Dynamical Horizons

Enegy, Angular Momentum, Fluxes, and Balance Laws

Abhay Ashtekar and Badri Krishnan

のまとめ

澤山晋太郎

平成 20 年 1 月 22 日

i Introduction

モチベーション．

１．ブラックホールを局所的に定義したい．

２．ブラックホールの面積をダイナミックにさせたい．

３．それを考慮に入れてブラックホールの熱力学を展開させたい．

Event horizon では, ブラックホールはグローバルに定義されている．そこで, ここではブラックホールを局所的に定義する．局所的に定義されたブラックホールとして Isolated horizon などがある．しかし, それは面積のダイナミクスを持っていない．ここでは Dynamical horizon という面積のダイナミクスを持つブラックホールを定義し, その熱力学を展開する．

ここで,Event horizon の定義は,

$$H = \dot{J}^{-}(\mathcal{I}^{+}) \cap M \tag{1}$$

であり,future null infinity というグローバルなものを使って定義している．

Isolated horizon の定義はまず,Nonexpanding horizon を定義することから始まる．

Nonexpanding horizon の定義

A three-dimensional submanifold Δ of a space-time $(\mathcal{M}, g_{ab})$ is said to be a *nonexpanding horizon* if it satisfies the following conditions:

(i) Δ is topologically $S^2 \times \mathbb{R}$ and null.

(ii) The expansion $\theta_{(l)}$ of l vanishes on Δ for any null normal l.

(iii) All equations of motion hold at Δ and the stress-enegy tensor T_{ab} of matter fields at Δ is such that $-T^a_b l^b$ is future directed and causal for any future directed null normal l.

weakly isolated horizon はこれにさらにホライズン上で $\mathcal{L}_l K^b_a = 0$ の条件を付加する．この条件は $\mathcal{L}_l \omega = 0$(ホライズン上) と同値である．なぜなら,$K^b_a := \mathcal{D}_a l^b$ であり,l は expansion,shear,twist free より, ホライズン上の接続が $q^c_a \nabla_c l^b = \omega_a l^b$ と定義されるからである．

weakly isolated horizon の定義

A weakly isolated horizon $(\Delta, [l])$ consists of a nonexpanding horizon Δ, equipped with an equivalance class of null nrmals to it satisfying

$$\mathcal{L}_l \omega = 0 \; on \; horizon \; for \; all \; l =\in [l] \tag{2}$$

これを絵に描くと, 次のようになり, 面積のダイナミクスはもたない．ここでは l^a を時間発展だとしている．

ii Black hole Thermodynamics

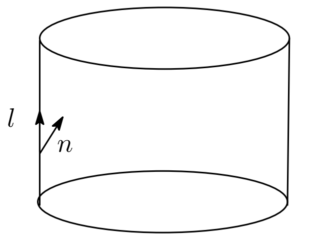

図 1: Isolated horizon. 二つの null vector は expansion 0 である.

ここではブラックホールの熱力学を簡単に説明する．簡単のため Kerr black hole で説明する．Kerr 時空のメトリックは,

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GMr}{\rho^2})dt^2 - \frac{2GMar\sin^2\theta}{\rho^2}(dtd\phi + d\phi dt)$$
$$+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2) - a^2\Delta\sin^2\theta]d\phi^2 \tag{3}$$

であり, ここで

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \tag{4}$$
$$\rho^2(r,\theta) = r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{5}$$
$$a = J/M \tag{6}$$

である．J と M は Komar enegy と Komar angular momentum である．Komar enegy と Komar angular momentum の定義は,

$$M = \frac{1}{4\pi G}\int_\Sigma d^3\sqrt{\gamma}n_\mu J_R^\mu \tag{7}$$
$$= \frac{1}{4\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{\gamma^{(2)}}n_\mu\sigma_\nu\nabla^\mu K^\nu \tag{8}$$
$$J = \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{\gamma^{(2)}}n_\mu\sigma_\nu\nabla^\mu R^\nu \tag{9}$$

である．ここで,

$$J_R = K_\mu R^{\mu\nu} \tag{10}$$

であり,K^μ は timelike killing で,R^μ は rotational killing である．J_R は保存するカレントである．Event horizon は,$g^{rr} = 0$ のところにある．今,$GM > a, GM = a, GM < a$ の場合があるが,$GM > a$ の場合のみを考える．すると,$g^{rr} = 0$ の解は,

