高校生のためのポートフォリオ選択理論

　近年、「金融工学」あるいはファイナンス理論に関する関心が高まってきているように見える。特に、ブラックとショールズのオプション理論（数学的には確率微分方程式の応用）によるノーベル経済学賞以来である。でもこれはここでは取り扱わない。不勉強のせいか、少なくも著者には難しいからである。この理論の前に、マルコビィッツらによる投資戦略において２個以上の資産へのリスク分散の理論（ポートフォリオ選択）が存在していた。この理論は現指導要領の範囲で、工夫次第で高校程度の確率、統計の知識があれば理解させせることができると考えるからである。

西洋の格言に「ひとつのかごにすべての卵を盛るな」があります。これは、たくさんの卵を運ぶ時に、一つのかごのにすべての卵をいれて運べば、もし、転んでり、かごを落としてしまえば、すべての卵が割れてしまう危険がありますが、いくつかのかごに分けて運べば、一つのかごを落としても、割れてしまう卵は数分の一ですむという話から、お金を運用する時も、一つのリスクですべての財産を失わないよう、いくつかのリスクに分けなさいという教訓です。

リスクの分散には、**運用対象の分散**、時間の分散、地域の分散、金融機関の分散などがあります。ここで、問題にするのは運用対象の分散ですが、これは同じ種類のリスクのリスクのある商品ばかり持たないようにするということです。例えば、価格変動リスクのある株だけで運用するのではなく、価格変動のない預金や、株価と値動きの全く違う債権などを色々な種類の商品に分けて持ったり、株を買う場合でも、○○会社の株だけ買うとか、自動車会社の株だけを買うのではなく、銘柄や業種を分けて買ったほうが、値下がりリスクを和らげることができます。**「分散投資」**は、古くから知られていたリスク回避の方法です。これは現代においても、重要な手法です。

シェイクスピアの『ヴェニスの商人』の主人公アントニは、次のように語っている。

「僕の投資は、一つの船に集中しているわけではない。取引先も一か所ではない。全財産が商いの運不運に左右されるわけではない。だから、船荷のことで悲しい思いをすることはない」（第一第一場）

アントニが述べていることは、当時のベェネツィア貿易商の一般的な行動原理であった。これは、「**事業をさまざまな分野に分散する**」ということだ。彼らは、異なるタイプのいくつかの事業に関し、これによって、航海や取引のリスク分散をはかったのでした。

この原理は、投資戦略としても重要である。つまり、資産を一つの対象に集中せず、さまざまな対象に分散すべしというわけだ。これは「分散投資の原理」と呼ばれます。

分散投資の基本原理は、「同じようには変動しない投資対象（独立な投資対象）を、多数集める」ということだ。こうすると、リスクが小さくなるのである。以下では、アントニオの分散投資がなぜ機能するかを、具体的な数値例で、確かめて」みよう。

単純化のため、アントニは２隻の船を持っているものとしょう。そして、１隻が無事に寄港すれば、１単位の収入をもたらすものとする。

　アントニオが取りうる第一の戦略は、２隻とも地中海で運用することだ。地中海で嵐が起る確率確率が１／２であるとしょう。嵐が起らなければ ２ 隻とも帰港する。しかし、嵐が起れば２隻とも沈む。したがって、２隻とも帰港して収入が２になる確率は、１／２だ。嵐が起って２隻が沈没し、収入がゼロになる確率も２／１です。以下の表のようになる。

戦略①:2 隻とも地中海

状態	確率	収入
1（2 隻帰港）	1/2	2
2（2 隻沈没）	1/2	0
期待収入		1

これにたいして第二の戦略は地中海と大西洋に 1 隻ずつ運用することだ。地中海の天候と大西洋の天候は独立であるとすれば、以下の表のようになる。

戦略②：地中海と大西洋に1隻ずつ

状態	確率	収入
1（2 隻帰港）	1/4	2
2（地中海から帰港）	1/4	1
3（大西洋から帰港）	1/4	1
4（全部沈没）	1/4	0
期待収入		1

＊統計にかんするもの（新指導要領数学Ｂから）：

●代表値

① 平均値（mean, average）（算術平均）

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

② 中央値（median）

観測資料を値の大きさの順に並べるとき、ちょうど中央にくる値

③ その他の代表値

最大値、最小値

● データの散らばり

① 範囲

最大値と最小値との差

② <u>分散、標準偏差</u>

変量の値を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とし、その平均を $\bar{x}$ とするとき、各 x_i と平均 $\bar{x}$ との差

$$x_i-\bar{x}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

偏差という。

偏差には正の値も負の値もあり、それらの値は 0 である。そこで、偏差を 2 乗してそれらの平均をとる。

この値を<u>分散</u>という。

分散を s^2 で表すと、次のようになる

$$s^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$$

分散の平方根を標準偏差という。

資料の標準偏差 s は次のようになる。

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}$$

● 度数分布表

階級値 x	度数 f
x_1	f_1
x_2	f_2
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
x_r	f_r
計	n

