Quantum Field Theory in cureved spacetime

shintaro sawayama

平成 20 年 1 月 22 日

目 次

1 Basic Formalism and Particle Creation

1.1 Second Quantization in Curved Space

Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_a\varphi\partial^a\varphi - m^2\varphi^2 - \xi R\varphi^2) \tag{1.1}$$

とする．signature は $(+---)$ とする．これを φ で微分することによって，

$$\Box\varphi + m^2\varphi + \xi R\varphi = 0 \tag{1.2}$$

という運動方程式が得られる．内積は，Klein-Gordon 内積を使う．

$$(f_1, f_2) = i\int(f_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_1)d\Sigma^\mu \tag{1.3}$$

ここで，$d\Sigma^\mu = d\Sigma n^\mu$ であり，$d\Sigma$ は spacelike hypersurface で，n^μ はそれに直交する長さ 1 の timelike vector である．ここで重要なことは，内積は hypersurface のとり方によらないことである．つまり，

$$(f_1, f_2)_{\Sigma_1} = (f_1, f_2)_{\Sigma_2} \tag{1.4}$$

これはダイレクトに証明できる．まず，V を Σ_1, Σ_2 ではさまれた 4 次元部分多様体とすると．

$$(f_1, f_2)_{\Sigma_1} - (f_1, f_2)_{\Sigma_2} = i\oint_{\partial V}(f_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_1)d\Sigma^\mu = i\int_V \nabla_\mu(f_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_1)dV \tag{1.5}$$

この積分ではではガウスの定理を使った．

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(f_2^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu f_1) = \nabla_\mu(f_2^*\partial_\mu f_1 - f_1\partial_\mu f_2^*) = f_2^*\Box f_1 - f_1\Box f_2^* \\ -f_2^*(m^2+\xi R)f_1 + f_1(m^2+\xi R)f_2^* = 0\end{aligned} \tag{1.6}$$

よって，積分のとりかたがハイパーサーフェイスによらないことが証明された．スカラー場の量子化は正準量子化を用いて行われる．つまり，正準運動量を

$$\pi = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\varphi}} \tag{1.7}$$

によって定義し，正準交換関係を

$$[\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \tag{1.8}$$

で定義する．ここでのデルタ関数は，

$$\int\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d\Sigma = 1 \tag{1.9}$$

で定義する．よって第二量子化は，消滅，生成演算子を用いて，

$$\varphi = \sum_j (a_j f_j + a_j^\dagger f_j^*) \tag{1.10}$$

とかける．ここで，f_j は運動方程式を満たす完備な関数の集合である．また，$[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}$ である．

1.2 Conformal Factor

ここで先ほどの Lagrangian に登場するカップリングコンスタント ξ が conformal 変換不変にとることができることをしめす．conformal transformation とはメトリックを次のように変換するものである．

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2(x) g_{\mu\nu} \tag{1.11}$$

もしくは同じことだが，

$$\tilde{ds}^2 = \omega^2(x) ds^2 \tag{1.12}$$

この変換によって，Christoffel symbol は次の変換を受ける．

$$\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + C^{\rho}_{\mu\nu} \tag{1.13}$$

ここで $C^{\rho}_{\mu\nu}$ は，

$$C^{\rho}_{\mu\nu} = \omega^{-1}(\delta^{\rho}_{\mu}\nabla_{\nu}\omega + \delta^{\rho}_{\nu}\nabla_{\mu}\omega - g_{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\nabla_{\lambda}\omega) \tag{1.14}$$

これで，リーマンテンソルを書き下すと，

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_{\mu}C^{\rho}_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu}C^{\rho}_{\mu\sigma} + C^{\rho}_{\mu\lambda}C^{\lambda}_{\nu\sigma} - C^{\rho}_{\nu\lambda}C^{\lambda}_{\mu\sigma} = \\ R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} - 2(\delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\alpha}_{\nu]}\delta^{\beta}_{\sigma} - g_{\sigma[\mu}\delta^{\alpha}_{\nu]}g^{\rho\beta})\omega^{-1}(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\omega) \\ +2(2\delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\alpha}_{\nu]}\delta^{\beta}_{\sigma} - 2g_{\sigma[\mu}\delta^{\alpha}_{\nu]}g^{\rho\beta} + g_{\sigma[\mu}\delta^{\rho}_{\nu]}g^{\alpha\beta})\omega^{-2}(\nabla_{\alpha}\omega)(\nabla_{\beta}\omega)\end{aligned} \tag{1.15}$$

