＜数の不思議！？＞

―数をかぞえてみる―

Ⅰ、数の体系

- 複素数
  - 実数
    - 有理数
      - 整数
        - 自然数
        - ０
        - 負の整数
      - 分数
    - 無理数
  - 純虚数

◎　有理数は？
分数の形に書ける数のこと、正確には
「　a と b（ただし b は 0 でない）を２つの整数として　$\frac{a}{b}$ という比(ratio)の形に書ける数」
英語では,ratio-nal　な数、　すなわち　rational number　とよばれている。

Ⅱ、集合について

われわれ、ある特定の性質をそなえた対象の集まり、例えば、
太郎、次郎、三郎、四郎という 4 人の男の子の集まり、
東京都内にある交番の集まり
１から 10 までの自然数の集まり
特定の線分上の点の集まり
などを考えることがある。
　このように、勝手なものをとってきたときに、それがその対象集まりに属するかどうかを定めることができるような、はっきりした基準の与えられている、そういう対象の集まりを集合とよび、その集合を構成している個々の対象を、その集合の要素という。

　これからお話する集合論は、主として無限の多くの物の集まりを論ずる数学の一分野であるが、ハレル大学教授のヴオルグ･カントール (Georg Cantor 1848～1918) の創始によるものである。

　さて、話をもとに戻そう。いま、
１から 10 までの自然数の集まり
といえば、それは、はっきりと１つの集合を定義したことになる。なぜならば、たとえば７という数をとったとすれば、この数はこの集合に属し、100 という数という数をとったとすれば、この数はこの集合に属さないと、はっきりと断言しうるからである。また、また

すべての自然数の集まり

といえば、これもはっきり１つの集合を定義したこになる。なぜならたとえば 100 という数をとったとすれば、この数はこの集まりに属し、－３という数をとったとすれば、この数はこの集まりに属さないと、はっきりと断言しうるからである。

＜有限集合＞
この
１から１０までの自然数の集合
のように、有限個の要素をすべて書き上げて、
{1,２,３,４,５,６,７,８,９,10}
のようにすることことがある。

＜無限集合＞
また、
すべての自然数の集合
のように、無限個の要素から成り立って集合を、無限集合という。無限集合を表すには、その要素をすべて書き上げることはできないから、たとえば、
{1,２,３,４,５ ６,・・・・・・}
のようにする。
　さて、これから先、１つも要素を含まないものも集合と考えたほうが便利であるので、そのような集合空集合と呼ぶこととする。
　いまここに２つの集合ＡとＢがまったく同一の要素を含んでいるならば、われわれは２つの集合は等しいといって
A=B
とかく。
　このように、われわれは２つの集合が相等しいというときには、われわれはそれらの要素の順序は問題としない。たとえば、集合
{太郎、次郎、三郎、四郎}
と、集合
{三郎、次郎、四郎、次郎}
とは、等しい。

Ⅲ、同　等　（無限集合の要素の個数が等しいとは）

２つの集合、すなわち４人の男の子の集合
A　＝{太郎、次郎う、三郎、四郎}
と４人の女の子の集合、
B　＝{春子、夏子、秋子、冬子}
とを考えよう。これらは２つの集合は、けっして相等しい集合ではない。しかしながら、これらの２つの集合は、両方とも４個の要素をもっている、という共通の性質をもっている。そして、たとえば、
太郎⇔春子
次郎⇔夏子

三郎⇔秋子
四郎⇔冬子
という具合に、Aの１つの要素にはBの唯１つの要素が対応し、Bの１つの要素にはAの唯１つの要素が対応するように、２つの集合の要素の間に対応をつけることができる。

◎　無限集合について

さらに、１つの集合、すなわち、すべての自然数の集合

M＝｛1, 2, 3, 4, 5, 6,・・・・・｝

と、すべての正の偶数の集合

N＝｛2, 4, 6, 8, 10, 12,・・・・・｝

とを考えよう。これらの２つの集合は、いずれも無限集合であるから、これらの集合の要素の個数の数を考えることはできない。しかしながら、

1⇔2
2⇔4
3⇔6
4⇔8
5⇔10
・　・
・　・
・　・
・　・
・　・
$n \Leftrightarrow 2n$
・　・
・　・
・　・

という具合に、２つの集合MとNの要素の間に対応をつけて、その対応でMの１つの要素にNの唯一つの要素が対応し、Nの１つの要素にはMの唯１つ要素が対応することができる。