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2} \tag{11}$$

であり,innar event horizon と outer event horizon と呼ぶ．この outer horizon の面積を求めるために, ホライズン上のメトリックを求めると,

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = ds^2(dt = 0, dr = 0, r = r_+) \tag{12}$$

$$= (r_+^2 + a^2 \cos^2\theta) d\theta^2 + [\frac{(r_+^2 + a^2)^2 \sin^2\theta}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}] d\phi^2 \tag{13}$$

であり, 面積は,

$$A = \int \sqrt{|\gamma|} d\theta d\phi \tag{14}$$

$$|\gamma| = (r_+^2 + a^2)^2 \sin^2\theta \tag{15}$$

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2) \tag{16}$$

次に,irreducible mass を定義する.

$$M_{irr}^2 = \frac{A}{16\pi G^2} \tag{17}$$

$$= \frac{1}{4G^2}(r_+^2 + a^2) \tag{18}$$

$$= \frac{1}{2}(M^2 + \sqrt{M^4 - (Ma/G)^2})) \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2}(M^2 + \sqrt{M^4 - (J/G)^2}) \tag{20}$$

これを微分することによって,

$$\delta M_{irr} = \frac{a}{4GM_{irr}\sqrt{4G^2M^2 - a^2}}(\Omega_H^{-1}\delta M - \delta J) \tag{21}$$

ここで,$\Omega_H^{-1} = \frac{d\phi}{dt}$ であり,

$$ds^2 = 0 = g_{tt}dt^2 + g_{t\phi}(dtd\phi + d\phi dt) + g_{\phi\phi}d\phi^2 \tag{22}$$

より,

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \tag{23}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0,\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{2G^2M^2 + a^2} = \Omega_H \tag{24}$$

式変形により,

$$\delta A = 8\pi G \frac{a}{\Omega_H\sqrt{G^2M^2 - a^2}}(\delta M - \Omega_H \delta J) \tag{25}$$

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \Omega_H \delta J \tag{26}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{G^2M^2 - a^2}}{2GM(GM + \sqrt{G^2M^2 - a^2})} \tag{27}$$

ここで κ は surface gravity である．実際,Killing vector $\chi^\mu = K^\mu + \Omega_H R^\mu$ をサーフェイスグラヴィティの式 $\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu\chi_\nu)(\nabla^\mu\chi^\nu)$ に代入するとそうなっている．ここで熱力学の first law を思い出すと,

$$dE = TdS - pdV \tag{28}$$

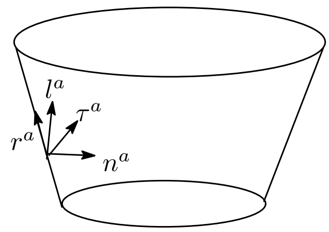

図 2: ダイナミカルホライズン．τ は時間．l, n は null で,l は expansion ゼロ面上にある．n はブラックホールの中に入るので,expansion は負である．r は expansion ゼロになるようにとる．このようにとると,r を時間発展のように見ることができる．

となっているので, 先ほどの式と対応をつける．

$$E \leftrightarrow M \tag{29}$$

$$S \leftrightarrow A/4G \tag{30}$$

$$T \leftrightarrow \kappa/2\pi \tag{31}$$

よってエリアをエントロピーとみなす．$\kappa = const$ を温度がゼロにならないという Zeroth law とする．さらに, エントロピーは減らないことを Second law と呼ぶ．ここでさらに, ブラックホールの外のエントロピーを $S_{outside}$ とすると,

$$\delta(S_{outside} + \frac{A}{4G}) \geq 0 \tag{32}$$

がなりたつことがコンジェクチャーとしてある．これは [9] に書いてある．

iii **Dynamical Horizon**

局所的でダイナミカルなホライズンとして次のような定義をする．

Definition. A smooth, three-dimensional, spacelike submanifold H in a space-time is said to be a *dynamical horizon* if it is foliated by preferred family of 2-spheres such that, on each leaf S, the expantion $\theta_{(l)}$ of a null normal l^a vanishes and the expansion $\theta_{(n)}$ of the other null normal n^a is strictly negative.