縮約をとってリッチテンソルを求めると，

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\sigma\nu} = R_{\sigma\nu} - [(n-2)\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\beta}_{\nu} + g_{\sigma\nu}g^{\alpha\beta}]\omega^{-1}(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\omega) \\ +[2(n-2)\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\beta}_{\nu} - (n-3)g_{\sigma\nu}g^{\alpha\beta}]\omega^{-2}(\nabla_{\alpha}\omega)(\nabla_{\beta}\omega)\end{aligned} \tag{1.16}$$

リッチスカラーは，

$$\begin{aligned}\tilde{R} = \omega^{-2}R - 2(n-1)g^{\alpha\beta}\omega^{-3}(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\omega \\ -(n-1)(n-4)g^{\alpha\beta}\omega^{-4}(\nabla_{\alpha}\omega)(\nabla_{\beta}\omega))\end{aligned} \tag{1.17}$$

同様にして，

$$\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\nabla}_{\nu} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi - (\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\alpha}_{\nu} - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\omega^{-1}(\nabla_{\alpha}\omega)(\nabla_{\beta}\omega) \tag{1.18}$$

縮約をとると，

$$\tilde{\Box}\phi = \omega^{-2}\Box\phi + (n-2)g^{\alpha\beta}\omega^{-3}(\nabla_{\alpha}\omega)(\nabla_{\beta}\phi) \tag{1.19}$$

よって，ω^{-3} 次の項を打ち消すためにはアクションの中の ξ は，

$$\xi = \frac{(n-2)}{4(n-1)} \tag{1.20}$$

となる．これはコンフォーマルカップリングである．

1.3 Particle Creation by Gravitational Field

今 $\{f_j\}$ を過去の正振動解とし，$\{F_j\}$ を未来の正振動解とする．それぞれ以下の正規直交基底だとする．

$$
\begin{aligned}
(f_j, f_{j'}) = (F_j, F_{j'}) &= \delta_{jj'} \\
(f_j^*, f_{j'}^*) = (F_j^*, F_{j'}^*) &= -\delta_{jj'} \\
(f_j, f_{j'}^*) = (F_j, F_{j'}^*) &= 0
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

この二つの正規直交基底は次の関係を満たす．

$$
f_j = \sum_k (\alpha_{jk} F_k + \beta_{jk} F_k^*) \tag{1.22}
$$

これを先ほどの式に入れることによって，

$$
\sum_k (\alpha_{jk}\alpha_{j'k}^* - \beta_{jk}\beta_{j'k}^*) = \delta_{jj'} \tag{1.23}
$$

それと，

$$
\sum_k (\alpha_{jk}\alpha_{j'k} - \beta_{jk}\beta_{j'k}) = 0 \tag{1.24}
$$

という関係式が得られる．逆変換は，

$$
F_k = \sum_j (\alpha_{jk}^* f_j - \beta_{jk} f_j^*) \tag{1.25}
$$

field operator φ は $\{f_j\}$ でも $\{F_j\}$ でも書くことができ，

$$
\varphi = \sum_j (a_j f_j + a_j^\dagger f_j^*) = \sum_j (b_j F_j + b_j^\dagger F_j^\dagger) \tag{1.26}
$$

ここで，$a_j, a_j^\dagger$ は in-region の生成消滅演算子であり，$b_j, b_j^\dagger$ は out-region の生成消滅演算子である．つまり，$a_j|0\rangle_{in} = 0$ であり，$b_j|0\rangle_{out} = 0$ である．今、$a_j = (\varphi, f_j)$ で，$b_j = (\varphi, F_j)$ より，

$$
a_j = \sum_k (\alpha_{jk}^* b - \beta_{jk}^* b_k^\dagger) \tag{1.27}
$$

$$
b_k = \sum_j (\alpha_{jk} a_j + \beta_{jk}^* a_j^\dagger) \tag{1.28}
$$

である．これを Bogolubov transformation とよび，α_{jk} と β_{jk} を Bogolubov coefficient と呼ぶ．今，out-region の number operater は $N_k = b_k^\dagger b_k$ より，振動数 k の粒子が生成される確率は，

$$
\langle N_k \rangle = {}_{in}\langle 0|b_k^\dagger b_k|0\rangle_{in} = \sum_j |\beta_{jk}|^2 \tag{1.29}
$$

となる．

ではこれを Robertson-Walker universe に適応してみる [3][2]．メトリックは,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\mathbf{x}^2). \tag{1.30}$$

ここで，η はコンフォーマルタイムであり,

$$d\eta = dt/a \tag{1.31}$$

$$t = \int^t dt = \int^\eta a(\eta^{'})d\eta^{'}. \tag{1.32}$$

この時の解は,

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{a(\eta)\sqrt{(2\pi)^3}}\chi_k(\eta). \tag{1.33}$$

