Mathmatical Foundation of Loop Quantum Gravity

Shintaro Sawayama

平成 20 年 1 月 22 日

目 次

1 ADM decomposition

準備として、扱う多様体は $D+1$ 次元とし、Globally Hyperbolic($M = R\times\sigma$) だとする。また、空間的にコンパクトで境界はないとする。s はユークリッドでは + ローレンチアンでは − とし、X は M の local な座標である。量子化の方法には色々あるが、ここではよく研究されている正準量子化を行う。その方法として、重力の Lagrangian

$$S = \int_M d^{D+1}X\sqrt{|\det(g)|}R^{(D+1)} \tag{1.1}$$

を正準形式に直すことを考える。Lapse 関数 $N(t,x)$ と Shift ベクトル $N^a(t,x)$ を用いて、(1.1) は

$$S = \int_R dt\int_\sigma d^D X\{\dot{q}_{ab}P^{ab} - [N^a H_a + NH]\} \tag{1.2}$$

と Legendre 変換される。ここで

$$P^{ab} := \frac{S}{\dot{q}_{ab}} = -s\sqrt{\det(q)}[K^{ab} - q^{ab}K] \tag{1.3}$$

$$K_{ab} := q_a^c q_b^d \bigtriangledown_c n_d \tag{1.4}$$

$$H_a := -2q_{ac}D_b P^{bc} \tag{1.5}$$

$$H := -(\frac{s}{\sqrt{\det(q)}}[q_{ac}q_{bd} - \frac{1}{D-1}q_{ab}q_{cd}]P^{ab}P^{cd} + \sqrt{\det(q)}R) \tag{1.6}$$

である。P^{ab} は三次元メトリック q_{ab} に対する正準運動量で、K_{ab} は extrinsic curvature 、H_a と H はそれぞれ空間の座標の張り方と時間の尺度の取り方の無限小変換の生成子である。

N^a と N はラグランジの未定乗数になっており、H_a、H は拘束条件である。つまり、

$$H_a = 0, H = 0 \tag{1.7}$$

である。 正準変数 P^{ab}, q_{cd} は、

$$\{P^{ab}(x), q_{cd}(y)\} = \delta^a_{(c}\delta^b_{d)}\delta^{(D)}(x,y) \tag{1.8}$$

他は 0、を満たしている。P^{ab},q_{ab} は対称なテンソルなので、位相空間の次元は 12 である。また、拘束条件は 4 つあり、それを解くためにゲージ固定を 4 つしなくてはならない。それゆえ力学的自由度は 4 である。

Ashtekar 変数を用いた作用 q_{ab},P^{ab} を使った ADM 形式では、H が多項式形でなく、q^{ab} を含んでいて複雑な形をしている。それゆえ、H を量子

化して、それによって消滅される波動関数を求めることは不可能に思われる。しかし、Ashtekar 変数を用いることによって拘束条件をより簡単な形になおすことができる。

まず D 次元 tetrad(coD-bein) e_a^i

$$q_{ab} := \delta_{ij} e_a^i e_b^j \tag{1.9}$$

とそれに独立な one-form K_a^i

$$-2sK_{ab} := sgn(\det((e_a^i)))K_{(a}^i e_{b)}^i \tag{1.10}$$

を用意する。これらのテンソルは D 次元空間 σ に住んでいるとする。(2.2) より明らかに、

$$G_{ab} := K_{[a}^j e_{b]}^j = 0 \tag{1.11}$$

という拘束がある。今、

$$E_j^a := \frac{1}{(D-1)!} \epsilon^{aa_1 \cdot\cdot a_{D-1}} \epsilon_{jj_1 \cdot\cdot j_{D-1}} e_{a_1}^{j_1} \cdot\cdot e_{a_{D-1}}^{j_{D-1}} \tag{1.12}$$

とおくと、(2.3) は、

$$G_{jk} := K_{a[j} E_{k]}^a = 0 \tag{1.13}$$

と同値だとわかる。

次の量を定義する。

$$q_{ab} := E_a^j E_b^j |\det((E_l^c))|^{2/(D-1)}, P^{ab} := |\det((E_l^c))|^{-2/(D-1)} E_k^a E_k^d K_{[d}^j \delta_{c]}^b E_j^c \tag{1.14}$$

さらに、E_j^a,K_a^j に次のポアソン括弧を定義する。

$$\{E_j^a, E_k^b\} = \{K_a^j, K_b^k\} = 0, \{E_i^a, K_b^j\} = \delta_b^a \delta_i^j \delta(x,y) \tag{1.15}$$

するとここで定義した q_{ab},P^{ab} は、$G_{jk} = 0$ の時に前章で定義したものと同じポアソン括弧の関係を持つことが確かめられる。まず、q_{ab} は E_a^i のみからできているので、

$$\{q_{ab}(x), q_{cd}(y)\} = 0 \tag{1.16}$$

また、

$$\begin{aligned}
\{P_{ab}, q_{cd}\} &= (\frac{1}{2}[q^{a(e}q^{b)f} - q^{ab}q^{ef}]E_f^j)(x)\{K_e^j(x), (|\det(E)|^{2/(D-1)}E_c^k E_d^k)(y)\} \\
&= (\frac{1}{2}[q^{a(e}q^{b)f} - q^{ab}q^{ef}]E_f^j)(x)[\frac{2}{D-1}q_{cd}(x)\frac{\{K_e^j(x), |\det(E)|(y)\}}{|\det(E)|(x)} \\
&\quad + 2(\det(q)E_{(c}^k(x)\{K_e^j(x), E_{d)}^k(y)\}] \\
&= ([q^{a(e}q^{b)f} - q^{ab}q^{ef}][-\frac{1}{D-1}q_{cd}q_{ef} + q_{e(c}q_{d)f}])(x)\delta(x,y) \\
&= \delta_{(c}^a \delta_{d)^b}\delta(x,y)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

となる。最後に

$$\{P^{ab}(x), P^{cd}(y)\} = -\frac{\det(e)}{8}[q^{bc}G^{ab} + q^{bd}G^{ac} + q^{ac}G^{bd} + q^{ad}G^{bc}](x)\delta(x,y) \tag{1.18}$$

$$G_{jk} := K_{aj}E^a_k \tag{1.19}$$

が得られるが、これは $G_{ab} = 0$ のとき 0 である。

新しい変数で作用を書くと、

$$S := \int_R dt \int_\sigma d^D x(\dot{K}^j_a E^a_j - [-\Lambda^{jk}G_{jk} + N^a H_a + NH]) \tag{1.20}$$

$$H_a := -D_b[K^j_a E^b_j - \delta^b_a K^j_c E^c_j] \tag{1.21}$$

$$H := -\frac{s}{4\sqrt{\det(q)}}(K^l_a K^j_b - K^j_a K^l_b)E^a_j E^b_l - \sqrt{\det(q)}R \tag{1.22}$$

と書き換えられる。ここで G は三次元 tetrad の生成子である。

ここまでは、ADM-Action を tetrad を使って書き換えたに過ぎない。ハミルトニアン拘束条件を多項式形に書くには次の微分が必要である。

$$D_a u_b..v_j := (D_a u_b) + .. + u_b..(D_a v_j) \tag{1.23}$$

ここで、

$$D_a := \partial_a v_j + \Gamma_{ajk} v^k \tag{1.24}$$

である。さらにこの微分は

$$D_a e^j_b = 0 \tag{1.25}$$

を満たすとする。この時接続は唯一つに定まり、

$$\Gamma_{ajk} = -e^b_k[\partial_a e^j_b - \Gamma^c_{ab} e^j_c] \tag{1.26}$$

となる。

Ashtekar 形式に直すためにこれから 2 回正準変換をする。以下 $D = 3$ とする。始めは Weyl 変換と呼ばれるもので、

$$(K^j_a, E^a_j) \mapsto ({}^{(\beta)}K^j_a := \beta K^j_a, {}^{(\beta)}E^a_j := E^a_j/(\beta)) \tag{1.27}$$

である。この時、三次元 tetrad の回転の拘束条件は、

$$G_j = \epsilon_{jkl} K^k_a E^a_l = \epsilon_{jkl}({}^{(\beta)}K^k_a)({}^{(\beta)}E^a_l) \tag{1.28}$$

となり、不変である。

次は affin 変換と呼ばれる変換である。まず、$D_a E^a_j = 0$ より、

$$D_a E^a_j = [D_a E^a]_j + \Gamma_{aj}{}^k E^a_k = \partial_a E^a_j + \epsilon_{jkl}\Gamma^k_a E^a_l = 0 \tag{1.29}$$

により、Γ^k_a を定義する。E^a_i の関数として書けて、

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_a &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}e^b_k[e^j_{a,b} - e^j_{b,a} + e^c_j e^l_a e^l_{c,b}] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}E^b_k[E^j_{a,b} - E^j_{b,a} + E^c_j E^l_a E^l_{c,d} \\
&\quad + \frac{1}{4}\epsilon^{ijk}E^b_k[2E^j_a\frac{(\det E)_{,b}}{\det E} - E^j_b\frac{(\det E)_{,a}}{\det E}]
\end{aligned} \tag{1.30}$$