総度数　$n = f_1 + f_2 + \cdots + f_r$

平均　$\bar{x} = \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_r f_r}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{r} x_k f_k$

標準偏差　$s = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}(x_k - \bar{x})^2 f_k}$

● 変換（１次式）　$x = au + b$　のとき

平均　$\bar{x} = a\bar{u} + b$　、ここに $\bar{u}$ は u の平均

（x の標準偏差）＝$|a|$ ×（u の標準偏差）

● 共分散

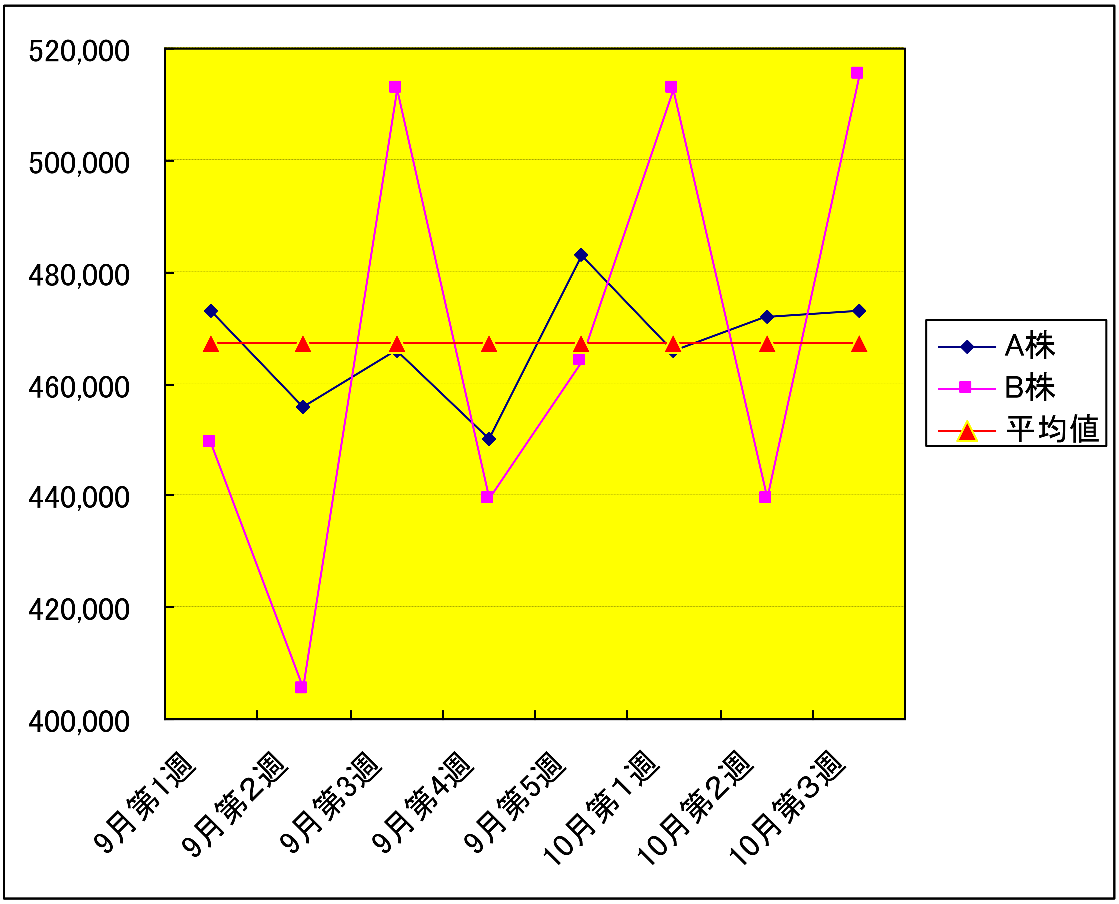
$$c_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - \overline{xy}$$

