高等学校　大学入試

微分方程式論から観た漸化式の解法について

―受験参考書での誤った記述と数学教育について―

１．研究のねらい

受験参考書（特に予備校の先生著作の参考書、問題集）あるいは一部の教科書の指導書をみると、漸化式の項目において、特性方程式という用語に間違った使用がみられる。

すなわち、

「漸化式　$a_{n+1}=2a_n+1$・・・①

に対してa_{n+1}，a_nをともにcで置換えた方程式

$c=2c+1$・・・・・・②

・　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・」

この②の方程式を**特性方程式**と呼ぶことである。

これは誤りである。

これに対して、

「二項間の漸化式の例として、

$$a_1=1, a_2=1 \cdot\cdot\cdot\cdot ③$$

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \cdot\cdot\cdot ④$$

に対して

$$\lambda^2-\lambda-1=0 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ⑤」$$

この④の方程式を**特性方程式**と呼ぶにことは正しい。

２．研究の内容

関数方程式（微分方程式、積分方程式、差分方程式、関数微分方程式（時間遅れを含む微分方程式）あるいは差分微分方程式とも呼ばれる等）の研究をしていた端くれとして、これらのことを気に掛けていた。

ところで、最初に断っておくが小生は浅学非才な著者であって、以下の記述の随所に不適切な個所があると思われるがお許しを頂きたい。

先日、驚いたことに、この原稿を書こうと思い、日本の高校で多く使われている教科書の指導書を見たら②式を特性方程式と呼んでいたことである。指導書には文部省（現文部科学省）の検定がないからであろう。

また、街の本屋で受験参考書を一見した所、全体的に２割から３割ぐらいの参考書に上記で述べたような誤った記述があった。ところが、微分方程式・関数解析（線形代数の無限次化？）を専門とする教授が監修した受験参考書には②式を特性方程式と呼ぶような記述はなかったし、著名な関数解析の専門科である某大学教授が執筆したある超難関大学入試を意識した高度な受験参考書では、これから述べる事柄（定数変化法の公式を大学で学ぶこと）に近い内容が記述されていた。一方、予備校の先生方、高校先生方が執筆した参考書、問題集では②式を特性方程式と記述している本が極めて多かった。

これから述べる事柄は微分方程式論や関数解析を専攻した人には、非常に自明のことと思われ、気恥ずかしい所であるが、あえてこれを議論する。

③はフィボナッチ数列の漸化式であり、一般項を求めることは優しくはない。いま、著者が一番求めやすい方法で求めてみる。この解法は微分方程式を学習した人には極めて自然に理解できるであろう。

解法：

③式において、

$$a_n=\lambda^n \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ⑥$$

の形の解を探してみる。すなわち、④式に代入してみる。

$$\lambda^{n+2}=\lambda^{n+1}+\lambda^n \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ⑦$$

⑥式の両辺をλ^nで除ずると、

$$\lambda^2=\lambda+1 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ⑧$$

⑦式　すなわち④式である。これが**特性方程式**である。

二次方程式④の解をα, βとすると、次の２つの解

$$x_n=\alpha^n \quad , \quad y_n=\beta^n \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot ⑨$$

が③の解となる。

ここに，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

次にこれらの１次結合が解になる（証明が必要）[1]ことから、その１次結合を　　とすると、

[1] $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, y_{n+2}=y_{n+1}+y_n$　から

$$a_n = cx_n + dy_n \qquad \cdots\cdots\cdots \text{⑩}$$

次に、③式は微分方程式における初期条件と呼ばれるものに対応する条件を⑩式に適用すると、

$$c\alpha + d\beta = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots \text{⑪}$$

$$c\alpha^2 + d\beta^2 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots \text{⑫}$$