となっている。これより、Γ^j_a は E^a_j の零次の関数になっていることが分かる。つまり、

$$({}^{(\beta)}\Gamma^j_a) := \Gamma^j_a({}^{(\beta)}E) = \Gamma^j_a = \Gamma^j_a({}^{(1)}E) \tag{1.31}$$

(β に依らない) となっている。それと ${}^{(\beta)}q_{ab} = \beta({}^{(1)}q_{ab})$ より、

$$D_a({}^{(\beta)}E^a_j) = 0 \tag{1.32}$$

がいかなる β においても成り立っている。これより、三次元 tetrad の回転に関する拘束条件は

$$\begin{aligned}
G_j &= 0 + \epsilon_{ijk}({}^{(\beta)}K^k_a)({}^{(\beta)}E^a_l) \\
&= \partial_a({}^{(\beta)}E^a_j) + \epsilon_{ijk}[\Gamma^j_a + ({}^{(\beta)}K^k_a)]({}^{(\beta)}E^a_l) \\
&=: {}^{(\beta)}D_a{}^{(\beta)}E^a_j
\end{aligned} \tag{1.33}$$

となる。これから、新しい接続として、

$$({}^{(\beta)}A^j_a) := \Gamma^j_a + ({}^{(\beta)}K^j_a) \tag{1.34}$$

をとってみる。これは Ashtekar 接続の一般形である。

上で定めた ${}^{(\beta)}A^j_a$ と ${}^{(\beta)}E^a_j$ が正準共役な量、つまり

$$\{{}^{(\beta)}A^j_a, {}^{(\beta)}A^k_b\} = \{{}^{(\beta)}E^a_j, {}^{(\beta)}E^b_k\} = 0 \tag{1.35}$$

$$\{{}^{(\beta)}E^a_j, {}^{(\beta)}A^j_b\} = \delta^b_a\delta^k_j\delta(x,y) \tag{1.36}$$

であることを確かめる。Γ^i_a と E^b_j の交換関係は零のため、考えるべきは Γ^i_a, K^j_b の交換関係である。(2.27) が満たされるなら、

$$\beta[\{\Gamma^j_a(x), K^k_b(y)\} - \{\Gamma^k_b(y), K^j_a(x)\}] = \beta[\frac{\delta\Gamma^j_a(x)}{\delta K^b_k(y)} - \frac{\delta\Gamma^k_b(y)}{\delta K^a_j(x)}] = 0 \tag{1.37}$$

が成り立っているはずである。つまり、ポテンシャル

$$\Gamma^j_a = \frac{\delta F}{\delta E^a_j} \tag{1.38}$$

が存在すればよい。F の候補として、

$$F = \int_\sigma d^3x E^a_j(x)\Gamma^a_j(x) \tag{1.39}$$

が挙げられる。これは実際ポテンシャルになっていることを示す。それには、$\int d^3x E^a_j(x)\delta\Gamma^j_a(x) = 0$ を言えば十分である。(2.22) より、

$$e^a_i \delta\Gamma^i_a = -\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\partial_a[(\delta e^j_b)e^j_c] \tag{1.40}$$

が、得られる。これから、

$$\int_\sigma d^3x E^a_j \delta\Gamma^j_a = -\frac{1}{2}\int_\sigma d^3x \partial_a(\epsilon^{abc}\delta e^j_b e^j_c) = \frac{1}{2}\int_{\partial\sigma} dS_a \epsilon^{abc} e^j_b \delta e^j_c \tag{1.41}$$

であり、いまは多様体に境界がないとしているので、この積分は零である。よって、${}^{(\beta)}A^j_a$ と ${}^{(\beta)}E^k_b$ が正準共役だと確かめられた。

次に残りの拘束条件を新しい変数で書き直す。まず、次の曲率を定義する。

$$R^j_{ab} := 2\partial_{[a}\Gamma^j_{b]} + \epsilon_{jkl}\Gamma^k_a\Gamma^l_b \tag{1.42}$$

$${}^{(\beta)}F^j_{ab} := 2\partial_{[a}{}^{(\beta)}A^j_{b]} + \epsilon_{jkl}{}^{(\beta)}A^{k(\beta)}_a A^l_b \tag{1.43}$$

共変微分との関係は

$$[D_a, D_b]v_j = R_{abjl}v^l = \epsilon_{jkl}R^k_{ab}v^l \tag{1.44}$$

$$[{}^{(\beta)}D_a, {}^{(\beta)}D_b]v_j = {}^{(\beta)}F_{abjl}v^l = \epsilon_{jkl}{}^{(\beta)}F^k_{ab}v^l \tag{1.45}$$

である。${}^{(\beta)}F^j_{ab}$ を $\Gamma, {}^{(\beta)}K$ で書けば、

$${}^{(\beta)}F^j_{ab} = R^j_{ab} + 2\beta D_{[a}K^j_{b]} + \beta^2\epsilon_{jkl}K^j_aK^k_b \tag{1.46}$$

これを ${}^{(\beta)}E^b_j$ で縮約させると、

$${}^{(\beta)}F^j_{ab}{}^{(\beta)}E^b_j = \frac{R_{ab}E^b_j}{\beta} + 2D_{[a}(K^j_{b]}E^b_j) + \beta K^j_aG_j \tag{1.47}$$

となる。上式の第一項が消えることを言う。$R_{abcd} = R_{abdc}$ より、

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon^{efc}R^j_{ef}e^k_c &= 0 \\ \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{efc}R_{ef}e^k_ce^i_a = \frac{1}{2}E^b_j\epsilon_{cab}\epsilon^{efc}R^j_{ae} &= R^j_{ab}E^b_j \end{aligned} \tag{1.48}$$

このことと、(2.13) を使って、

$${}^{(\beta)}F^j_{ab}{}^{(\beta)}E^b_j = H_a + {}^{(\beta)}K^j_aG_j \tag{1.49}$$

次に (2.38) を $\epsilon^{(\beta)}E^{a(\beta)}_kE^b_l$ で縮約させると、

$$\begin{aligned} {}^{(\beta)}F^j_{ab}\epsilon_{jkl}{}^{(\beta)}E^{a(\beta)}_kE^b_l &= -\det(q)\frac{R_{abkl}e^a_ke^b_l}{(\beta)^2} - 2\frac{E^a_jD_aG_j}{\beta} \\ &\quad + (K^j_aE^a_j)^2 - (K^j_bE^a_j)(K^k_aE^b_k) \end{aligned} \tag{1.50}$$

となっている。この式を (2.39) を使って変形させると、

$$
\begin{aligned}
& {}^{(\beta)}F^j_{ab}\epsilon_{jkl}{}^{(\beta)}E^a_k{}^{(\beta)}E^b_l + 2\frac{E^a_j D_a G_j}{\beta} \\
= & \sqrt{\det(q)}[-\sqrt{\det(q)}\frac{R}{\beta^2} - \frac{-(K^j_a E^a_j)^2 + (K^j_b E^a_j)(K^k_a E^b_k)}{\sqrt{\det(q)}}] \\
= & \frac{\sqrt{\det(q)}}{\beta^2}[-\sqrt{\det(q)}R - \beta^2\frac{-(K^j_a E^a_j)^2 + (K^j_b E^a_j)(K^k_a E^b_k)}{\sqrt{\det(q)}}] \\
= & \frac{\sqrt{\det(q)}}{\beta^2}[H + (\frac{s}{4} - \beta)\frac{-(K^j_a E^a_j)^2 + (K^j_b E^a_j)(K^k_a E^b_k)}{\sqrt{\det(q)}} \\
= & 4s\sqrt{\det(q)}[-\frac{s}{4\sqrt{\det(q)}}[-(K^j_a E^a_j)^2 + (K^j_b E^a_j)(K^k_a E^b_k)] - \frac{s}{4\beta^2}\sqrt{\det(q)}R] \\
= & 4s\sqrt{\det(q)}[H - (1 + \frac{s}{4\beta^2})\sqrt{\det(q)}R] \qquad (1.51)
\end{aligned}
$$

となる。

以上の結果をまとめると、正準変数は E^a_j と A^j_a で、拘束条件は

$$
\begin{aligned}
G_j &= {}^{(\beta)}D_a{}^{(\beta)}E^a_j = \partial_a{}^{(\beta)} + \epsilon_{jkl}{}^{(\beta)}A^j_a{}^{(\beta)}E^a_j \qquad (1.52) \\
H_a &= {}^{(\beta)}F^j_{ab}E^b_j \qquad (1.53) \\
H &= [\beta^{2(\beta)}F^j_{ab} + (\beta^2 - \frac{s}{4})\epsilon_{jmn}{}^{(\beta)}K^m_a{}^{(\beta)}K^n_b]\frac{\epsilon_{jkl}{}^{(\beta)}E^a_k{}^{(\beta)}E^b_l}{\sqrt{\det{}^{(\beta)}q\beta}} \qquad (1.54)
\end{aligned}
$$