これを図に描くと次のようになる．$\hat{\tau}^a$ は時間であり,$g_{ab}\hat{\tau}^a\hat{\tau}b = -1$ となるようにとる．これで 3+1 分解したメトリックを q_{ab} とかく．$q_{ab} := g_{ab} + \hat{\tau}_a\hat{\tau}_b$ である．この時の extrinsic curvature は $K_{ab} := q_a^c q_b^d \nabla_c \hat{\tau}_d$ である．D は q_{ab} に compatible な共変微分である．この三次元多様体を H とかく．$\mathcal{R}_{ab}$ はそのリッチテンソルで,$\mathcal{R}$ はリッチスカラーである．さらに今度は $\hat{r}^a$ で 2+1 分解を行う．すると, メトリックは $\tilde{q}_{ab}$ で,extrinsic curvature は $\tilde{K}_{ab} := \tilde{q}_a^c \tilde{q}_b^d D_c \hat{r}_d$ と定義する．$l^a := \hat{\tau}^a + \hat{r}^a$, $n^a := \hat{\tau}^a - \hat{r}^a$ ととる．$l^a n_a = -2$ である．

まず,$\Theta_{(l)} = 0, \Theta_{(n)} < 0$ より,

$$\hat{K} = \tilde{q}^{ab} D_a \hat{r}_b = \frac{1}{2}\tilde{q}^{ab}\nabla_a(l_b - n_b) = -\frac{1}{2}\Theta_{(n)} > 0 \tag{33}$$

が導かれる.

今、3+1 分解をしたので,H 上にはよく知られた拘束条件が発生する.スカラーコンストレイントとベクトルコンストレイントである.

$$H_S = \mathcal{R} + K^2 - K^{ab}K_{ab} = 16\pi G \bar{T}_{ab}\hat{\tau}^a\hat{\tau}^b \tag{34}$$

$$H_V^a = D_b(K^{ab} - Kq^{ab}) = 8\pi G \bar{T}^{bc}\hat{\tau}_c q_b^a \tag{35}$$

ここで,

$$\bar{T}_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{8\pi G}\Lambda g_{ab} \tag{36}$$

今,$\xi^a_{(R)} := N_R$ ($N_R := |\partial R|$)（R はブラックホールの半径）とおく.トラップドサーフェイス S_1, S_2 の間の H を ΔH と書くことにする.ΔH を通る matter の　energy flux は

$$\mathcal{F}^R_{matter} := \int_{\Delta H} T_{ab}\hat{\tau}^a\xi^b_{(R)} d^3V \tag{37}$$

で定義する.先ほどの拘束条件の適当な組み合わせで T_{ab} を作ると,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(R)}_{matter} &= \frac{1}{16\pi G}\int_{\Delta H} N_R(H_S + 2\hat{r}_a H_V^a) d^3V \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int_{\Delta H} N_R(\mathcal{R} + K^2 - K^{ab}K_{ab} + 2\hat{r}_a D_b P^{ab}) d^3V\end{aligned} \tag{38}$$

ここで,P^{ab} は

$$P^{ab} := K^{ab} - Kq^{ab} \tag{39}$$

で定義されている.今,$\mathcal{R}$ を 2+1 分解すると,

$$\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} + \tilde{K}^2 - \tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab} + 2D_a\alpha^a \tag{40}$$

となる.ここで $\alpha^a := \hat{r}^b D_b \hat{r}^a - \hat{r}^a D_b \hat{r}^b$ である.さらに部分微分より,次の式が成り立つ.

$$\hat{r}_b D_a P^{ab} = D_a\beta^a - P^{ab}D_a\hat{r}_b \tag{41}$$

ここで,

$$\beta^a := K^{ab}\hat{r}_b - K\hat{r}^a \tag{42}$$

これらの式を代入することによって,

$$H_S + 2\hat{r}_a H_V^a = \tilde{\mathcal{R}} + \tilde{K}^2 - \tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab} + K^2 - K_{ab}K^{ab} - 2P^{ab}D_a\hat{r}_b + 2D_a\gamma^a \tag{43}$$