ここで，χ_k は次の方程式を満たす解である．

$$\frac{d^2\chi_k}{d\eta^2} + [k^2 - V(\eta)]\chi_k = 0 \tag{1.34}$$

$$V(\eta) := -a^2(\eta)[m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R(\eta)] \tag{1.35}$$

ここで，$f_{\mathbf{k}}$ のノルムが 1 という条件から，Wronskian condition が出てくる．

$$\chi_k \frac{d\chi_k^*}{d\eta} - \chi_k^* \frac{d\chi_k}{d\eta} = i \tag{1.36}$$

今，簡単のために $m = 0$ とし，無限の過去の解を調べると,

$$\chi_k(\eta) \sim \chi_k^{(in)}(\eta) = \frac{e^{-i\omega\eta}}{\sqrt{2\omega}}. \tag{1.37}$$

無限の未来では,

$$\chi_k(\eta) \sim \chi_k^{(out)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\alpha_k e^{-i\omega\eta} + \beta_k e^{i\omega\eta}). \tag{1.38}$$

となっている．ここで，α_k と β_k は $\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \alpha_k\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ と，$\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \beta_k\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}$ で定義されている．単位体積あたりの生成される number density は,

$$N = \frac{1}{(2\pi a)^3}\int d^3k|\beta_k|^2 \tag{1.39}$$

であり，energy density は,

$$\rho = \frac{1}{(2\pi a)^3 a}\int d^3k\omega|\beta_k|^2. \tag{1.40}$$

実際に χ_k を求めるのは困難である．よって，摂動計算をする．

$$\chi_k(\eta) = \chi_k^{(in)}(\eta) + \omega^{-1}\int_{-\infty}^{\eta} V(\eta')\sin\omega(\eta - \eta')\chi_k(\eta')d\eta' \tag{1.41}$$

簡単のため一次までの摂動をとると，積分の中の $\chi_k(\eta')$ を $\chi_k^{(in)}(\eta')$ に置き換える．これを，1.38 と比べると，

$$\alpha_k \sim 1 + \frac{i}{2\omega}\int_{-\infty}^{\infty} V(\eta)d\eta \tag{1.42}$$

$$\beta_k \sim -\frac{i}{2\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega\eta}V(\eta)d\eta \tag{1.43}$$

となる．V を代入すると今の場合 mean number density と energy density は

$$N = \frac{(\xi-\frac{1}{6})^2}{16\pi a^3}\int_{-\infty}^{\infty} a^4(\eta)R(\eta)d\eta \tag{1.44}$$

$$\rho = \frac{(\xi-\frac{1}{6})^2}{32\pi^2 a^4}\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \{\ln(\eta_1-\eta_2)\mu\frac{d}{d\eta_1}[a^2(\eta_1)R(\eta_1)] \times\frac{d}{d\eta_2}[a^2(\eta_2)R(\eta_2)]\} \tag{1.45}$$

1.4 Particle Creation by Moving Mirrors

二次元時空で moving mirror が massless scalar field とカップルしていると，その加速度に応じて粒子を放出することが知られている [4][5]．まず，moving mirror の軌道を

$$x = z(t), |\dot{z}(t)| < 1 \tag{1.46}$$

とする．massless scalar field は次の波動方程式を満たす.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \tag{1.47}$$

ここで boudary condition　として，以下の制限をつける.

$$\phi(t, z(t)) = 0. \tag{1.48}$$

conformal scaling をすると，

$$g_{\mu\nu} \to C(t,x)g_{\mu\nu} \tag{1.49}$$

ここで，null 基底は次のように移るとする.

$$t - x = f(w-s),\ t + x = g(w+s) \tag{1.50}$$

この変換でメトリックは，

$$dt^2 - dx^2 = f'(w-s)g'(w+s)(dw^2 - ds^2) \tag{1.51}$$

となる．よって波動方程式は，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} = 0. \tag{1.52}$$

今，$s=0$ のところに moving mirror があるとすると boundary condition は

$$\phi(w,0)=0 \tag{1.53}$$

であり，次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}[g(w)-f(w)]=z(\frac{1}{2}[g(w)+f(w)]) \tag{1.54}$$