である。E と A はそれぞれ 9 個づつあり、拘束条件は 7 個である。ゲージ固定を考えると、最後に残る力学的自由度は 18-14=4 である。

2 $C^\star$ algebla

前回は拘束条件が、

$$
\begin{aligned}
G_j &= {}^{(\beta)}D_a{}^{(\beta)}E^a_j = \partial_a{}^{(\beta)}E^a_j + \epsilon_{jkl}{}^{(\beta)}A^j_a{}^{(\beta)}E^a_j \qquad (2.1) \\
H_a &= {}^{(\beta)}F^j_{ab}E^b_j \qquad (2.2) \\
H &= [\beta^{2(\beta)}F^j_{ab} + (\beta^2 - \frac{s}{4})\epsilon_{jmn}{}^{(\beta)}K^m_a{}^{(\beta)}K^n_b]\frac{\epsilon_{jkl}{}^{(\beta)}E^a_k{}^{(\beta)}E^b_l}{\sqrt{\det{}^{(\beta)}q\beta}} \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

で、正準変数は E^a_j と A^j_a であることまで分かった。今回は、ガウスゲージ $G_j = 0$ を解くことを考える。

拘束条件を解くとは、具体的に二つの方法によってである。一つは、tetrad の向きを最初から固定してしまう方法である。この方法は、格子を使った時には便利だが、一般の場合は向いていない。もう一つは、初めからゲージ不変な空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ で考える方法である。今回は後者について説明する。

以後、考えるのは $SL(2,C)$(ローレンツ)、及び $SU(2)$(ユークリッド) とする。$e'^i = U^i_j e^i$ のようにゲージ変換すると、接続は

$$A'_a = UA_aU + UdU^{-1} \tag{2.4}$$

のように変化する。ここで、3 次元空間 σ 上の閉じた、方向を持ったループ α を考え、その上で接続をバンドルのベクトルとして平行移動すると、

$$P(\alpha, A) := \mathcal{P}\exp\oint_\alpha \mathcal{A} \tag{2.5}$$

となる。ここで $\mathcal{P}$ は経路に沿った順序積である。これを内部変数でトレースを取った T 変数は

$$T(\alpha, A) := \frac{1}{2}Tr(\mathcal{P}\exp\oint_\alpha \mathcal{A}) \tag{2.6}$$

である。

この T 変数が、ゲージ不変であることを示す。まずループが n 個に区切られているとし、i 番めの点から $i+1$ 番めの点へはベクトル δs_i で結ばれているとする。n を十分大きくとれば、

$$P = (1 + A_n\delta s_n)(1 + A_{n-1}\delta s_{n-1})\cdots(1 + A_1\delta s_0) \tag{2.7}$$

となっている。ゲージ変換をすれば、

$$(1 + A'_i\delta s_n)(x_i) = U(x_{i+1})(1 + A_i(x_i)\delta s_n)U^{-1}(x_i) \tag{2.8}$$

となる。なぜなら

$$\begin{aligned} U(x_{i+1})(1 + A_i(x_i)\delta s_n)U^{-1}(x_i) &= U(x_i + \delta s_i)(1 + A_i(x_i)\delta s_n)U^{-1}(x_i) \\ &= (U(x_i) + dU\delta s_i)(1 + A_i(x_i)\delta s_n)U^{-1}(x_i) \\ &\approx 1 + UAU^{-1}\delta s_i + UdU^{-1}\delta s_i \qquad (2.9) \end{aligned}$$

となるためである。この結果を (7) 式に代入すると、

$$P = U(x_0)(1 + A_n\delta s_n)(1 + A_{n-1}\delta s_{n-1})\cdots(1 + A_0\delta s_0)U^{-1}(x_0) \tag{2.10}$$

となるので、T 変数は不変である。

以上の考察より、あらゆるループを持ってくれば T 変数は、$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の全ての関数をはっているのではないかと思われる。

これを詳しく見ていくこととする。

まずループを定義する。$\mathcal{L}_{\S,}$ は、$x_0 \in \Sigma$ を基点とする連続で、区分的に smooth なループとする。ここでループとは $\alpha : S^1 \to \Sigma$ であり、パラメトライズに依らないとする。

さらにこのループに同値類を定める。

$$\alpha \equiv \beta \ mod\ R\ if\ T_\alpha = T_\beta\ for\ all\ A \in \mathcal{A} \tag{2.11}$$

そうすると、以下の同値関係が生まれる。

$$\alpha \circ \beta \equiv \beta \circ \alpha \tag{2.12}$$

$$\alpha \equiv \alpha^{-1} \tag{2.13}$$

$$\alpha \circ \alpha^{-1} \equiv x_0 \tag{2.14}$$

$$\alpha \circ \rho \circ \rho^{-1} \equiv \alpha \tag{2.15}$$

ここで ρ は α につながっている任意の経路である。L_{x_0}/R の空間での積を

$$[\alpha]_R[\beta]_R := [\alpha \circ \beta]_R \tag{2.16}$$

で定めれば、L_{x_0}/R は可換群の構造を持っていることがわかる。
2×2 行列で行列式が 1 の行列 C,D は次の恒等式をみたす。

$$TrCTrD \equiv Tr(CD) + Tr(CD^{-1}) \tag{2.17}$$

これより、T 変数は、

$$T_\alpha T_\beta = \frac{1}{2}(T_{\alpha\circ\beta} + T_{\alpha\circ\beta^{-1}}) \tag{2.18}$$

を満たしている。これによって T 変数の関数空間の積を定義する (和は普通に行なうとする)。するとある代数 $\mathcal{HA}$ が出来ることが分かる。さらにポアソン括弧が可換なため、以後この代数は可換なものとして扱う。この代数の性質を調べるために、ループ空間のベクトル空間 FL_{x_0} を考える。和は通常と同じように定義されているとして、積は、

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j\alpha_j) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \alpha_i \alpha_j \tag{2.19}$$

で定義する。ここで

$$\alpha\beta := \frac{1}{2}(\alpha \circ \beta + \alpha \circ \beta^{-1}) \tag{2.20}$$

であるとする。ここで先ほどの同値類 R より、より一般的な同値関係 K を次のように定める。

$$K := \{x = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i | \sum_{i=1}^{n} a_i T(\alpha_i, A) = 0 \ for \ all \ A \in \mathcal{A} \tag{2.21}$$

いま map $FL_{x_0} \to \mathcal{HA}$ は $\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \to \sum_{i=1}^{n} a_i T_{\alpha_i}$ によって与えられれるで、準同型定理より $FL_{x_0}/K \simeq \mathcal{HA}$ となる。この代数は次の性質を持つ、

1. 結合法則を満たし、可換である。
2. 単位元 $e := [x_0]_K$ をもつ。
3. もし $\alpha \equiv \beta \ mod \ R$ ならば $T_\alpha = T_\beta$ したかって $\alpha - \beta \in K$ 、したがって FL_{x_0}/K は T_α が R の同値類のみによるということを満たしている。

4. Mandelstam 恒等式を満たす。

$\mathcal{HA}$ が可換な代数のため、$C^\star$ 代数にすることができたら、Gel'fand のスペクトル定理が使えると予想される。
まず $C^\star$ 代数を説明する。
代数 $\mathcal{A}$ があった時 involution とは次の map である。$\star : \mathcal{A} \to \mathcal{A}; a \to a$ は次を満たす。

1)$(za + z'b)^\star = \bar{z}a^\star + \bar{z}'b^\star$
2)$(ab)^\star = b^\star a^\star$
3)$(a^\star)^\star = a$

involution が定義された代数を $\star$ 代数と言う。
norm の定義された代数 $\mathcal{A}$ とは、norm$\| \ . \ \|: \mathcal{A} \to \mathcal{R}^+$ という map であり、次の性質を満たす。

1)$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$
2)$\|za\| = |z|\|a\|$
3)$\|a\| \Leftrightarrow a = 0$
4)$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$

さらに involution が定義されている時には $\|a^\star\| = \|a\|$ も要請する。
norm から 2 つの代数に $d(a, b) = \|a - b\|$ のように距離が与えられる。この距離において代数 $\mathcal{A}$ が完備 (任意のコーシー列が収束する) ならば、その代数は Banach 代数と呼ばれる。
$C^\star$ 代数とは、Banach 代数で involution が定義されていて、$\|a^\star a\| = \|a\|^2$ を満たしている時に言う。
以下、$SU(2)$ のみを扱うとする。$\mathcal{HA}$ の場合。距離を、

$$\| \sum_{i=1}^{n} a_i [\alpha_i]_K \| := \sup_{[A]_\mathcal{G} \in \mathcal{A}/\mathcal{G}} | \sum_{i=1}^{n} a_i T_{\alpha_i}([A]_\mathcal{G}) | \tag{2.22}$$

で定め、involution の作用を、

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i [\alpha_i]_K)^\star := \sum_{i=1}^{n} \bar{a_i} [\alpha_i]_K \tag{2.23}$$