ここで,

$$\gamma^a := \alpha^a + \beta^a \tag{44}$$

今 $\Theta_{(l)}$ は

$$\Theta_{(l)} = K - K_{ab}\hat{r}^a\hat{r}^b + \tilde{K} = 0 \tag{45}$$

とかけることを利用する．なぜなら，

$$\begin{aligned}\tilde{K} + K &= \frac{1}{2}\tilde{q}^{ab}D_a(l_b - n_b) + \frac{1}{2}q^{ab}\nabla_a(l_b + n_b)\\ &= \frac{1}{2}\tilde{q}^{ab}D_a(l_b - n_b) + \frac{1}{2}(\tilde{q}^{ab} + \hat{r}^a\hat{r}^b)\nabla_a(l_b + n_b)\\ &= \tilde{q}^{ab}\nabla_a l_b + \hat{r}^a\hat{r}^b D_a\hat{\tau}_b \end{aligned}\tag{46}$$

$$\hat{r}^a\hat{r}^b D_a\hat{\tau}_b = \hat{r}^a\hat{r}^b K_{ab} \tag{47}$$

さらに，二つの extrinsic curvature を次のように分解する．

$$\tilde{K}_{ab} = \frac{1}{2}\tilde{K}\tilde{q}_{ab} + \tilde{S}_{ab} \tag{48}$$

$$K_{ab} = A\tilde{q}_{ab} + S_{ab} + 2\tilde{W}_{(a}\hat{r}_{b)} + B\hat{r}_a\hat{r}_b \tag{49}$$

ここで，$\tilde{S}_{ab}$ は $\tilde{K}_{ab}$ の traceless part で，S_{ab} は K_{ab} の S 上への射影の traceless part である．さらに，$\tilde{W}_a$ は $K_{ab}\hat{r}^b$ の S 上への射影で，$A := \frac{1}{2}K_{ab}\tilde{q}^{ab}$ で $B = K_{ab}\hat{r}^a\hat{r}^b$ である．この分解を先ほどの式に代入すると，

$$\begin{aligned}H_S + 2\hat{r}_a H_V^a = \tilde{\mathfrak{R}} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - 2\tilde{W}_a\tilde{W}^a - 2\tilde{W}^a\hat{r}^b D_b\hat{r}_a\\ + \frac{1}{2}\Theta_{(l)}(\Theta_{(l)} + 4B) + 2D_a\gamma^a\end{aligned}\tag{50}$$

ここで，$\sigma_{ab} := S_{ab} + \tilde{S}_{ab}$ は l^a の shear であり，$\tilde{q}_a^m\tilde{q}_b^n\nabla_m l_n - \frac{1}{2}\tilde{q}_{ab}\tilde{q}^{ab}\nabla_m l_n$ である．これからよく使う式を羅列しておく，

$$\hat{r}^a S_{ab} = 0 \tag{51}$$

$$q^{ab}S_{ab} = \tilde{q}^{ab}S_{ab} = 0 \tag{52}$$

$$\tilde{W}^a = K^{ab}\hat{r}_b - B\hat{r}^a \tag{53}$$

$$A = \tilde{q}^{ab}K_{ab} = \frac{1}{2}(K - B) \tag{54}$$

$$\hat{r}^a D_b\hat{r}_a = 0,\ (\hat{r}^a\hat{r}_a = 1) \tag{55}$$

$$\tilde{W}^a\hat{r}_a = 0 \tag{56}$$

$$\tilde{q}^{ab}\tilde{S}_{ab} = 0 \tag{57}$$

このフォローは次の式を確かめればよい．

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{ab}\tilde{K}^{ab} &= (\frac{1}{2}\tilde{K}\tilde{q}_{ab} + \tilde{S}_{ab})(\frac{1}{2}\tilde{K}\tilde{q}^{ab} + \tilde{S}^{ab})\\ &= \frac{1}{4}\tilde{K}^2\tilde{q}_{ab}\tilde{q}^{ab} + \tilde{S}_{ab}\tilde{S}^{ab}\\ &= \frac{1}{2}\tilde{K}^2 + \tilde{S}_{ab}\tilde{S}^{ab}\end{aligned}\tag{58}$$