となる。ところで、⑧より

$$\alpha^2 = \alpha + 1,\ \beta^2 = \beta + 1$$

であるから、⑫は簡単にできて

$$c(\alpha + 1) + d(\beta + 1) = 1 \qquad \cdots\cdots \text{⑬}$$

⑬に⑪を代入して

$$c + d = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots \text{⑭}$$

連列方程式⑪、⑭を解いて

$$c = \frac{\beta - 1}{\alpha - \beta} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-5 - \sqrt{5}}{10}$$

$$d = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

ここでは、求積法による線形微分方程式の解法をおさらいしながら、考察をしてみたい。一般に、線形の漸化式の解法は線形差分方程式の解法の特集なケースであり、代数的構造（基本解が張るベクトル空間として、すなわち関数解析）立場から観ると、線形微分方程式の解法とほとんど同じである。　受験問題をみると手を変え、品を買え出題されている（例えば、高校生に難しいものとしてフィボナッチ数列の漸化式、変数係数の線形漸化式等）。真面目に数学教育を考えたとき、**このように漸化式の解法を高校程度の初等的な解法を駆使して解かせることが、はたしてどれだけの意味があることであろうか？　実祭これらの解法は優しくはない。大学程度の数学から見れば簡単に見通しがよく解けてしまう。　著者の素朴な疑問である。**

＊大学教養課程（大学１～２年解析学等の講義）での線形微分方程式微分方程式のおさらい。

〇線形一階常微分方程式の解法

同次方程式、非同次方程式、自励系、強制項、初期条件、存在定理、一般解、特殊解、特異解、微分方程式の解＝一般解＋特殊解、乗数変化法の公式

〇線形二階常微分方程式の解法

同次方程式、非同次方程式、初期条件、存在定理、一般解、特殊解、特異解、微分方程式の解＝一般解＋特殊解、特性方程式、重ね合わせの原理、乗数変化法の公式、システム（系）の話し、行列の固有値と特性方程式

〇線形一階差分方程式の解法

差分と和分、同次方程式、非同次方程式、自励系、強制項、初期条件、存在定理、一般解、特殊解、特異解、微分方程式の解＝一般解＋特殊解、乗数変化法の公式

〇線形二階差分方程式の解法

同次方程式、非同次方程式、初期条件、存在定理、一般解、特殊解、特異解、微分方程式の解＝一般解＋特殊解、特性方程式、重ね合わせの原理、乗数変化法の公式、システム（系）の話し、行列の固有値と特性方程式

３．研究のまとめ

最初に断っておくが、あくまでも、これからの話は解析学から観た話である。受験数学で特性方程式という数学的用語が導入されても、本来の数学的な意味や概念が無視され、言葉だけが一人歩きをしている。また、多くの高校生に本来の意味や概念を理解させることは無理である。やはり、大学での数学（線形代数等）の内容が理解できてからという事になろう。やはり、高校での漸化式の取り扱いはせいぜい多くの教科書で取り扱われている程度ということになる。ただ現在の教科書では、漸化式の応用問題（日常生活への応用）が殆ど見当たらない。数学的物の見方の良さが欠落している。

この事実については、大学受験が大きな影を落としているように思える。 受験数学が新しい数学用語を作ってしまったり、数学のある特定の部分が強調（ハミルトン・ケリーの定理等）されたりしてしまう。

また、脈絡のない話題（コーシー・シュワルツ不等式等、この不等式は言うまでもなく関数解析で活躍する不等式であるが）が多い。　多くの国民が受験数学を

$$a_{n+1} = cx_{n+1} + dy_{n+1} = c(x_n + x_{n-1}) + d(y_n + y_{n-1})$$
$$= (cx_n + dy_n) + (cx_{n-1} + dy_{n-1}) = a_n + a_{n-1}$$

数学として学習している状況においては、大きな問題である。日本人の多くが受験数学の印象を数学の姿として認識していることに問題がある。受験数学は内容が断片的であり、それ自体が短時間で解けるものである要請等から数学的な事柄に深入りすることはできない。出題者が如何に工夫しょうとしても所詮、受験生とつては、受験パズルとしか見えない。数学を専攻した者にとって、気にる所である。