● 相関係数

$$r = \frac{c_{xy}}{s_x s_y} = \frac{1}{s_x s_y}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - \overline{xy}\right\}$$

●標準偏差活用

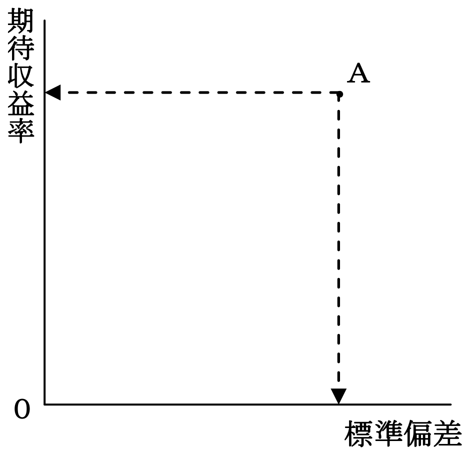
	A 株	B 株	平均値
9 月第 1 週	473,000	449,339	467,375
9 月第2週	456,000	405,382	467,375
9 月第 3 週	466,000	512,832	467,375
9 月第 4 週	450,000	439,571	467,375
9 月第 5 週	483,000	463,991	467,375
10 月第1週	466,000	512,832	467,375
10 月第2週	472,000	439,571	467,375
10 月第3週	473,000	515,483	467,375
平均値	467,375	467,375	
標準偏差値	10,446	41,701	


520,000
500,000
480,000
460,000
440,000
420,000
400,000
9月第1週
9月第2週
9月第3週
9月第4週
9月第5週
10月第1週
10月第2週
10月第3週
A株
B株
平均値

１９５２年にハリー・マーコヴィッツは、市場リスクを株式などの資産価格の収益率のぶれ具合に関連づけました。株価収益率が大きく変動する（標準偏差が大きい）ことは、その株価への投資は大きく儲けられる反面、大きく損をする可能性もあるという事です。これを市場リスクと考えたのです。さらにマーコヴィッツは、分散投資によってポートフォリオ（投資資産の組み合わせ）つくれば、一銘柄に投資するよりも市場リスクを減らせることを発見しました。このことについて、直感的に整理しておきましょう。

ここにＡ株、Ｂ株という２種類の株式があるとします。Ａ株、Ｂ株はそれぞれＡ株式会社、Ｂ株式会社が発行したものです。それぞれの会社は、どのような創立者が建てたのか、どのような社員がいるのか、どのようなビジネスを展開しているのか、またどのような社会貢献をおこなっているのかなど、それぞれ特徴をもっています。ところが株式投資という視点から眺めてみた場合、会社の特徴を２つの指標のみで表現することができます。株式の２つの特徴とは「期待収益率（縦軸）」と「標準偏差＝市場リスク（横軸）」です。右図で、Ａ株は、期待収益率は高リスク（標準偏差）も大きい株と言えます。

Ａ株の標準偏差と
期待収益率



次の図ではＢ株は、Ａ株に比べて期待収益率は低いが、リスク（標準偏差）は小さい株です。

いまここに潤沢な投資資金があってＡ株とＢ株の２銘柄に投資できると考えてください。すなわち分散投資をして、「Ａ株とＢ株を組み合わせたポートフォリオ」を作ります。このポートフォリオの特性はＡ株とＢ株の関係（相関）によって変わっていきます。その関係は次の表に書かれているように大きく３種類に分けることができます。

Ｂ株の標準偏差と
期待収益率

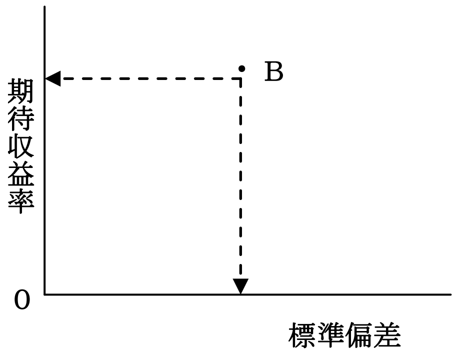


表　２つの株式の関係

	状態	備考
①	完全相関	２つの資産の 収益率は同じ動き （同業種のようなもの）
②	完全逆相関	輸出産業と 輸入産業のような 完全逆業種
③	①と②の中間	どちらでも ないもの