$$
\begin{aligned}
K_{ab}K^{ab} &= (A\tilde{q}_{ab} + S_{ab} + 2\tilde{W}_{(a}\hat{r}_{b)} + B\hat{r}_a\hat{r}_b) \\
&\quad \times (A\tilde{q}^{ab} + S^{ab} + 2\tilde{W}^{(a}\hat{r}^{b)} + B\hat{r}^a\hat{r}^b) \\
&= 2A^2 + S_{ab}S^{ab} + 4\tilde{W}_{(a}\hat{r}_{b)}\tilde{W}^{(a}\hat{r}^{b)} + B^2
\end{aligned} \tag{59}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}K_{ab}\tilde{q}^{ab} \\
&= \frac{1}{2}K_{ab}(q^{ab} - \hat{r}^a\hat{r}^b) \\
&= \frac{1}{2}(K - K_{ab}\hat{r}^a\hat{r}^b) \\
&= \frac{1}{2}(K - B)
\end{aligned} \tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
2A^2 &= \frac{1}{4}(K - B)^2 \\
&= \frac{1}{2}(K^2 - 2KB + B^2)
\end{aligned} \tag{61}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}_{(a}\hat{r}_{b)}\tilde{W}^{(a}\hat{r}^{b)} &= \frac{1}{2}\tilde{W}_a\tilde{W}^a\hat{r}_b\hat{r}^b + \frac{1}{2}\tilde{W}_a\hat{r}^a\tilde{W}^b\hat{r}_b \\
&= \frac{1}{2}\tilde{W}_a\tilde{W}^a + 0
\end{aligned} \tag{62}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{ab}D_a\hat{r}_b &= (K^{ab} - Kq^{ab})D_a\hat{r}_b \\
&= (A\tilde{q}^{ab} + S^{ab} + 2\tilde{W}^{(a}\hat{r}^{b)} + B\hat{r}^a\hat{r}^b - Kq^{ab})D_a\hat{r}_b \\
&= A\tilde{q}^{ab}D_b\hat{r}_a + S^{ab}D_a\hat{r}_b + 2\tilde{W}^{(a}\hat{r}^{b)}D_a\hat{r}_b + B\hat{r}^a\hat{r}^bD_a\hat{r}_b - Kq^{ab}D_a\hat{r}_b \\
&= A\tilde{K} + S^{ab}D_a\hat{r}_b + \tilde{W}^a\hat{r}^bD_b\hat{r}_a - Kq^{ab}D_a\hat{r}_b \\
&= \frac{1}{2}(K - B)\tilde{K} + S^{ab}q_b^cD_a\hat{r}_c + \tilde{W}^a\hat{r}^bD_b\hat{r}_a - K(\tilde{q}^{ab} + \hat{r}^a\hat{r}^b)D_a\hat{r}_b \\
&= \frac{1}{2}K\tilde{K} - \frac{1}{2}B\tilde{K} + S^{ab}(\tilde{q}_b^c + \hat{r}^c\hat{r}_b)D_a\hat{r}_c + \tilde{W}^a\hat{r}^bD_b\hat{r}_a - K\tilde{K} \\
&= -\frac{1}{2}K\tilde{K} - \frac{1}{2}B\tilde{K} + S^{ab}\tilde{K}_{ab} + \tilde{W}^a\hat{r}^bD_b\hat{r}_a \\
&= -\frac{1}{2}K\tilde{K} - \frac{1}{2}B\tilde{K} + S^{ab}\tilde{S}_{ab} + \tilde{W}^a\hat{r}^bD_b\hat{r}_a
\end{aligned} \tag{63}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ab}\sigma^{ab} &= (S_{ab} + \tilde{S}_{ab})(S^{ab} + \tilde{S}^{ab}) \\
&= S_{ab}S^{ab} + \tilde{S}_{ab}\tilde{S}^{ab} + 2S_{ab}\tilde{S}^{ab}
\end{aligned} \tag{64}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Theta_{(l)}(\Theta_{(l)} + 4B) \\
&= \frac{1}{2}(K - B + \tilde{K})(K + 3B + \tilde{K}) \\
&= \frac{1}{2}(K^2 + 2BK + 2B\tilde{K} - 3B^2 + \tilde{K}^2 + 2K\tilde{K})
\end{aligned} \tag{65}
$$

