

# 漸化式の特解と一般解

次のよくある漸化式でてみよう。

<問>

次の関係を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$a_1 = 1 \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

高校の数学では、①が漸化式、②を初項と呼ぶ。高校数学では①を方程式とみていないから、方程式を解くという言葉は適切ではない。

ところで、差分方程式（広くは関数方程式である）から視ると

① は差分方程式で、②は初期条件である。

数学的な構造は微分方程式の場合と同様である。

また、①に対して、次の方程式（漸化式）を考える。

$$a_{n+1} = 2a_n \quad \dots \quad \textcircled{3}$$

② 式を同次方程式と呼ぶ、これに対して、

①を非同次方程式と呼ぶ

今後、③式を区別するために次のように置き変えておく。

$$b_{n+1} = 2b_n \quad \dots \quad \textcircled{4}$$

## ● 一般解とは

任意（何でもよい）の初期条件（ここでは初項）をもった解である。

③ の一般解は、公比 2 の等比数列であるから、等比数列の一般公の公式から

$$b_n = b_1 2^{n-1} \quad \dots \quad \textcircled{5}$$

ここに、 $b_1$ は任意の定数である。

この  $b_1$  が初項であり、差分方程式での初期条件に相当する。この初期条件を指定したものが特殊解である。次に改めて、①の特殊解を考えてみよう。

## ● 特殊解とは

方程式①の解（特集解）を初期条件（初項）②とは関係なく探してみよう。未定係数法で、定数解を探してみよう。そこで、その解を $a_n = k$ （定数）としてみよう。すると次の1次方程式を得る。

$$k = 2k + 1 \quad \dots \quad \textcircled{6}$$

を得る。⑥を解いて

$$k = -1$$

を得る。

①の特殊解は

$$a_n = -1$$

である。

実は⑥式が受験参考書でいうところの特性方程式であつた訳である。

●①式においての特殊解と一般解との関係

いま①の解（一般解）を $c_n$  次のようにおくと①式を満たしていることを以下のように確かめることができる。

$$c_n = a_n + b_n \quad \cdots \cdots ⑦$$

とく。ここに、 $a_n$ は①の解（特殊解）、 $b_n$ は④の解（一般解）である。

それでは、これを①に代入して確かめてみよう。

$$\begin{aligned} \text{① の右辺} &= 2(a_n + b_n) + 1 \\ &= (2a_n + 1) + 2b_n \\ &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= c_{n+1} \\ &= \text{①の左辺} \end{aligned}$$

一般に、線形関数方程式について

非同次方程式の一般解＝非同次方程式の特殊解＋同次方程式の一般解

の関係が成り立つ。