ここで initial condition として以下を仮定する．

$$z(t)=0\ for\ t<0 \tag{1.55}$$

すると，この条件は次のことと同値である．

$$f(w)=g(w)=w\ for\ w<0 \tag{1.56}$$

$$g(w)=w\ for\ all\ w \tag{1.57}$$

$$\frac{1}{2}[w-f(w)]=z(\frac{1}{2}[w+f(w)]) \tag{1.58}$$

この最後の式は $f(w)$ を求める式である．(1.52) と (1.53) の完備な解は，

$$\phi_\omega(w,s)=(\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}\sin\omega s e^{-i\omega w}\ (\omega>0) \tag{1.59}$$

または同じことだが，

$$\phi_\omega(t,x)=i(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}[e^{-i\omega g^{-1}(t+x)}-e^{-i\omega f^{-1}(t-x)}] \tag{1.60}$$

これは次の形に置き換えられる．この式は DeWitt[6] によってさらに書き換えられる．

$$\phi_\omega(t,x)=i(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}[e^{-i\omega v}-e^{-\omega(2\tau_u-u)}] \tag{1.61}$$

ここで，

$$u\equiv t-x\ v\equiv t+x \tag{1.62}$$

そして，τ_u は次の式で定義されている．

$$\tau_u-z(\tau_u)=u \tag{1.63}$$

さらに，f の inverse function と次の関係がある．

$$2\tau_u-u=f^{-1}(u)\equiv p(u) \tag{1.64}$$

次に $T_{\mu\nu}$ を書いてみると，

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(\frac{\partial\phi}{dt})^2+(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2 & \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\ \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t} & (\frac{\partial\phi}{dt})^2+(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2\end{bmatrix} \tag{1.65}$$

いま，ϕ を書いてみると，

$$\phi(t,x)=\int_0^\infty d\omega[a_\omega^{in}\phi_\omega+a_\omega^{in\dagger}\phi_\omega^*] \tag{1.66}$$

対応する operator $T_{\mu\nu}$ は,

$$T_{\mu\nu} =: T_{\mu\nu} : + \langle T_{\mu\nu} \rangle \tag{1.67}$$

ここで $\langle\rangle$ は in vacuum である．つまり，$|0\rangle$ は $a^{in}_{\omega}|0\rangle = 0$ を満たす．これより,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \int_0^{\infty} d\omega T_{\mu\nu}(\phi_\omega, \phi^*_\omega) \tag{1.68}$$

である．ここで，point-splitting method を使うと,

$$\partial\phi_\omega/\partial t = (\frac{\omega}{4\pi})^{\frac{1}{2}}[e^{-i\omega v} - p'(u)e^{-i\omega p(u)}] \tag{1.69}$$

$$\partial\phi_\omega/\partial x = (\frac{\omega}{4\pi})^{\frac{1}{2}}[e^{-i\omega v} + p'(u)e^{-i\omega p(u)}] \tag{1.70}$$

$$\partial\phi^*_\omega/\partial t = (\frac{\omega}{4\pi})^{\frac{1}{2}}[e^{-i\omega(v+\varepsilon)} - p'(u+\varepsilon)e^{-i\omega p(u+\varepsilon)}] \tag{1.71}$$

$$\partial\phi^*_\omega/\partial x = (\frac{\omega}{4\pi})^{\frac{1}{2}}[e^{-i\omega(v+\varepsilon)} + p'(u+\varepsilon)e^{-i\omega p(u+\varepsilon)}] \tag{1.72}$$

よって,

$$\langle T_{00} \rangle = \langle T_{11} \rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} \omega d\omega \{e^{i\omega\varepsilon} + p'(u)p'(u+\varepsilon)e^{i\omega[p(u+\varepsilon)-p(u)]}\} \tag{1.73}$$

$$\langle T_{10} \rangle = \langle T_{01} \rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} \omega d\omega \{e^{i\omega\varepsilon} - p'(u)p'(u+\varepsilon)e^{i\omega[p(u+\varepsilon)-p(u)]}\} \tag{1.74}$$

これをテーラー展開で計算すると，結果は,

$$\langle T_{00} \rangle = -(2\pi\varepsilon^2)^{-1} - \langle T_{01} \rangle \tag{1.75}$$

$$\langle T_{01} \rangle = (24\pi)^{-1}[\frac{p'''}{p'} - \frac{3}{2}(\frac{p''}{p'})^2] + O(\varepsilon), \tag{1.76}$$

$$= -(12\pi)^{-1}(p')^{\frac{1}{2}}[(p')^{-\frac{1}{2}}]'' + O(\varepsilon) \tag{1.77}$$

2 The Hawking Effect

シュバルツシルト時空の中の量子場を考える．これはホーキングによるものである [7]. 今，二つの null 座標を

$$v = t + r^* \tag{2.1}$$

$$u = t - r^* \tag{2.2}$$

$$r^* = r + 2M \ln \frac{r-2M}{2M} \tag{2.3}$$

とする．シュバルツシルト計量は,

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r})dt^2 - (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2.4}$$