で定めれば、$C^\star$ 代数になる。ここで、$SL(2, C)$ の時には今と同様な方法で距離と innvolution 作用を定義できないことに注意する。
$C^\star$ 代数 $\mathcal{A}$ の重要なところは次の定理が成り立つためである。

定理1
全ての可換 $C^\star$ 代数は Gel'fand 変換において、Δ 上の全ての連続な関数からなる空間 $C(\Delta)$ に等長空間で同型である。ここで Δ は可換 $C^\star$ 代数上の関数

(スペクトル) であり、Δ と $\mathcal{A}$ の最大イデアル I の集合は一対一の関係 $\Delta \to I; h \to ker(h)$ $(h \in \Delta)$ を満たしている。また、この関係は homomorphism である。また、Gel'fand 変換とは $\mathcal{A} \to C(\Delta); x \to \tilde{x}$ ここで $\tilde{x}(h) = h(x)$ $(h \in \Delta)$ となる変換である。

Δ には Gel'fand トポロジーが定義できる。

定義１
可換 $C^\star$ 代数の Gel'fand トポロジーとは Δ の弱い $\star$ トポロジーである。ここで、弱い $\star$ トポロジーは点列の収束によって与えられる。つまり、Δ 上の点列は $\mathcal{A}$ の上の連続関数の点列が収束するならば収束する。
このようにトポロジーを定義すると、次の定理が成り立つ、

定理２
可換 $C^\star$ 代数はその Gel'fand トポロジーにおいてコンパクトでハウスドルフである。

さらに、ヒルベルト空間との関係として、次の定理がある。

定理３
任意の可換な $C^\star$ 代数は、あるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の bounded operater $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に同型である。

3 GNS construction and Measurement Theory

前回は可換 $C^\star$ 環である $\overline{\mathcal{HA}}$ を定義した。また、次の定理が成り立つことを見た。

定理３
$\mathcal{A}$ を $C^\star$ 環とする。このとき $\mathcal{A}$ はあるヒルベルト空間の bounded operator からなる、ノルムで閉じた、自己随伴の部分環に $\star$ 同型である。
今回は $C^\star$ 環が $\overline{\mathcal{HA}}$ のとき、$\star$ 同型となる写像（表現）とヒルベルト空間がどのように表せるかを見る。

定義２
表現とは $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ という写像で $\star$ 準同型である。ここで　$\star$ 準同型とは以下が成り立つことである。

$(1) \pi(\alpha A + \beta B) = \alpha\pi(A) + \beta\pi(B)$

$(2)\pi(AB) = \pi(A) + \pi(B)$
$(3)\pi(A^\star) = \pi(A)^\star$

いま、表現として $\hat{R}$ 　とする。内積が定義されるならば $\Gamma(x) := \langle\Psi, \hat{R}\Psi\rangle$ として x の関数が定まる。ここで Gel'fand 変換 $x \to \tilde{x}$ を使うと、$C(\Delta)$ 関数が $\tilde{\Gamma}(\tilde{x}) := \Gamma(x)$ として定義される。ここで Δ はコンパクト、ハウスドルフ空間だったので、Riez の表現定理が使えて、$\Gamma(x)$ は次のように書ける。

$$\langle\Psi, \hat{R}\Psi\rangle = \int_\Delta d\mu(h)\tilde{x}(h) = \int_\Delta d\mu(h)h(x) \tag{3.1}$$

ここで μ は Δ 上の regular な確率 Borel 測度である。Riez の表現定理、regular な確率 Borel 測度については後述。
これから π が状態に $C^\star$ 環の単なる積として作用することができることを見る。それには GNS-construction を使う。GNS-construction とは以下で定義されたものである。

定義 3
$\omega_\psi(b) := \langle\psi, b\psi\rangle$ とする。ある ω に対して null 空間 $\mathcal{N}_\omega := \{a \in \mathcal{A}; \omega(a^\star a) = 0\}$ を定める。ここで GNS 表現とは、

$$\pi_\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)\ ; \mathcal{H}_\omega := \overline{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega} := \overline{\{[a]; a \in \mathcal{A}\}} \tag{3.2}$$

である。ここで上付きの bar はノルムをとることを意味している。また、[.] は $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega; a \to [a] := \{a + b;\ b \in \mathcal{N}_\omega\}$ となる商空間への写像である。GNS 表現は単純な積として定義する。

$$\pi_\omega(a)[b] := [ab] \tag{3.3}$$

この写像は連続的である。ヒルベルト空間は次の内積をもって定義される。

$$\langle[a], [b]\rangle_{\mathcal{H}_\omega} := \omega(a^\star b) \tag{3.4}$$

いま、ヒルベルト空間の状態として $\Omega_\omega := [1]$ をもってくるとこれは $\mathcal{H}_\omega$ に対して cyclic である。つまり、ヒルベルト空間は $\{\pi_\omega(a)\Omega_\omega;\ a \in \mathcal{A}\}$ によって張られる。さらに、

$$\omega(a) = \langle\Omega_\omega, \pi_\omega(a)\Omega_\omega\rangle_{\mathcal{H}_\omega} \tag{3.5}$$

となっている。

今、具体的な $C^\star$ 環 $\overline{\mathcal{HA}}$ に GNS-construction を適用する。まず、$\omega(a^\star a) = 0$

ならば $a|\psi\rangle = 0$ だが、$\overline{\mathcal{HA}} := \mathcal{FL}_{x_0}/K$ よりそのような $a \in \overline{\mathcal{HA}}$ は 0 だけである。よって、$\mathcal{N}_\omega = \{0\}$ がわかる。これによってヒルベルト空間は $\overline{\mathcal{HA}}$ 全体を覆っていることになる。また、$\overline{\mathcal{HA}}$ は Gel'fand 変換によってスペクトル Δ 上の連続な関数空間と同一視できる。したがって、ヒルベルト空間は Δ 上の連続な関数全体を覆っていることが分かる。また、オペレーターとして、T 変数をオペレーター化したものを考えると、これは $\Psi = [1]$ のとき $h[\alpha]_K$ はヒルベルト空間を張っていて（cyclic）、単なる積としてヒルベルト空間に作用する。

$$(\hat{T}_\alpha \Psi)(h) := h([\alpha]_K)\Psi(h) \tag{3.6}$$

以下 Riez の表現定理を説明する。参考文献としては Walter　Rudin の Real　and Complex　Analysis の一章二章がある。

定義 4

X を集合とする。次の条件を満たす X の部分集合の集まり $\mathcal{U}$ を σ 代数という。

1)

1)$X \in \mathcal{U}$

2)$U \in \mathcal{U}$ ならば $X - U \in \mathcal{U}$

3)$\mathcal{U}$ は加算個の和によって閉じている。つまり、$U_n \in \mathcal{U}$ ならば $\cup_n^\infty U_n \in \mathcal{U}$。

集合 $U \in \mathcal{U}$ は測定可能であるといい、σ 代数の入った X を測定可能空間という。

2)

X を測定可能空間とし、Y を位相空間とする。関数 $f : X \to Y$ は、どんな開集合 $V \in Y$ に関しても $f^{-1}(V) \in X$ が X の測定可能な部分集合になっているとき、測定可能という。

3)

X を位相空間とする。X の最小の σ 代数、つまりすべての開集合を含むもの、は Borel の σ 代数と呼ばれる。Borel の σ 代数の要素を Borel 集合という。

定義 5

測定可能空間 $(X,\mathcal{U})$ 上の複素測度とは $\mu : \mathcal{U} \to C - \infty; U \to \mu(U)$ で、加算和可能な関数である。つまり、

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \tag{3.7}$$

をみたす。ここで U_k は相互に交わることのない測定可能な部分集合である。ここで μ は positive　semidefinite($\mu : \mathcal{U} \to R^+ \cup 0, \infty$) であってもよい。ここで $0 \cdot \infty = 0$ と定める。また、$\mu(X) = 1$ のとき確率測度という。$(X,\mathcal{U},\mu)$

を測定可能空間という。

定義 6

関数 $s:X\to C$ はその値が有限個の値からなるとき simple という。もし、$z_k\in C, k=1,..,N$ で $S_k=s^{-1}(\{z_k\})$ ならば、$s=\sum_{k=1}^{N} z_k\chi_{S_k}$ となる。ここで $\chi_S(x)=1\ if\ x\in S\ otherwise\ \chi_S(x)=0$ であり、χ_S は $S\subset X$ の特性関数と呼ばれる。

定理 5

$f:X\to[0,\infty]$ が測定可能だとする。このとき測定可能で simple な関数の、次のような列 s_n が存在する。

$a)0\leq s_1\leq s_2\leq ...\leq f$
$b)\lim_{n=1} s_n(x)=f(x)$

定義 7

1)
測定可能空間 $(X,\mathcal{U},\mu)$ 上の simple な測定可能関数 $s=\sum_{k=1}^{N} z_k\chi_{S_k}\ (z_k>0)$ に対して、

$$\mu(s):=\int_X d\mu(x)s(x):=\sum_{k=1}^{N} z_k\mu(S_k) \tag{3.8}$$

を定める。一般の測定可能関数 $f:X\to[0,\infty]$ に対しては、

$$\mu(f):=\sup_{0\leq s\leq f}\mu(s) \tag{3.9}$$

とさだめる。ここで $\mu(f)$ はルベーグ積分と呼ばれる。
2)
$\mu(f)=0$ ならば $f=0$ となるとき μ を positive definite という。

