●定数変化法の公式による解法

$a_{n+1}=\lambda a_n+p_n$ ・・・・・・①

$a_{n+1}=\lambda a_n$ ・・・・・・・・・②

②の解の一般解は

$a_n=\lambda^n C$ （Cは定数）

ここで、定数Cを変数化して、C_nとする。

したがって、$a_n=\lambda^n C_n$ ・・・・・・③

となる。

これを、①に代入して、

$\lambda^{n+1}C_{n+1}=\lambda\cdot\lambda^n C_n+p_n$ ・・・・・④

を得る。③の両辺をλ^{n+1}で除ずると、

$C_{n+1}=C_n+\dfrac{p_n}{\lambda^{n+1}}$ ・・・・・・・・・⑤

④から

$C_{n+1}-C_n=\dfrac{p_n}{\lambda^{n+1}}$ ・・・・・・・・・⑥

⑤式の右辺は階差数列である。したがって、

$C_n=C_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{p_k}{\lambda^{k+1}}$ ・・・・・・・・・⑦

⑦式を③に代入して、次の式を得る。

$a_n=\lambda^n\left[C_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{p_k}{\lambda^{k+1}}\right]=C_1\lambda^n+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{n-k-1}p_k$ ・・・・・・⑧

⑧式が一般に<u>**定数変化法の公式**</u>と呼ばれるものである。

● 一般解と特殊解について

次の簡単な漸化式について考えてみよう。

$a_1=1$ ・・・・・・・・・・⑨

$a_{n+1}=3a_n+1$ ・・・・・・・・・・⑩

⑩式において、$a_n=\lambda$（定数）の定数型の解を見っけてみよう。すなわち、⑩式の特殊解を見っけようという訳である。

この式に代入して

$\lambda=3\lambda+1$ ・・・・・・・・・・・・⑪

これが、ある一部の受験参考書で呼ばれている特性方程式である。

⑪式から、定数型の特殊解$a_n=\lambda$は初期条件⑨とは関係なしに

$a_n=\lambda=-\dfrac{1}{2}$ ・・・・・・・・・⑫

と見つけることができるのである。

そこで、高校の多くの教科書、参考書の解法では、漸化式⑩とこの特殊解を満足する方程式⑪とから、次の導きだす。すなわち、⑩式から⑪を辺々引き算して、

$a_{n+1}-\lambda=3(a_n-\lambda)$ ・・・・・・・・・⑬

$\lambda=-\dfrac{1}{2}$を代入して

$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3(a_n+\dfrac{1}{2})$

を得て、等比数列に関係付ける訳である。

$b_n=a_n+\dfrac{1}{2}$ ・・・・・・・・・・・・⑭

とおくと、

$b_{n+1}=3b_n$ ・・・・・・・・・・・・・⑮

となり、

$a_{n+1}=3a_n$ ・・・・・・・・・・・・・⑯

　という方程式を考えている訳である。これは元の方程式⑩を非同次型と呼ぶにたいして、⑮式は同次方程式と呼ばれる。⑭から

$a_n=b_n-\dfrac{1}{2}=b_n+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=b_n+\lambda$

となり、

（非同次型の一般解）＝（同次型の一般解）＋（非同次型の特殊解）

という解の構造をもっていることが解ります。