日本には、学校数学（文部科学省の指導要領の範囲で規定された数学、あるいはこの要領で規定された用語等、これらの問題は数学の英訳ときに良く解る。例えば、学校数学では等差数列であるが大学数学では算術級数、また等比数列が幾何級数である。マルサスの人口論の記述を思い出して欲しい。）、受験数学（受験のために受験参考書や予備校等で整理された数学）、専門の数学（大学以降で講義される数学）がある。 上級学校進学のために、数学本来の意味や姿を歪曲して取り扱われているのが現状である。 これらの事柄が数学や学問に興味を持たない学生の増加の一因となっているのではないだろうか。

上に述べた事柄はほんの一例であって、他にもあるであろう。受験数学が出来なくても専門の数学を理解することは出来ると著者は考えている。

学問で差分方程式（離散値に制限する漸化式）を解く機会は多いと思われる。例えば、経済学、数値解析、確率過程論、コンピュータ科学等であるが、でも受験数学のような解法はしないであろう。また、大学で使う数学の観点から見れば、差分方程式より微分方程式の需要が多いので微分方程式の解法の学習を急ぐ必要がある。微分方程式の解法を学習すれば、差分方程式はアナロジーで学習できる。この事実は微分が差分、積分が和分、多項式が階乗関数に対応していることから解る。ただ漸化的（帰納法的）な考え方は重要である。これに対しては別の問題（例えば、数列の日常的な問題への応用、組み合わせ理論、コンピュータのプログラミング等）で育成すべきである。

いま述べた漸化式の解法の事情は中学入試における算数の文章題の解法とよく似ている。小学校の段階では方程式が使えない、またこの段階では代数的な形式的な操作の習熟が無理であるため、色々な算数的な解法（何とか算と言われもので、有名なものが鶴亀算である）が中学進学塾などで記憶中心に教え込まれることになるのだが、子供達にも過重であり、これを支える親にとっても大変なことである。

また、幼い時期に過度の勉強を強いることは、人格形成において問題がある。歪な人格を作りかねないし、最近子供達の体力の低下を訴えるデータもある。

日本では、大学に入るために、塾、予備校が繁盛している。そのための教育費が国民の家計に重くのしかかっているのも現実の問題である。少子化の一因として、この教育費の問題を揚げる報告は多い。

高校生にとって勉強することは受験勉強をすることになっている。数学について言うならば、いま勉強している受験数学の内容が将来どのようになるか、どう関係していくのかは高校生には見えないのである。そこで、大学入試のために大学で学習する内容に近いもの（入門か導入の部分）を題材に入試問題を作成しても、高校生には唯の問題のための問題である。大学での本格的な数学を学ぶための数学的な系統性もなければ、パズルか知能テストの類でしかない。

大学は勉学がではなく遊ぶ所、すなわちレジャランド化して久しいが、最近は高校生も余り勉強しなくなってしまったようである。低迷する経済情勢の中、マスコミで教育に関する議論が耐えることはない。教育に対する期待は大きいのと同時に問題が多いからであろう。「学校崩壊、学力低下、勉強嫌いの増加、読書をしない、物を考えない、理数嫌い等である。数学では、テストでは高得点をあげるが、諸外国より数学嫌いが多く、また数学が将来自分のためには役立たないと考える生徒の多さ、見慣れていない問題に対する挑戦力の低さ」が指摘されている。

最近、数学教育についての著名人による論文集[2]**「数学の教育をつくろう」**が出版された。また、極めて興味のある調査結果が、讀賣新聞１１月８日付けの朝刊の１面記事に「日本の中学生　米中との比較（勉強に意欲も自信もなし）」　という見出しで載った。**「数学わからない（米中の３倍）**、自分に満足（わずか