定義 8

1) 位相空間 X はすべての点で、その開近傍の閉包にコンパクトなものが存在するとき局所コンパクトという。
2) 位相空間 X の部分集合 S は、それが加算個のコンパクト集合の和集合のとき σ コンパクトという。

定義 9

1)Borel 代数上に定義された測度 μ は Borel 測度と呼ばれる。
2)Borel 集合 S とその上の正の Borel 測度は次の条件を満たすとき outer regular と呼ばれる。

$$\mu(S)=\inf\{\mu(O);S\subset O;O\in\mathcal{U}\ open\} \tag{3.10}$$

3)Borel 集合 S とその上の正の Borel 測度は次の条件を満たすとき inner regular と呼ばれる。

$$\mu(S)=\sup\{\mu(K);S\supset K;K\in\mathcal{U}\ compact\} \tag{3.11}$$

4)μ が正の Borel 測度で、inner かつ outer regular なら μ は regular と呼ばれる。

定理６ (Riez の表現定理)

X を局所コンパクトでハウスドルフ空間だとする。$\Lambda : C_0(X) \to C$ をコンパクトな台 X 上の連続な複素数値関数の上の正数値線形関数だとする。そのとき X には Borel σ 代数を含む σ 代数 $\mathcal{U}$ が存在し、$\mathcal{U}$ 上に次の式を満たす正の測度 μ が一意的に存在する。

$$\Lambda(f) = \int_X d\mu(x) f(x) \ \forall f \in C_0(x) \tag{3.12}$$

さらに X が σ コンパクトならば μ は regular である。

これをコンパクト・ハウスドルフ空間に適用させると次のような定理が得られる。

定理７

X をコンパクト・ハウスドルフ空間とする $\Lambda : C(X) \to C$ を X の連続関数上の正数値線形関数とし、$\Lambda(1) = 1$ とする。このとき次の式を満たす regular で Borel で確率測度である μ が X の自然な Borel σ 代数 $\mathcal{U}$ 上に、一意的に定まる。

$$\Lambda(f) = \int_X d\mu(x) f(x) \ \forall f \in C_0(x) \tag{3.13}$$

4 Spectrul Theory and example

今までのまとめ

まず、いままでの復習を例を通してする。

例１：二点空間

可換 $C^\star$ 環 $\mathcal{A}$ として、

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad a_1, a_2 \in C \tag{4.1}$$

をもってくる。この上のスペクトル ($\star$ 準同型写像) は、以下のものがある。

$$\chi_{1,2} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_{1,2} \tag{4.2}$$

つまり、$\mathcal{A}$ 上のスペクトルは二点からなる。さらにこの二点の上に関数空間 $\overline{\mathcal{A}}$ を $\bar{a}(h) = h(a)$ となるように定義する。ここで $\bar{a} \in \overline{\mathcal{A}}$, $h \in \chi$, $a \in \mathcal{A}$ である。ここで $a \to \bar{a}$ は Gel'fand 変換とよばれる。Gel'fand の定理によれば可換 $C^\star$ 環はコンパクト・ハウスドルフ空間上の連続な関数に同型であり、こ

こでは (1.1) で定義される $C^\star$ 環と二点上の関数が同一視できることを意味している。

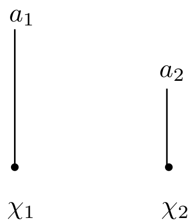


図１

なお、この $C^\star$ 環に対応するヒルベルト空間は二点上の関数全体によって張られている。

例２：$U(1)$

次に $a_n a_m = a_{n+m}, \quad (a_n)^\star = a_{-n} \quad (n, m \in N)$ という可換 $C^\star$ 環を考える。このスペクトルとして $\chi(a_n) = \exp(inx)$ がある。もちろん a^{inx} という形の関数ならスペクトルになりえるわけだが、同時に持ってくることはできない。また、それらの間には同型写像があるためどれかひとつについて調べればよい。ここでは指数関数の形に限ることにする。$\exp(inx)$ がとりうるすべての値をとるためには x は $0 \sim 2\pi$ あれば十分である。ゆえに χ は $U(1)$ と同一視できる。$U(1)$ 上の任意の連続な関数はフーリエ変換によって $\exp(inx)$ に分解できる。このとき $\exp(in\cdot) \to a_n$ によって $U(1)$ 上の連続関数と $C^\star$ 環が同一視できる。

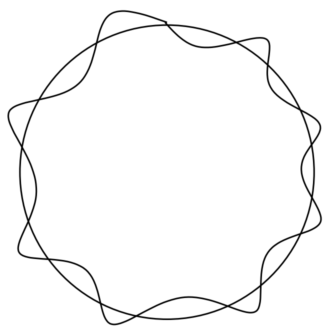


図２

測度は単に円周上の自然な測度でよく、ヒルベルト空間は $\exp(inx) \quad for\ all\ n \in N$ によって張られる。

ループ重力

前回求めたスペクトル上の測度を使えば、スペクトル上の状態 $\Psi(h)$ は次の積分

$$\Psi(\alpha) := \int_\Delta \mu(h)\Psi(h) \tag{4.3}$$

によってループ上の関数になる。$\Psi(\alpha) = <\alpha|\Psi>$ と考えることによって、ループそのものを量子状態としてあつかう。ありとあらゆるループを扱うよりグラフのなかのループを考えたほうが簡単なので、まずグラフを考える。ここでのグラフは三次元空間に埋め込まれたものとする。

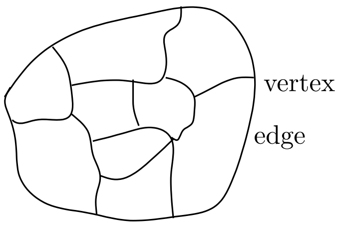


図３

これからはグラフの中に存在するループを扱う。もちろん、三次元空間のなかにあったあらゆるループを再現するには、あらゆるグラフを持ってくる必要がある。それらのグラフの中には次のようにほかのグラフに完全に埋め込まれているグラフもあり、注意が必要である。

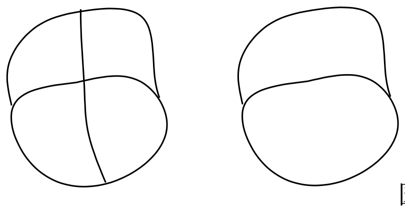


図４

だが、今回は詳しく踏み込まない。　次に、あるグラフが与えられたときに、前回の正規確率ボレル測度がどのように制限されるか (具体的に書けるか) を見る。それによってループ状態間での内積が定義できるためである。

まず次の定理よりスペクトルと $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の関係が分かる。

定理１

$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ からスペクトルへの写像 ($J : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to \Delta\ ; x \to J_x\ where\ J_x(f) := f(x)\ \forall f \in \overline{\mathcal{HA}}$) において、$J(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ は Gel'fand トポロジーにおいて Δ に稠密である。

この定理はホロノミー代数に限ったことではなく、一般に成り立つ。また、この定理から以後 Δ のことを $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ と書くことにする。

次に、あるグラフにのっている $\overline{\mathcal{A}_\gamma/\mathcal{G}_\gamma}$ が具体的にどのような構造をもっているかを示す定理を挙げる。ここではループからなる群 hoop group $\mathcal{HG}_\gamma$ ($\alpha \circ \beta \in \mathcal{HG}_\gamma$) を使う。

定理２

$\overline{\mathcal{A}_\gamma/\mathcal{G}_\gamma}$ の要素 $\overline{A_\gamma}$ は hoop group$\mathcal{HG}$ から $SU(2)$ への準同型 $\hat{H}$ を次のように与える。

$$\bar{A}_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2} Tr \hat{H}(\alpha) \tag{4.4}$$

今、$\overline{\mathcal{A}_\gamma/\mathcal{G}_\gamma}$ の中に同値関係 $A_{\gamma 1} \sim A_{\gamma 2}\ iff\ g^{-1} \cdot \hat{H} \cdot g$ を入れるとする。また、独立なループの個数を n とする。このとき全単射な写像

$$[\overline{\mathcal{A}_\gamma/\mathcal{G}_\gamma}]/\!\sim\ \rightarrow [SU(2)]^n/Ad \tag{4.5}$$

がある。

$\hat{H}$ の簡単な例としてはホロノミーにループだけ入った関数がある。

$$\bar{A}_\gamma : U_{\alpha\in\gamma}(\alpha, \bullet) \rightarrow SU(2) \tag{4.6}$$