このような、２つの集合間の対応をわれわれは、**１対１の対応**とよんで、１対１の対応におきうるような２つの集合は、互いに同値であるという。そして、集合AとBとが同等であることを表すのに、

A⇔B

という記号を用いることにする。

＜部分集合＞

さて、集合Aと集合Bがあるとき、Bの要素はすべてAの要素でだれば、集合Bは集合Aの**部分集合**である。または集合Bは集合Aに**含まれる。**または集合Aは集合Bを**含む**といって、このことを、

B⊆A

または

A⊇B

で書き表す。

たとえば、

A＝｛太郎、次郎、三郎、四郎｝
B＝｛太郎、次郎、三郎｝

とすれば

A⊇B

である。

上の例が示しているよに、１つの有限集合Aとその部分集合Bとはけっして同等になることはない。

しかしながら、１つの無限集合Aと、その部分集合とは、同等になることがある。

たとえば、

A＝｛1, 2, 3, 4, 5, 6,・・・・・｝

B＝｛2, 4, 6, 8, 10, 12,・・・・・｝

とおけば、Bの要素はすべてAの要素であり、Bの要素でないAの要素が1が存在するから、集合Bは集合Aの部分集合である。すなわち

A⊇B

である。

ところが、前にものべたように、

1⇔2
2⇔4
3⇔6
4⇔8
5⇔10
・　・
・　・
・　・
・　・
・　・
$n \Leftrightarrow 2n$
・　・
・　・

とすれば、集合Aの要素と集合Bの要素の間には完全な１対１の対応をつけうるであるから、AとBは同等、すなわち

A⇔B

である。

すなわち、この例においては、

A⊇B　であるにもかかわらず、　A⇔B　である。

<u>有限集合の場合には、全体は部分より大きいという常識があてはまるが、無限集合の場合には、全体は部分より大きいという常識がかなずしもあてはまらないことを上の例は示している</u>。

Ⅲ、可付番集合（かふばんしゅうごう）

　無限集合のうちで、われわれに最もなじみの深いものといえば、おそらく、自然数全体の集合

｛１,２,３,４,５,６,・・・・・｝

であろう。

　いま、この自然集合の集合と１対１のおきうる集合、すなわち自然数全体の集合と同等な集合Ａを考えよう。この場合、１に対応するＡの要素をa_1、２に対応するＡの要素をa_2、３に対応するＡの要素をa_3、・・・・とすれば、集合Ａを

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots \}$$

と書くことができる。すなわち集合Ａの要素全体に、１番、２番、３番、・・・・ともれなく番号をつけることができる。

　この意味で、自然数全体の集合と同等な集合のことを可付番集合という。

　前に述べたように、正の偶数の全体の集合

｛２,４,６,８,10,12,・・・・・｝

は

２⇔１
４⇔２
６⇔３
８⇔４
・　・
・　・
・　・
・　・
$2n \Leftrightarrow n$
・　・
・　・
・　・
・　・

と、自然数全体との集合と１対１の対応をつけることができるから、可付番集合である。

　同様に、正の奇数の全体の集合

｛１,３,５,７,９,・・・・・・｝

も

１⇔１
３⇔２
５⇔３
７⇔４
・　・
・　・
・　・
・　・
$2n-1 \Leftrightarrow n$
・　・

と、自然数全体との集合と１対１の対応をつけることができるから、可付番集合である。

さらに、負の整数の集合

｛－１,－２,－３,－４,・・・・・｝

は、明らかに１つの可付番集合である。

また、正、０、負の整数の集まり

｛・・・・・・・－３，－２，－１，０，１，２，３,・・・・・・・・｝

もまた，１つの可付番集合である。

問、上にの述べたことがらを証明してみよう。

＜有理数全体の集合は可付番であることの証明＞

　ここに、有理数というのは、mを１つの整数、nを０でない他の整数とするとき、

$$\frac{m}{n}$$

の形にかける数のことである。

問、上にの述べたことがらを証明してみよう。

＊　発展　＊

カントール（Cantor）の定理

０と１の間のすべての実数の集合は可付番集合でない。