[2]植野健爾・岡本和夫・黒木哲徳・野崎昭弘　編
数学セミナー増刊「数学の教育をつくろう」，
２００２年１０月３１日発行，日本評論社

0.4%）」。その中で次のように述べられている。それの一部を以下に抜粋する。

「日本の中学生は、授業についていけず、学問への情熱も、自信も責任感も乏しい」ー。・・・・積極的で自信満々の米国の中学生、高学歴志向で強い国を目指す中学生。・・・調査は、一ツ橋文芸教育振興会、日本青少年研究所の両財団法人が、昨年十月から今年三月の間、三国でそれぞれ千ー千三百人の中学生を対象にアンケートを行った。

数学の授業の理解度では、日本は「ほとんど理解できない」「少しはできる」が計 35.4%で米中の三倍近かった。進学希望は、日本は「大学の学部まで」が 38.9%で最多。一方、中国は博士課程までが 47.5%、修士課程が 23.7%。学部卒は 19.9%「学部卒は高卒と同等とみられている（青少年研究所）とされる中国の現状が表れた。「将来、情熱を注ぎたいこと」（複数回答）では、日本「スポーツ」（32.4%）、「音楽」（25.1%）などが上位で「学問」（11.8%）。中国は「IT」が 44.9%と突出、「学問」が 33.3%と続いた。米国は「スポーツ」（46.6%）、「学問」（45.7%）がほぼ同率だった。日本は「将来に関心がない」が 8.7%で、三国中トップだった。・・・自分についての評価は、「自分に満足している」のが、米国 53.5%、中国 24.3%、日本は 9.4%。「自分に起こったことは自分の責任」と考えるのが米国 59.7%、中国 46.9%、日本は 25.2%。人のせいにしがちな日本の現代っ子気質が浮かぶ。・・・青少年研究所の胡霞・研究員は、・・・中国の子も十年前の調査に比べて、学歴社会化で息苦しそうな印象が強くなつた」と話している。

この記事から読めることは日本の中学生は楽をして 4 年制大学に入学することが大きな目的であるように観える。欧米人の指摘する日本の親や教師等の過保護教育の結末と思える。このような親の過保護、甘やかしや学歴信仰は日本人の老後における子供への期待を指摘する研究もある。

最初に揚げた本にはなかなか含蓄のある論文が多く、非常に興味が持てた。是非一読することを薦める。編集者は植野健爾、岡本和夫、黒木哲徳・野崎昭弘です。著者が常、日頃感じていることが随所に散見され、それらの内容が適格に説得のある文書で述べられている。私自身、これらを読んで、自分の考えに心強くした次第である。

先に指摘した数学教育の問題の原因は、あきらに現在の大学受験制度にある。　実際、日本人は受験数学という得たいの知れないものを勉強させられてしまっている。こんなこを考えると「なんと日本人は経済的に無駄な事をしているのか！」と思いたくなる。毎年、めでたく大学に入学して、なにもかも自由になり、羽根を伸ばした大学生を観るにつけ、受験だけの動機付けで果たしてこれから本当に自分の選考した学問を勉強していけるだろうか？と頭を傾げたくなる。

いまの線形２階漸化式の項で言うならば、進んでいる高校生には、物理の内容を取り混ぜながら二階の定数係数の常微分方程式を学習させながら、将来の展望を含めて学習させるべきではないでしょうか。

我が国が成熟社会（農業社会、工業化社会から高度情報化社会への転換）を迎え、高等教育も大衆化している現在、欧米諸国に観られるような、ゆとりを持ち個人の発展段階に応じた教育システムを考える時期に来ているのではないだろうか。　実際、日本社会では年功序列社会は崩壊しかけているし、個人の実力（職務遂行能力）が問題になる時代に突入しているように観える。

そして、小・中・高・大・大学院の枠を越えた数学教育の考察が必要であるように思える。具体的には入試問題を簡単（基本的な平易な問題）にして、卒業を難しくすることや、東大の苅谷教授が主張するように振り分けの時期を遅らせる（大学院前期（修士）の入学の時期にする）など。また、飛び級制を取り入れることや、進んでいる生徒は大学での内容が学習でき、単位が取れる（米国で行われているようである）等である。