定理１・２によってグラフにおけるスペクトル上の測度を次のように定義する。

$$\int_{\overline{\mathcal{A}_\gamma/\mathcal{G}\gamma}} d\mu f := \int_{[SU(2)]^n/Ad} d\mu' f \tag{4.7}$$

f はグラフ上に制限されたスペクトル ($\overline{\mathcal{A}_\gamma/\mathcal{G}\gamma}$) 上の関数である。$\mu'$ は $[SU(2)]^n/Ad$ 上の正規確率ボレル測度である。特に、測度として $SU(2)$ 上のハール測度を持ってくれば、Ad 普遍な測度のため、$\int_{[SU(2)]^n} d\mu_H f$ となる。この定義によってループどうしの内積は

$$< \alpha, \beta >= \int_{[SU(2)]^n} d\mu_H \overline{Tr(U_\alpha)} Tr(U_\beta) \tag{4.8}$$

となる。

5 Operator on Loop State

いままでは次元を考えてこなかったが、これからは次元を入れて考えることにする。まず、基本変数は幾何学的次元を持つものとする。ここでは次のようにおく。

$$[g_{ab}] = L^2, \quad [\tilde{E}^a_i] = L^2, \quad [A^i_a] = 1 \tag{5.1}$$

また、Action は、G^{-1} 倍する。つまり、幾何学的次元からもともとの次元へと戻す。ここで G は、

$$G = \frac{16\pi G_{Newton}}{c^3} \tag{5.2}$$

である ($[G] = TM^{-1}$)。そのときポアソン括弧は次のようになる。

$$A^i_a(x), \tilde{E}^b_j(y) = G\delta^b_a \delta^i_j \delta^3(x, y) \tag{5.3}$$

Ashtekar 変数を次のように定義する。

$$\tilde{E}^a = 2\tilde{E}^a_i \tau_i \tag{5.4}$$

$$A_a = A^i_a \tau_i \tag{5.5}$$

T 変数の factor を変えて $\mathcal{T}$ とかく。

$$\mathcal{T}(\alpha) = -Tr[U_\alpha] \tag{5.6}$$

$\mathcal{T}$ 変数から類推して、ゲージ普遍な量が定義できる。それは次の一連のものである。

$$\mathcal{T}^a[\alpha](s) = -Tr[U_\alpha(s,s)\tilde{E}^a(s)] \tag{5.7}$$
$$\mathcal{T}^{a_1a_2}[\alpha](s_1,s_2) = -Tr[U_\alpha(s_1,s_2)\tilde{E}^{a_2}U_\alpha(s_2,s_1)\tilde{E}^{a_1}] \tag{5.8}$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{T}^{a_1\cdots a_N}[\alpha](s_1,\cdots,s_N) = -Tr[U_\alpha(s_1,s_N)\tilde{E}^{a_N}(s_N)\cdots U_\alpha(s_2,s_1)\tilde{E}^{a_1}(s_1)] \tag{5.9}$$

この $\mathcal{T}$ 変数の Mandelstam 恒等式は、

$$\mathcal{T}[\alpha]\mathcal{T}[\beta] + \mathcal{T}[\alpha\#_s\beta] + \mathcal{T}[\alpha\#_s\beta^{-1}] = 0 \tag{5.10}$$

となっている。ここで $\#_s$ はパラメター s のところで接続されている新しいループを意味する。これは局所的な関係式である。つまり二つのループが繋がっていなければ成り立たないとする。いままでと同じ非局所的なループ (離れているループ) に対してこの関係式がなくなってしまうように一見見えるが、$\alpha \to \alpha\circ\gamma\circ\gamma^{-1}$ というループを考えればよい。

上で定義した量 (以下これらすべても $\mathcal{T}$ 変数と言う) のポアソン括弧は次のようになる。

$$\{\mathcal{T}[\alpha],\mathcal{T}[\beta]\} = 0 \tag{5.11}$$
$$\{\mathcal{T}^a[\alpha],\mathcal{T}[\beta]\} = -G\Delta^a[\beta,s]\cdot\frac{1}{2}\{\mathcal{T}[\alpha\#_s\beta] - \mathcal{T}[\alpha\#_s\beta^{-1}]\} \tag{5.12}$$

ここで、

$$\Delta^a[\beta,s] = \int_\beta d\tau\dot{\beta}^a(\tau)\delta^3[\beta(\tau),s] \tag{5.13}$$

である。ここで 2 番目のポアソン括弧を求めるときに、

$$-\{TrU_\alpha U_\beta - TrU_\alpha U_\beta\} = \sum_i TrU_\alpha\sigma_i U_\beta\sigma_i + 3TrU_\alpha U_\beta^{-1} \tag{5.14}$$

となることを使った。

前回と同様にあるグラフにおけるループだけを考えるとすると、ループ状態はそのグラフの中にあるすべてのループからなる。独立なループを α_i とすれば、ループ状態は一般に次のように書ける。

$$< c_0 + \sum_i c_i[\alpha_i] + \sum_{ij}[\alpha_i][\alpha_j] + \cdots | \tag{5.15}$$

ここで、c_0 は点のループの係数である。

T 変数を量子化はその交換子が、ポアソン括弧の $i\hbar$ 倍になるように行いたい。そのため $\hat{\mathcal{T}}[\alpha]$ はループ状態に次のように作用すると定義する。

$$< c_0+\sum_i c_i[\alpha_i]+\sum_{ij}[\alpha_i][\alpha_j]+\cdots|\hat{\mathcal{T}}[\alpha] =< c_0[\alpha]+\sum_i[\alpha_i][\alpha]+\sum_{ij}[\alpha_i][\alpha_j][\alpha]+\cdots| \tag{5.16}$$

また、$\hat{\mathcal{T}}^a[\alpha]$ は微分演算子、つまり Leibniz ルールを満たすように定義する。一つのループに対しては次のように作用すると定義する。

$$< [\beta]|\hat{\mathcal{T}}^a[\alpha] = -il_0^2\Delta^a[\beta,s]\frac{1}{2}(< [\alpha\#_s\beta]|- < [\alpha\#_s\beta^{-1}]|) \tag{5.17}$$

ここで、

$$l_0^2 = \hbar G = 16\pi l_{Plank}^2 \tag{5.18}$$

である。Leibniz ルールより、この作用は一般のループ状態への作用に拡張できる。なお、上の式の作用を grasp という。また、一般の $\hat{\mathcal{T}}^{a_1\cdots a_N}[\alpha](s_1,\cdots,s_N)$ に関しては次のように定義する。

$$\begin{aligned} < [\beta]|\hat{\mathcal{T}}^{a_1\cdots a_N}[\alpha](s_1,\cdots,s_N) \quad &= \\ (-il_0^2)^N\Delta^{a_1}[\beta,s_1]\cdots\Delta^{a_N}[\beta,s_N]\ \frac{1}{2^N}(<[\alpha_1]|- <[\alpha_2]| + \cdots + <[\alpha_{2^N}]|) \end{aligned} \tag{5.19}$$

ここで、$[\alpha_i] \quad (i = 1 \sim 2^N)$ は次のように作られる。まず、N 個の交点でそれぞれ α と β を切り離す。次にそれぞれ２通りの方法でつなぐ。符号は、新しくできたループですべて元と同じ向きを向いているものを正とし、以後向きが逆になるたびに負の符号を掛けていく。

spin network 状態

今まではあるグラフにおけるありとあらゆるループを考えてきたが、Mandelstam 恒等式 $[\alpha][\beta] = [\alpha\#_s\beta] + [\alpha\#_s\beta^{-1}]$ があるため over complete である。だが、ループ状態から完備な (直交もしている) 状態を作ることができる。　まず、グラフ Γ にたいして、3-valent な交点しか持たないグラフを次のように考える。n-valent な交点があった場合、交点にささっている n 個の辺に番号をつける。そして、図のように n-2 個の新しい交点を作る。これを ribbon-net という。

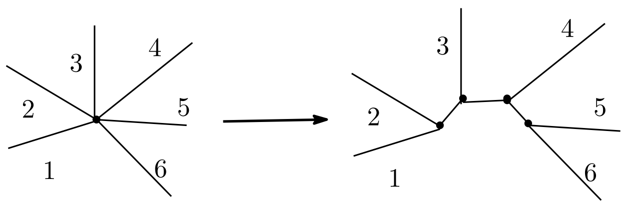


図１

この 3-valent な交点しか持たないグラフを Virtual graph と言う。

次に Virtual graph に対して、その辺すべてを太くする。そして交点には円を書くことにする。

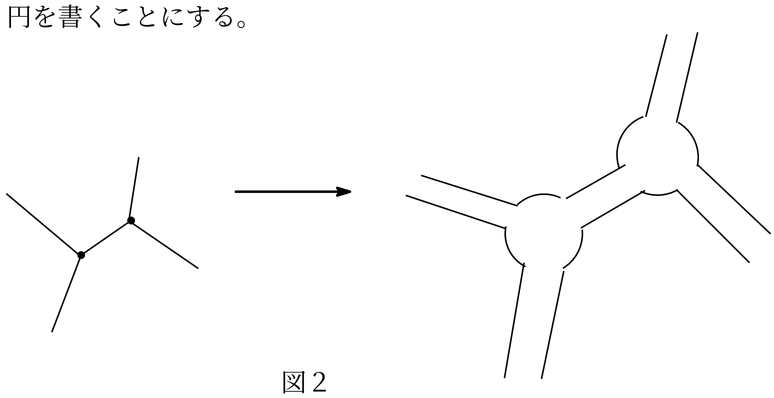


図 2

今までのループ状態はこの ribbon-net の中にどこを通ったのか目で見えるように書くことができる。

定義 graphΓ_S の spin network とは、virtual trivalent graph で、そのそれぞれの辺 (e) に color と呼ばれる正の整数 (p_e) がついたものである。ここで、ある交点にささっている辺の color を p_1, p_2, p_3 とすると、$p_1 = a + b, p_2 = b + c, p_3 = c + a$ となる正の整数 a, b, c が存在するという条件が color にはある。spin network を $S = (\Gamma_S, \{p_e\})$ と書く。

