漸化式の特殊解と一般解

次のよくある漸化式でてみよう。
＜問＞
　次の関係を満たす数列$\{a_n\}$を求めよ。

$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n + 1}$　　・・・・①

$\boldsymbol{a_1 = 1}$　　・・・・②

高校の数学では、①が漸化式、②を初項と呼ぶ。高校数学では①を方程式とみていないから、方程式を解くという言葉は適切ではない。
ところで、差分方程式（広くは関数方程式である）から視ると
①　は差分方程式で、②は初期条件である。
数学的な構造は微分方程式の場合と同様である。
また、①に対して、次の方程式（漸化式）を考える。

$\boldsymbol{a_{n+1} = 2a_n}$　　・・・・③

②　式を**同次方程式**と呼ぶ、
これに対して、
①を**非同次方程式**と呼ぶ
今後、③式を区別するために次のように置き変えておく。

$\boldsymbol{b_{n+1} = 2b_n}$　　・・・・④

● **一般解とは**
　任意（何でもよい）の初期条件（ここでは初項）をもった解である。
③　の一般解は、公比２の等比数列であるから、等比数列の一般公の公式から
　　$b_n = b_1 2^{n-1}$　・・・・⑤
ここに、b_1は任意の定数である。
この　b_1　が初項であり、差分方程式での初期条件に相当する。この初期条件

を指定したものが特殊解である。
次に改めて、①の特殊解を考えてみよう。

● **特殊解とは**

方程式①の解（特集解）を初期条件（初項）②とは関係なく探してみよう。未定係数法で、定数解を探してみよう。そこで、その解を$a_n = k$ （定数）としてみよう。すると次の１次方程式を得る。

$k = 2k + 1$ ・・・・・・⑥

を得る。⑥を解いて

$$k = -1$$

を得る。

①の特殊解は

$$\boldsymbol{a_n = -1}$$

である。
実は⑥式が受験参考書でいうところの特性方程式であつた訳である。

●①式においての特殊解と一般解との関係

いま①の解（一般解）を$\boldsymbol{c_n}$ 次のようにおくと①式を満たしていることを以下のように確かめることができる。

$\boldsymbol{c_n = a_n + b_n}$ ・・・・⑦

とく。ここに、$\boldsymbol{a_n}$は①の解（特殊解）、$\boldsymbol{b_n}$は④の解（一般解）である。
それでは、これを①に代入して確かめてみよう。

① の右辺 $= \boldsymbol{2(a_n + b_n) + 1}$

$= \boldsymbol{(2a_n + 1) + 2b_n}$

$= \boldsymbol{a_{n+1} + b_{n+1}}$

$= \boldsymbol{c_{n+1}}$

=①の左辺

一般に、線形の関数方程式について

非同次方程式の一般解＝

非同次方程式の特殊解＋同次方程式の一般解

の関係が成り立つ。

そこで、これを利用して次の漸化式を解いてみよう（高校ではこの言葉はよくない、方程式とみていないのだから、以下の関係を満たす数列の一般項を求めよ。となる)。

$a_{n+1}=2a_n+n$　　・・・・③

$a_1=1$　　・・・・④

●

まず、③の特殊解を一つ見つける。

② 式の最後の項がnだから、a_nは１次式で置くのがよい。そこで、

$a_n=ln+m$　　・・・・⑤

とおき、未定係数法 （l,mを未知数とする） を用いるのである。すなわち、⑤式を③に代入して　$l(n+1)+m=2(ln+m)+\mathrm{n}$ を得る。nについて整理して

$$ln+l+m=(2l+1)m+2m$$

を得る。したがって、

$l=2l+1$　,　$l+m=2m$　・・・・・⑥

⑥式を解いて、　$l=m=-1$

よって、漸化式③の特殊解は　$a_n=-n-1$　・・・・・⑦

なお、⑦は明に④を満たさない。だが、それでよい。

●

次に、漸化式①の一般解を求める。③に対応する同次方程式は

・・・・⑧

である。この一般解は

$b_n=b_1 2^{n-1}$　・・・・⑤

●

最後に、非同次方程式の一般解＝非同次方程式の特殊解＋同次方程式の一般解により

$a_n=-n-1+k2^{n-1}$　ここに ,k　は任意定数である。これは初項④から定めることができる。

$a_1=-1-1+k\,2^{1-1}$=1　より　$k=2$ 、

よって、

$a_n=-n-1+2^n$　　＜答え＞