



ところで，上記の図より

$$(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\cong(\Delta r)^2+(r\Delta\theta)^2$$

が成り立ち，両辺を $(\Delta t)^2$ で割り，$\Delta t\to 0$ とすると

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

となりますから，

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2fM}{r}+C\quad(****)$$

ところで，(＊＊＊) より

$$r\frac{d\theta}{dt}=\frac{2V}{r}$$

これを代入して，

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{2V}{r}\right)^2=\frac{2fM}{r}+C$$

上式を変形して

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{2V}{r}-\frac{fM}{2V}\right)^2=C+\frac{f^2M^2}{4V^2}$$

右辺は任意定数で 0 以上であるから A^2 とおけます．また，

$$\frac{fM}{2V}-\frac{2V}{r}=u$$

と新しい変数におきかえると

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+u^2=A^2$$

となります．

いま，必要としているのは惑星の軌道ですから，パラメータ（時間 t）を消去する必要があります．そこで，

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

ところで

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{2V}{r^2}$$

でしたから

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{2V}{r^2}=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{2V}{r}\right)$$

したがって

$$\frac{dr}{dt}=\frac{du}{d\theta}$$

となり

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=A^2$$

上の式の両辺を θ で微分して，整理すると

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=0$$

となり，これは単振動の微分方程式です．したがって，$u=A\cos\theta$ を解にもつことがわかります．ここで，元の変数に戻せば，

$$\frac{fM}{2V}-\frac{2V}{r}=A\cos\theta$$

となり，rについて解けば

$$r=\frac{2V}{\frac{fM}{2V}-A\cos\theta}=\frac{\frac{4V^2}{fM}}{1-\frac{2VA}{fM}\cos\theta}$$

ここで，Aは任意定数ですから

$$e=-\frac{2VA}{fM}$$

とおくと

$$r=\frac{\frac{4V^2}{fM}}{1+e\cos\theta}$$

となります．

④ ケプラーの第3法則（公転周期）

惑星の公転周期Tは惑星の描く楕円の面積πabを動径が単位時間に掃く面積，すなわち面積速度Vで割れば求められます．

$$T=\frac{\pi ab}{V} \tag{3-11}$$

(3-11)式をさらに計算するには，楕円の極方程式と直交座標との関係式が必要です．

> 問　極座標で表された2点$P_1(r_1,\ \theta_1)$, $P_2(r_2,\ \theta_2)$の2点間の距離は
>
> $$P_1P_2=\sqrt{r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)} \tag{3-12}$$
>
> であることを証明せよ．

解答　略

(3-12)式を使って楕円の極方程式を導くことにします．楕円の2つの焦点の座標を直交座標で$F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$とします．また，楕円の定義，すなわち，2つの焦点F, F′からの距離r, r'の和が一定な点Pの軌跡を考えます．これを

$$r+r'=2a \tag{3-13}$$

と書く．2つの焦点間の距離 $FF'=2c$ であるから，極座標で2点$P(r,\ \phi)$, $F'(2c,\ \pi)$となります．

(3-13)と(3-12)より，

$$\begin{aligned} r'&=2a-r\\ &=\sqrt{r^2+(2c)^2-2\cdot2c\cdot r\cos(\pi-\phi)}\\ &=\sqrt{r^2+(2c)^2+4cr\cos\phi} \end{aligned} \tag{3-14}$$

(3-14)の $2a-r=\sqrt{r^2+(2c)^2+4cr\cos\phi}$ を2乗して，

$$b=\sqrt{a^2-c^2},\ \ l=\frac{b^2}{a},\ \ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{3-15}$$

とおけば楕円の極方程式

$$r=\frac{l}{1+\varepsilon\cos\phi} \tag{3-16}$$

が導き出されます．そこで，(3-11)にたち帰って，(3-15)を用いて，

$$b=a\sqrt{1-\varepsilon^2}=\sqrt{al},\ \ V=\frac{\sqrt{GMl}}{2} \tag{3-17}$$

に注意すれば，公転周期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{3-18}$$

となります．したがって

$$T^2\propto a^3 \tag{3-19}$$

であり，これはケプラーの第3法則を表しています．

<シミュレーション１>

３年生の補習・実習形式

テーマ（微積分学への道）

１学期	４月　古代の宇宙感（天動説）について調べる． ５月　中世からルネッサンスの宇宙感について調べる．（コペルニクス，ガリレオの考えたこと（地動説）） ６月　中世の数学の教師であるケプラーが発見した，ケプラーの法則について調べ，これをパソコン等で実験してみる． ７月　１学期で調べたことをまとめて各自報告する．	社会科，物理の教科書等を参照する． 教科「情報」の教科書を利用する．
２学期	９月　微積分の創始者であるニュートンの考えたことを調べる． 10月　ニュートン力学を先生のサポートを受けながら微分積分を使って学習する．（各自や高校生対象の易しい本で）（１回目） 11月　ニュートン力学を先生のサポートを受けながら学習する．（各自易しい本で）（２回目） 12月　微分方程式（変数分離型を中心に）を先生から学習する．	数学Ⅲ，数学Ｃの内容の復習と発展，受験数学，受験物理の参考書も参照する．
３学期	１月　物理等で活躍する数学をまとめて報告する．	微積分，数学Ｃの内容が大学で力学を勉強するために必要であることを認識する．