これからさらに式を変形していく．

$$\begin{aligned}\gamma^a = \alpha^a + \beta^a &= \hat{r}^a D_b \hat{r}^a - \hat{r}^a D_b \hat{r}^b + K^{ab}\hat{r}_b - K\hat{r}_a \\ &= \hat{r}^b D_b \hat{r}^a + \tilde{W}^a - \Theta_{(l)}\hat{r}^a \end{aligned} \tag{66}$$

最後に加速度の項を

$$\hat{r}^b D_b \hat{r}_a = (N_R)^{-1}\tilde{D}_b N_R \tag{67}$$

と N_R に置き換える。すると最終的に，

$$\begin{aligned}H_S + 2\hat{r}_a H_V^a = \tilde{\mathcal{R}} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - 2\zeta^a\zeta_a + 2\tilde{D}_a\zeta^a \\ + \frac{1}{2}\Theta_{(l)}(\Theta_{(l)} + 4B - 4\tilde{K}) \end{aligned} \tag{68}$$

となる．ここで，

$$\zeta^a := \tilde{W}^a + \tilde{D}^a \ln N_R = \tilde{q}^{ab}\hat{r}^c\nabla_c l_b \tag{69}$$

よって，

$$\mathcal{F}^{(R)}_{matter} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\Delta H} N_R(\tilde{\mathcal{R}} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - 2\zeta^a\zeta_a)d^3V \tag{70}$$

これより，

$$\int_{\Delta H} N_R\tilde{\mathcal{R}}d^3V = 16\pi G\int_{\Delta H}\bar{T}_{ab}\hat{r}^a\xi^b_{(R)}d^3V + \int_{\Delta H}(|\sigma|^2 + 2|\zeta|^2)d^3V \tag{71}$$

ここで，$|\sigma|^2 = \sigma_{ab}\sigma^{ab}, |\zeta|^2 = \zeta^a\zeta_a$ とした．右辺第二項はボンディエネルギーの形をしている．この式の右辺を見れば分かるように，第一項は Dominant energy condition で正であるから，右辺は正である．よってホライズンは拡大する．ガウス・ボンネの定理を使うと，左辺は

$$\int_{\Delta H} N_R\tilde{\mathcal{R}}d^3V = \int_{R_1}^{R_2} dr(\oint_S \tilde{\mathcal{R}}d^2V) = 8\pi(R_2 - R_1) \tag{72}$$

よって，

$$(\frac{R_2}{2G} - \frac{R_1}{2G}) = \int_{\Delta H}\bar{T}_{ab}\hat{r}^a\xi^b_{(R)}d^3V + \frac{1}{16\pi G}\int_{\Delta H}(|\sigma|^2 + 2|\zeta|^2)d^3V \tag{73}$$

右辺を $E^{\xi_{(R)}}$ とおき，effective surface gravity を $\kappa_R := 1/2R$ とすると，

$$\frac{\kappa_R}{8\pi G}da = dE^{\xi_{(R)}} \tag{74}$$

となる．これが first law である．回転を考慮するときには，$\xi^a_{(R)}$ をキリングベクトル $t^a = N_R l^a - \Omega\varphi^a$ とおけばよい．すると，

$$\frac{dR}{2G} + \Omega dJ = \frac{\kappa_R}{8\pi G}da + \Omega dJ = dE^t \tag{75}$$

となる．ここで，

$$J_S^{(\varphi)} = -\frac{1}{8\pi G}\oint_S K_{ab}\varphi^a\hat{r}^b d^2V \tag{76}$$

σ_{ab} の証明.

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{ab} &= \tilde{K}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{K}\tilde{q}_{ab} \\ &= \tilde{q}^c_a\tilde{q}^d_b D_c\hat{r}_d - \frac{1}{2}\tilde{q}^{cd}\tilde{q}_{ab}D_c\hat{r}_a \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}S_{ab} &= K_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{q}_{ab} - W_{(a}r_{b)} - Br_ar_b \\ &= (\tilde{q}^d_b - r_br^d)D_a\hat{\tau}_d - \frac{1}{2}(\tilde{q}^{cd} + r^cr^d)\tilde{q}_{ab}D_c\hat{\tau}_d \\ &+\hat{r}^d\hat{r}_{(b}D_{a)}\hat{\tau}_d + \hat{r}^c\hat{r}^d\hat{r}_{(b}D_{a)}\hat{\tau}_d - \hat{r}^d\hat{r}^c\hat{r}_a\hat{r}_bD_c\hat{\tau}_d \\ &= \tilde{q}^d_bD_a\hat{\tau}_d - \frac{1}{2}\tilde{q}^{ac}\tilde{q}_{ab}D_a\hat{\tau}_d \end{aligned} \tag{78}$$