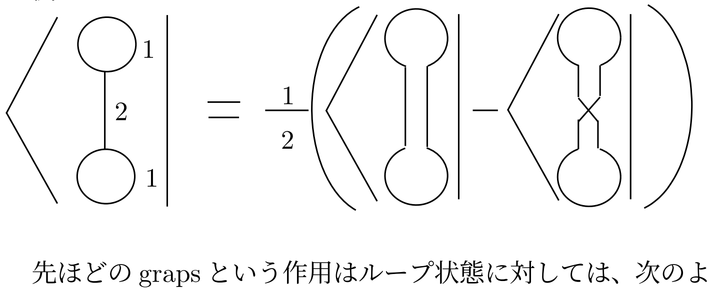
spin network 状態とは、spin network において定められる。まず、その graph を

ribbon-net にする。それぞれの辺に color の個数入ったループ状態の中で、ribbon-net の中で一回も交わらない状態を $P_S^{(0)}$ とする。辺 e での antisymmetlizer を $\Pi_{p_e}^{(e)}$ と書く ($\Pi_n^{(e)} P_e = \frac{1}{n!}\sum_p (-1)^{|p|} P_e^{(p)}$ ここで $P_e^{(p)}$ は p という permutation を行ったループ状態を示している。また、$|p|$ は permutation の parity である)。spin network 状態 (P_S) は、

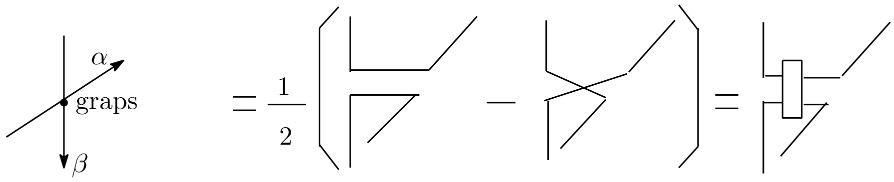
$$P_S = \prod_{e \in \Gamma} \Pi_{p_e}^{(e)} P_S^{(0)} \tag{5.20}$$

で定義される。この状態は一つのグラフに関しては完備で、前回作った測度で正規直交である。

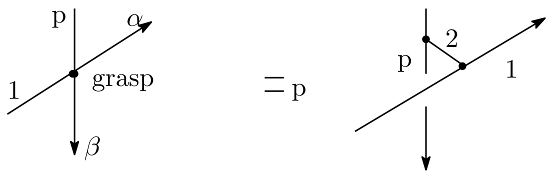
例 1



先ほどの graps という作用はループ状態に対しては、次のように作用する。



が、spin network 状態に対しては次のように作用することが分かる。



なお、$\Delta^a[\beta, s]$ は省略した。

spin network 状態には 3valent の交点の取り方に曖昧さが残るが、違う 3valent をとったとしてもその間にはユニタリ変換 (直行) がある。そのことは recoupling theory を持ち出す必要がある。また、今後の計算をスムーズに行うためにも、角運動量の合成に対応させるためにも、その理論は必要である。そのため、次回は recoupling theory について話す。

6 Spin Network

今まではあるグラフにおけるありとあらゆるループを考えてきたが、Mandelstam 恒等式 $[\alpha][\beta] = [\alpha \#_s \beta] + [\alpha \#_s \beta^{-1}]$ があるため over complete である。だが、ループ状態から完備な (直交もしている) 状態を作ることができる。　まず、グラフ Γ にたいして、3-valent な交点しか持たないグラフを次のように考える。n-valent な交点があった場合、交点にささっている n 個の辺に番号をつける。そして、図のように n-2 個の新しい交点を作る。これを ribbon-net という。

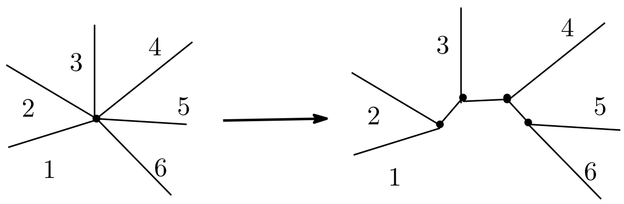


図 1

この 3-valent な交点しか持たないグラフを Virtual graph と言う。

次に Virtual graph に対して、その辺すべてを太くする。そして交点には円を書くことにする。

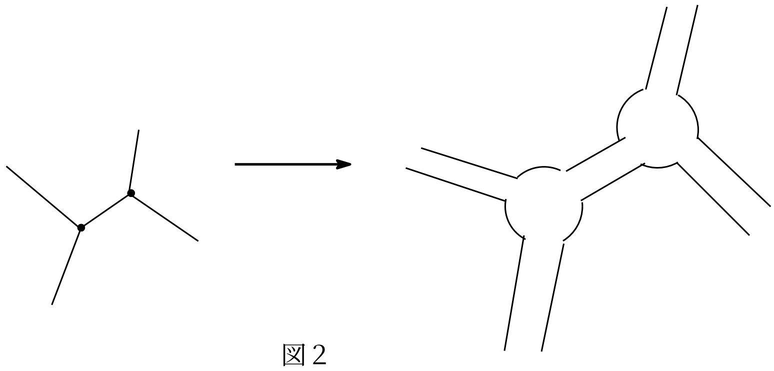


図 2

今までのループ状態はこの ribbon-net の中にどこを通ったのか目で見えるように書くことができる。

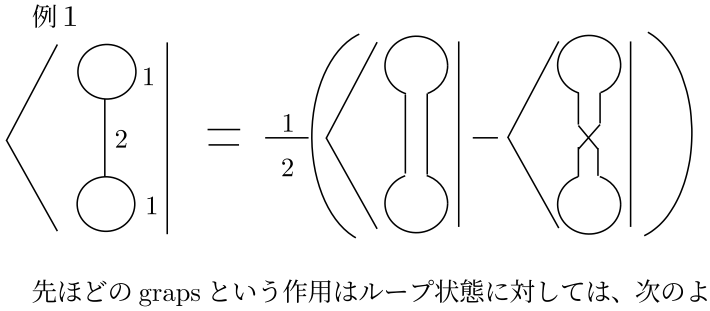
定義　graphΓ_S の spin network とは、virtual trivalent graph で、そのそれぞれの辺 (e) に color と呼ばれる正の整数 (p_e) がついたものである。ここで、ある交点にささっている辺の color を p_1, p_2, p_3 とすると、$p_1 = a+b, p_2 = b+c, p_3 = c+a$ となる正の整数 a, b, c が存在するという条件が color にはある。spin network を $S = (\Gamma_S, \{p_e\})$ と書く。

spin network 状態とは、spin network において定められる。まず、その graph を ribbon-net にする。それぞれの辺に color の個数入ったループ状態の中で、ribbon-net の中で一回も交わらない状態を $P_S^{(0)}$ とする。辺 e での anti-symmetlizer を $\Pi_{p_e}^{(e)}$ と書く ($\Pi_n^{(e)} P_e = \frac{1}{n!}\sum_p (-1)^{|p|} P_e^{(p)}$ ここで $P_e^{(p)}$ は p という permutation を行ったループ状態を示している。また、$|p|$ は permutation の parity である)。spin network 状態 (P_S) は、

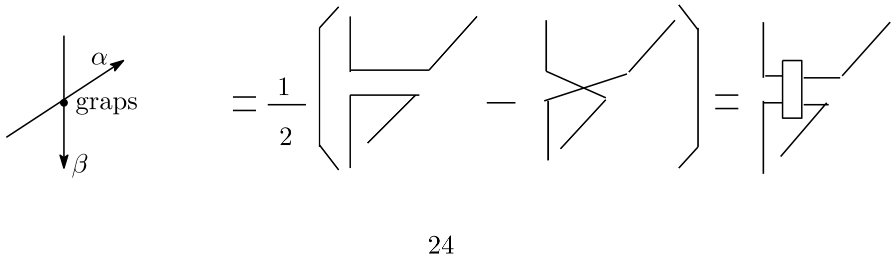
$$P_S = \prod_{e\in\Gamma} \Pi_{p_e}^{(e)} P_S^{(0)} \tag{6.1}$$