以上、話が大きくなってしまったが、現在高校教師できることは、如何に高校生に大学入試問題を通じて、大学の数学や関連する内容を紹介することである。もっと数学を多面的に捕らえることではないだろうか。動機図付けは色々あった方がよいからである。ここでは、数理科学的（古くは応用数学）な数学の活用も考えられる。この話は簡単ではないが、この方向に努力すべきであるまいか。具体的には、比較的自由裁量の

ある「総合的な学習の時間」や教科「情報」の活用であると考えている。上記で述べた意味においても数学と関係が深い教科「情報 B」を多くの学校で採択して貰いたいものである。すくなくとも私から観ると、この教科には魅力的な教材（OR 関係の教材）がたくさん存在している。「情報 B」を選択させせようとする学校は少ない。実の所、その様なものは大学で勉強したことがないから教えられない、自分で勉強するのが面倒くさいと言うのが本音であろう。

最後に、大人たちを一見無視している様に見えるが、教師や親の後ろ姿を良く観ているし、それを観て子供達は成長して行くものである。心理学者の市川先生がある本の中で述べている様にもっと大人たちが勉強するようになれば、子供達は勉強するであろうと述べているが、やはり教師ももっと勉強する必要があると思う。数学教師は受験数学だけではなく、幅広く数学や関連教科（物理、経済、情報科学等）を勉強すべきものである。

実際、失礼かもしれないが、数学教師の数学嫌い、いや勉強嫌いがは多いのである。中には胸をはって「私は数学が嫌いだ」と言い、生徒には有無を言わせず試験をしている人もいる。「将来は自分と同じく数学嫌いにするのか」と言いたくなる。

根底には学歴至上主義と異常な精神主義、さらに日本社会の「結果の平等主義」がある。機会の平等は保障されなけばならないが、結果の平等にはならない。

これでは子供達に数学を好きになって、一生懸命勉強せよと言っても無理な話である。専門職としての教員のステータスシンボルは下落するばかりである。教育職員養成審議会などからは「社会人を積極的に教員に登用せよ」と出てくる。教員の専門性を認めていないのであろう。また、昨今、研修を取ろうとする大変である。ましてや、学外等で研修をしょうとすると大変なことである。教員が研修を採っても教員が勉強する訳がないという観点からであろう。我々の研修の機会が厳しくなる傾向にあることに憂慮を覚えるのは私だけではあるまい。教育は短期的にだけ結果が出るものではなく、長期的にも考える必要がある。また、社会での数学の人気は良くない。10 年前の街の書店と現在の書店での数学のコーナーでの本の内容を比べて見れば良くわかる。資格関係の受験参考書、英会話やコンピュータ関係のハウ・トー的なものは多くなったが、それに反して、数学のコーナーの冊数は減るかしら、増えていない。特に啓蒙書の類いや大学初年級の数学書がやや増えたことである。関数解析、関数論、微分方程式論などの本格的な数学書（岩波、吉岡、共立、朝倉、理工学図書）を探そうとすると大変である。

ましてや、あの本格的なシュプリンガー黄色カバーのレクチャーノート類の全シリーズ等を手に取って見ようとすると大変である。丸善、紀伊国屋など洋書でも困難になってきている。この様な状態から観ると、大人達も数学などの難しい書籍を読んだり、考えたりしなくなっているのではないか。最近、英語の先生に言われたが、「大学で数学を勉強する人間は奇人変人である」と皮肉たっぷりに言われたことが頭から離れない。この様な状況にあっては子供達が希望を持って数学を勉強するはずがないと思った。そして、その子供達が大人になったとき如何なるであろうか。何か、これも現在の日本の置かれている状況の一原因であるようにと思われた。