$$\tilde{S}_{ab} + S_{ab} = \tilde{q}^c_a\tilde{q}^d_bD_cl_d - \frac{1}{2}\tilde{q}^{cd}\tilde{q}_{ab}D_cl_a \tag{79}$$

途中の証明.

$$\begin{aligned}\zeta_a\zeta^a &= (\tilde{W}_a + \hat{r}^bD_b\hat{r}_a)(\tilde{W}^a + \hat{r}^bD_b\hat{r}^a) \\ &= \tilde{W}_a\tilde{W}^a + 2\tilde{W}_a\hat{r}^bD_b\hat{r}^a + \hat{r}^b(D_b\hat{r}_a)\hat{r}^c(D_c\hat{r}^a)\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_a\zeta^a &= \tilde{q}^c_aD_c\zeta^a \\ &= \tilde{q}^c_aD_c(\tilde{W}^a + \hat{r}^bD_b\hat{r}_a) \\ &= (q^c_a - \hat{r}_a\hat{r}^c)D_c(\tilde{W}^a + \hat{r}^bD_b\hat{r}^a) \\ &= D_a\tilde{W}^a - \hat{r}_a\hat{r}^cD_c\tilde{W}^a + (q^c_a - \hat{r}_a\hat{r}^c)D_c(\hat{r}^bD_b\hat{r}^a) \\ &= D_a\tilde{W}^a - \hat{r}_a\hat{r}^cD_c\tilde{W}^a + (q^c_a - \hat{r}_a\hat{r}^c)((D_c\hat{r}^b)(D_b\hat{r}^a) + \hat{r}^bD_cD_b\hat{r}^a \\ &= D_a\tilde{W}^a - \hat{r}_a\hat{r}^cD_c\tilde{W}^a \\ &+(D_a\hat{r}^b)(D_b\hat{r}^a) + \hat{r}^bD_aD_b\hat{r}^a - \hat{r}_a\hat{r}^c(D_c\hat{r}^b)(D_b\hat{r}^a) - \hat{r}_a\hat{r}^c\hat{r}^bD_cD_b\hat{r}^a \\ &= D_a\tilde{W}^a + \tilde{W}_a\hat{r}^cD_c\hat{r}^a \\ &+(D_a\hat{r}^b)(D_b\hat{r}^a) + \hat{r}^bD_aD_b\hat{r}^a - \hat{r}_a\hat{r}^c(D_c\hat{r}^b)(D_b\hat{r}^a) + \hat{r}^c\hat{r}_b(D_c\hat{r}_a)(D_b\hat{r}^a)\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}D_a\gamma^a &= D_a(\hat{r}^bD_b\hat{r}^a + \tilde{W}^a - \Theta_{(l)}\hat{r}^a) \\ &= (D_a\hat{r}^b)(D_b\hat{r}^a) + \hat{r}^bD_aD_b\hat{r}^a + D_a\tilde{W}^a - (D_a\Theta_{(l)})\hat{r}^a - \Theta_{(l)}D_a\hat{r}^a \\ &= (D_a\hat{r}^b)(D_b\hat{r}^a) + \hat{r}^bD_aD_b\hat{r}^a + D_a\tilde{W}^a - \hat{r}^aD_a\Theta_{(l)} - \Theta_{(l)}\tilde{K}\end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned}\zeta_a &= \tilde{W}_a + \hat{r}^bD_b\hat{r}_a \\ &= K_{ab}\hat{r}^b - B\hat{r}_a + \hat{r}^bD_b\hat{r}_a \\ &= \hat{r}^bD_a\hat{\tau}_b - \hat{r}_a\hat{r}^b\hat{r}^cD_c\hat{\tau}_b + \hat{r}^bD_b\hat{r}_a \\ &= \tilde{q}^b_a\hat{r}^c\nabla_cl_b\end{aligned} \tag{83}$$