「期待値」の用語を数学的に用いて、離散形の場合

確率変数の値 x ×その確率 $f(x)$

の和を $\mathrm{E}(x)$ と記し，Ｘの確率論的期待値といい、次の式で表す。

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x} x f(x)$$

Ｘ，Ｙを確率変数とするとき、その期待値をＥ(Ｘ)とすると次の性質をもつ。

(i)　$\mathrm{E}(\mathrm{X}+c)=\mathrm{E}(\mathrm{X})+c$　　（a,b,c は定数，以下同じ）

(ii)　$\mathrm{E}(c\mathrm{X}) = c\mathrm{E}(\mathrm{X})$

(iii)　$\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)=a\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b$

(iv)　$\mathrm{E}(c) = c$

(v)　$\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{Y})$

(vi)　$\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b\mathrm{Y})=a\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b\,\mathrm{E}(\mathrm{Y})$

次に確率変数Ｘの分散　$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mu)^2)$　　($\mu=\mathrm{E}(\mathrm{X})$)　を考える。
その値を σ^2 と書くことがある。
分散Ｖ(Ｘ)はばらつきの指標尺度であるが。期待値Ｅ(Ｘ)からのばらつきであることに注意しよう。
分散にも次の基本演算ルールがある。

(i)　$\mathrm{V}(\mathrm{X}+c)=\mathrm{V}(\mathrm{X})$

(ii)　$\mathrm{V}(c\mathrm{X})=c^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$

(iii)　$\mathrm{V}(c)=0$

また、Ｘ、Ｙの共分散　Ｃov(X,Y)を定義しょう。

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mu_x)(\mathrm{Y}-\mu_y)) \qquad (\mu_x=\mathrm{E}(\mathrm{X}),\ \mu_y=\mathrm{E}(\mathrm{Y}))$$

X と Y が、それぞれの平均 μ_x，μ_y から互いに関連しながら，ばらつく程度を表す。

次の分散の式から次のことが解かる。

$$\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b\mathrm{Y})=a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})+b^2\,\mathrm{V}(\mathrm{Y})+2ab\,\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \qquad (*)$$

(*)式からポートフォリオ分析の基本的課題が出てくる。

＜ポートフォリオの構成＞

２つの確率変数 R_1，R_2 があり，$E(R_1) = e_1$，$E(R_2) = e_2$，$V(R_2) = \sigma_2^2$，R_1，R_2 の相関係数を ρ とする。$0 \leqq x \leqq 1$ にたいし，確率変数

$$R_\rho = xR_1 + (1 - x)R_2 \qquad (**)$$

を定義するとき、次の量やグラフを考えることができる。

(i)　R_ρ 期待値 $E(R_\rho)$，分散 $V(R_\rho)$

(ii)　$V(R_\rho)$の最小値（x の２次関数となる）

ポートフォリオ選択とは、同時に 2 個以上の株式(一般に有価証券、さらには資産)に分散投資することをいう。そこでは、R_1, R_2 は２株式の利回り(利得率すなわちリターン)、e_1, e_2 はその平均利回り（期待利得率)、σ_1^2, σ_2^2 はその変動リスク、ρ は２株式の連動の指標（＞なら同方向、＜なら反対方向）となっている。また、x，$1-x$ は株式 1，2 の組み入れ比率ある。したがって、ポートフォリオの変動リスク $V(R_p)$ を最小にする組みいれ比率を選ぶ最適化の問題となる。

- **ポートフォリオの構成**

$$E(R_p) = xe_1 + (1-x)e_2$$

$$V(R_p) = x^2\sigma_1{}^2 + 2x(1-x)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1-x)^2\sigma_2{}^2$$

となり、

$V(R_p)$ を x の２次関数として整理すると

$$V(R_p) = (\sigma_1{}^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2{}^2)x^2 - 2\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)x + (\text{定数項})$$

となり

x^2 の係数＝$(\sigma_1 - \rho\sigma_2)^2 + (1-\rho^2)\sigma_2{}^2 > 0$　（ρ は相関係数だから、$-1 \leqq \rho \leqq 1$）

だから、$V(R_p)$ は下に凸な放物線で、その頂点の x 座標は

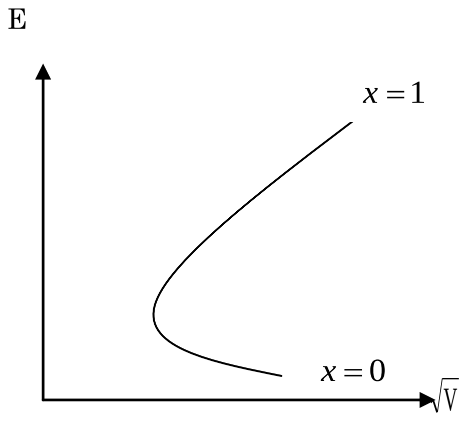
$$x^* = \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{\sigma_1{}^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2{}^2}$$