で定義される。この状態は一つのグラフに関しては完備で、前回作った測度で直交である。

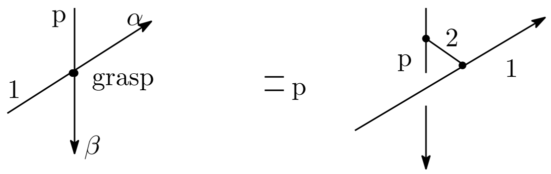
例 1



先ほどの graps という作用はループ状態に対しては、次のように作用する。



が、spin network 状態に対しては次のように作用することが分かる。



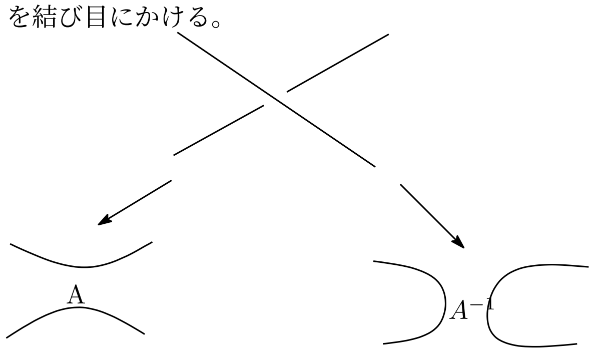
なお、$\Delta^a[\beta, s]$ は省略した。

spin network 状態には 3valent の交点の取り方に曖昧さが残るが、違う 3valent をとったとしてもその間にはユニタリ変換 (直行) がある。そのことは recoupling theory を持ち出す必要がある。また、今後の計算をスムーズに行うためにも、角運動量の合成に対応させるためにも、その理論は必要である。そのため、次回は recoupling theory について話す。

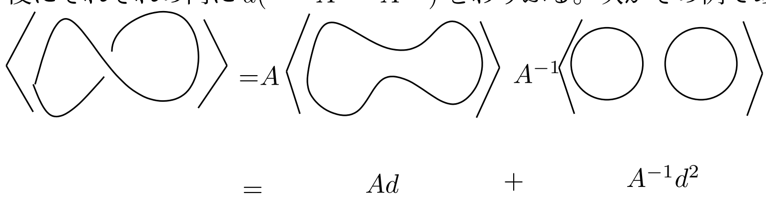
Temperley-Lieb Recoupling Theory

3 つの vertex しかもたないグラフの選び方はいくつもある。ここではそのどれを選んでも問題のないことを言う。さらに、そのついでとして、今後の計算を簡単に書き表すための方法も説明する。

まず、Kauffman ブラケットについて説明する。これは、紙 (2 次元平面) に閉じたループ (結び目) が書かれているときその結び目に多項式を対応させようというものである。Kauffman ブラケットでは次の順序で多項式を作る。まず下図のように結び目の重なっているところを分解する。そのとき A と A^{-1} を結び目にかける。



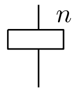
その行為を、元の結び目が重なりのない円の結び目になるまで繰り返す。最後にそれぞれの円に $d(= -A^2 - A^{-2})$ をわりふる。次がその例である。



$$= \qquad Ad \qquad + \qquad A^{-1}d^2$$

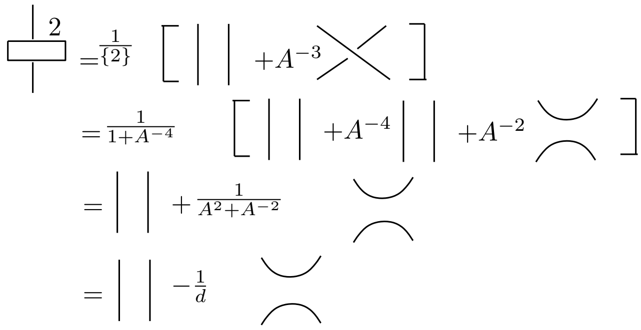
ここで、$A = -1, d = -2$ の時は重なりの上下が意味を持たず、Mandelstam 恒等式と同じである。つぎに、Jones-Wenzel projector を定義する。それは

下式のものである。

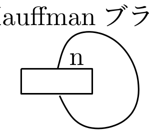
$\Pi_n=$ 

$= \frac{1}{\{n!\}} \sum_p (A^{-3})^{|p|} P_n^{(p)}$

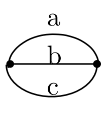
ここで $|p|$ は permutation の偶奇を、$P_n^{(p)}$ は n 本からなる線の p で表される permutation の図である。また、$\{n\} = \sum_p (A^{-4})^{|p|}$ である。$n=2$ の時の例は次のとおりである。

$\Pi_2=$ 

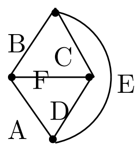
とくに $A=-1, d=-2$ の時は Π は antisymmetrizer になる。Π_n の両端を結んで Kauffman ブラケットをとったものを Δ_n と書く。

$\Delta_n =$ 

Δ_n は計算されていて、$\Delta_n = (-1)^n \frac{A^{2n+2}-A^{-2n-2}}{A^2-A^{-2}}$ である。とくに $A=-1$ のときは、$\Delta_n = (-1)^n(n+1)$ である。さらに以下の Kauffman ブラケットも定義する。

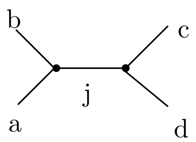


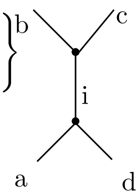
$=\theta(a,b,c)$



$=\mathrm{Tet}\begin{bmatrix} A & B & E \\ C & D & F \end{bmatrix}$

Recoupling Theory とは次の式が成り立つことを意味する。



$= \sum_i \left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\}$


ここで上式の括弧は量子力学の角運動量の合成に出てくる $\{6j\}$ 記号と同じ

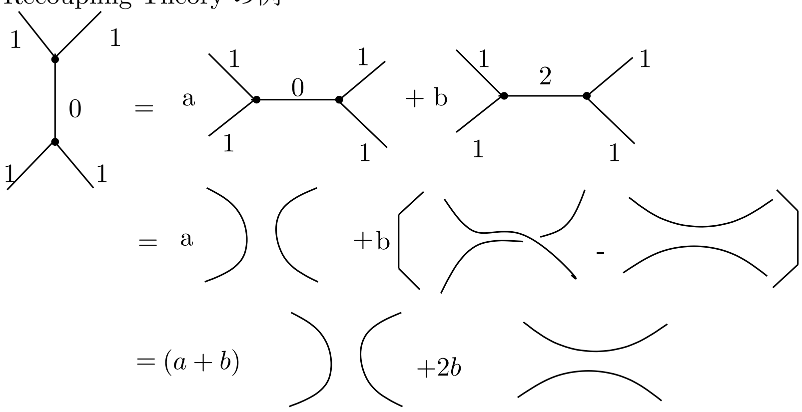
ものである。先ほどの Kauffman ブラケットの諸式を用いると、

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & b & i \\ c & d & j \end{array}\right\} = \frac{Tet\left\{\begin{array}{ccc} a & b & i \\ c & d & j \end{array}\right\}\Delta_i}{\theta(a,d,i)\theta(b,c,i)} \tag{6.2}$$

と書ける。またこの $6j$ 記号は直行関係、

$$\sum_i \left\{\begin{array}{ccc} a & b & i \\ c & d & j \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ccc} d & a & k \\ b & c & i \end{array}\right\} = \delta_{kj} \tag{6.3}$$

をみたしている。つまり 3valent な頂点しかとらないグラフを、2 つ持ってきたとき 2 種類のスピンネットワーク状態の間にはユニタリ (直行) 変換がある。
Recoupling Theory の例



$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

参考文献

[1] まず,$C^\star$ 環について, 数学書で GNS 構成のことが詳しく載っているものとして、
Theory of Operator Algebras 1,2 *Takesaki* Springer
がある。この本は物理向けの本である.
さらに $C^\star$ 環で量子力学を展開しているものとして,

[2] 量子力学の数学的構造１，２　新井, 江沢　朝倉書房

[3] Mathematical Foundations of Quantum Mechanics *von Neumann* princeton
がある．さらに axiomatic quantization の本で曲がった空間での QFT を書いたものとして,

[4] Local Quantum Physics *Haag* Springer
がある．測度の理論としては色々とあるが, 比較的読みやすいものとしては

[5] Real and Conplex Analysis *Rudin* McGRAW-HILL があるが, これは haar measure は載っていない．測度理論の基礎の勉強には最適な教科書.
接続の理論はやはり,

[6] Foundation of DIfferential Geometry *Kobayasi, Nomizu* が詳しい.
コンパクト化について詳しく書かれた本としては,

[7] 位相空間論　児玉, 永見　岩波書店
がある.
スピンネットワークについての公式集で証明も載っているものとしては,

[8] Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds *Kauffman and Lins*
がある.