iv **Further comments**

Hawking effect によってブラックホールからエネルギーが出てくるのだか

ら，ホライズンのエリアは減少する．それを考慮に入れてみたい．また，ここではドミナントエナジーコンディションを使ったが，ホライズン近傍ではそれは破れている．例えば２次元ブラックホールの場合 [16]，メトリックは，

$$ds^2 = (1-2M/r)dt^2 - (1-2M/r)^{-1}dr^2 \tag{84}$$

ここで，座標変換をすると，

$$\begin{aligned} u &= t - r^* \\ v &= t + r^* \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned} r^* &= r + 2M\ln(r/2M - 1) \\ ds^2 &= (1-2M/r)dudv \end{aligned} \tag{86}$$

ここで，ストレスエナジーテンソルは，

$$T_{\mu\nu} = -(\frac{\varepsilon^{-2}}{4\pi t_a t^a} + \frac{R}{24\pi})(\frac{t_\mu t_\nu}{t_a t^a} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}) + \theta_{\mu\nu} + O(\varepsilon) \tag{87}$$

ここで，$\theta_{\mu\nu}$ はコンフォーマルファクターを用いて次のように書ける．

$$\begin{aligned} \theta_{\bar{u}\bar{u}} &= -(12\pi)^{-1}C^{1/2}(C^{-1/2})_{,\bar{u}\bar{u}} \\ \theta_{\bar{v}\bar{v}} &= -(12\pi)^{-1}C^{1/2}(C^{-1/2})_{,\bar{v}\bar{v}} \\ \theta_{\bar{u}\bar{v}} &= \theta_{\bar{v}\bar{u}} = 0 \end{aligned} \tag{88}$$

ストレスエナジーテンソルをくりこみして，$t^a t_a = \pm 1$ とすると，

$$T_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + \frac{R}{48\pi}g_{\mu\nu} \tag{89}$$

これを計算してみると，

$$\begin{aligned} T_{uu} = T_{vv} &= (24\pi)^{-1}(\frac{3M^2}{2r^4} - \frac{M}{r^3}) \\ T_{uv} = T_{vu} &= (24\pi)^{-1}(\frac{2M^2}{r^4} - \frac{M}{r^3}) \\ T_{tt} &= (24\pi)^{-1}(\frac{7M^2}{r^4} - \frac{4M}{r^3}) \\ T_{tr} &= T_{rt} = 0 \\ T_{rr} &= -(24\pi)^{-1}(1-2M/r)^{-2}\frac{M^2}{r^4} \end{aligned} \tag{90}$$

となっていて，確かにホライズン近傍ではエネルギーが負になっている．また，negative energy inequality というものもある [13].

参考文献

[1] A.Ashtekar,S.Faihurst,B.Krishnan*Phys. Rev.*,**D 62** 104025 (2000)

[2] A.Ashtekar, B.Krishnan gr-qc/0407042 (2005)

[3] A.Ashtekar, C.Beetle, J.Lewadowski *Phys. Rev*,**D 64** 044016 (2001)

[4] S.A.Hayward *Phys. Rev*, **D 49** 6467 (1994)

[5] A.Ashtekar, C.Beetle, O.Dreyer, S.Fairhurst *Phys. Rev. Lett*, **85** (2000)

[6] A.Ashtekar, C.Beetle, S.Fairhurst gr-qc/9907068 (1999)

[7] A.Ashtekar, B.Krishnan *Phys. Rev. Lett* **89** 261101 (2002)

[8] A.Ashtekar, B.krishnan gr-qc/0308033 (2003)

[9] Bekenstein *Phys.Rev.* **D9** 3292 (1974)

[10] A.Ashtekar, M.Bojowald gr-qc/0504029 (2005)

[11] R.M.Wald gr-qc/9912119 (2000)

[12] T.Jacobson "Introductory Lectures on Black Hole Thermodynamics" lectures given at University of Utrecht

[13] L.H.Ford gr-qc/9707062 (1997)

[14] J.Traschen gr-qc/0010055 (2000)

[15] S.W.Hawking *Comm. Math. Phys.* **43** 199 (1975)

[16] P.C.W.Davies, S.A.Fulling, W.G.Unruh *Phys. Rev* **D 13** 2720 (1976)