となる。　　したがって、$V(R_p)$ の $0 \leq x \leq 1$ での最小値は

(a)　$x^* > 1$ のときは，　$x = 1$

(b)　$0 \leq x^* \leq 1$ のときは，　$x = x^*$

(c)　$x^* < 0$　のときは，　$x = 0$



（例）

川崎製鉄株と日立株の収益率

	川崎製鉄（X）	日立（Y）
平均	1.26000	0.64000
標準偏差	10.41000	8.68000
相関	0.27000	

１９８４年１月から１９８６年１２年までの川崎製鉄と日立株の月次収益率のデータから推定された平均、標準偏差、相関は上記の表の通りである。
このとき、川崎製鉄と日立株のポートフォリオの収益率のリターンとリスクは

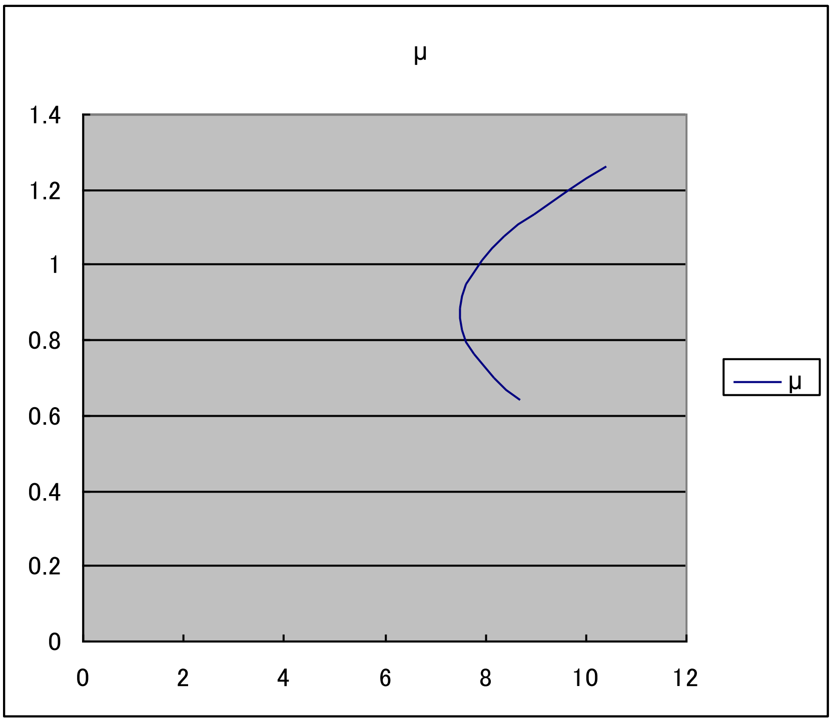
$$\mu = h \cdot 1.26 + (1-h) \cdot 0.64 = 0.62h + 0.64$$

$$\sigma = \sqrt{h^2 108.27 + (1-h)^2 \cdot 75.41 + 2h(1-h) \cdot 24.47}$$
$$= \sqrt{134.74h^2 - 101.88h + 75.41} \qquad (0 \le h \le 1)$$

$h = 0.3$ 7のときリスクは最小になる。

h がこの値以下になると、リスクが増大するにのにもかかわらず、リターンは減少していく。
リスク回避的な投資家は（μ、σ から判断するならば)、投資比率が 0.378 以下のポートフォリオを選択することないであろう。

h	σ	μ
0	8.6838931	0.64
0.1	8.1590073	0.702
0.2	7.7732619	0.764
0.3	7.5480196	0.826
0.4	7.4977597	0.888
0.5	7.6259426	0.95
0.6	7.9239132	1.012
0.7	8.3735655	1.074
0.8	8.9520724	1.136
0.9	9.6362545	1.198
1	10.405287	1.26



　生きた数学の応用、統計の活躍する場面としてポートフォリオ選択論はなかなか魅力的である。また、表計算ソフトなどを利用すれば、なかなか面白い教材ができ、魅力的授業展開が出来るのではないか。著者は目下検討中である。
　数学、情報の授業もしくは総合的な学習の時間のテーマとして活用できるのではないかと考えている。