である．in-mode を $f_{\omega lm}$ とし，out-mode を $F_{\omega lm}$ とすると，無限遠方で，

$$f_{\omega lm} \sim \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{\sqrt{4\pi\omega}r} e^{-i\omega v} \ on\ \mathcal{I}^- \tag{2.5}$$

$$f_{\omega lm} \sim \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{\sqrt{4\pi\omega}r} e^{-i\omega G(u)} \ on\ \mathcal{I}^+ \tag{2.6}$$

$$F_{\omega lm} \sim \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{\sqrt{4\pi\omega}r} e^{-i\omega u} \ on\ \mathcal{I}^+ \tag{2.7}$$

$$F_{\omega lm} \sim \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{\sqrt{4\pi\omega}r} e^{-i\omega g(v)} \ on\ \mathcal{I}^-. \tag{2.8}$$

ここで，$u = g(v), v = g^{-1}(u) \equiv G(u)$ とした．

これから以下の式を導く．

$$u = g(v) = -4M \ln{(\frac{v_0 - v}{C})} \tag{2.9}$$

$$v = G(u) = v_0 - Ce^{-u/4M} \tag{2.10}$$

シュバルツシルトの内部のメトリックは

$$ds^2 = dT^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2.11}$$

であるから，(2.4) と (2.11) より，ホライズン上では以下の式が成り立つ．

$$1 - (\frac{dR}{dT})^2 = (\frac{R-2M}{R})(\frac{dt}{dT})^2 - (\frac{R-2M}{R})^{-1}(\frac{dR}{dT})^2 \tag{2.12}$$

今，R は $2M$ のそばにあるとする．そして，T_0 を $R = 2M$ の時刻とする．すると，近似的に，

$$R(T) \approx 2M + A(T_0 - T) \tag{2.13}$$

が成り立つ．これを，2.12 に代入することによって，

$$(\frac{R-2M}{2M})^2 \approx (\frac{R-2M}{2M})^{-2}(\frac{dR}{dT}) \approx \frac{(2M)^2}{(T-T_0)^2} \tag{2.14}$$

これより，

$$t \sim -2M \ln{(\frac{T_0 - T}{B})},\ T \ \rightarrow\ T_0 \tag{2.15}$$

同様に，

$$r^* \sim 2M \ln{(\frac{r-2M}{2M})} \sim 2M \ln{\frac{A(T_0 - T)}{2M}} \tag{2.16}$$

また，この極限では，

$$U = T - r = T - R(T) \sim (1+A)T - 2M - AT_0 \tag{2.17}$$

今，内部の null ベクトルを V, U とおく，ここで $V = T + r$ で $U = T - r$ である．v がブラックホールのシェル (半径 R_1) に入るときを考える．R_1 はこのとき $2M$ より大きい．このとき，$R/R - 2M$ と dR/dT は有限でだいた

いコンスタントである．したがって，dt/dT は大体コンスタントである．したがって，$t \propto T$. 同様に，r^* も $r = R_1$ の近傍で線形関数である．よって，

$$V(v) = av + b, \quad a, b = const. \tag{2.18}$$

また，内部の V が U に変化するところは $r = 0$ のところなので，

$$U(V) = V \tag{2.19}$$

式 (2.18) と (2.19) に (2.15) と (2.16) を代入することにより，(2.9) と (2.10) が導かれる．

(2.8) より，out-mode は

$$F_{\omega lm} \sim e^{4Mi\omega \ln[(v_0 - v)/C]}, \ v < v_0 \tag{2.20}$$

$$F_{\omega lm} \sim 0 \ v > v_0 \tag{2.21}$$

となる．これを Bogolubov transformation してやると，

$$F_{\omega lm} = \int_0^\infty d\omega^{'} (\alpha^*_{\omega' \omega lm} f_{\omega' lm} - \beta_{\omega' \omega lm} f^*_{\omega' lm}) \tag{2.22}$$

ここで，$\alpha_{\omega' \omega lm} = \alpha_{\omega' lm, \omega lm}$ であり，$\beta_{\omega' \omega lm} = \beta_{\omega' lm, \omega lm}$ である．この式より，

$$\alpha^*_{\omega' \omega lm} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{i\omega' v} e^{4Mi\omega \ln[(v_0 - v)/C]} \tag{2.23}$$

$$\beta_{\omega' \omega lm} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{-i\omega' v} e^{4Mi\omega \ln[(v_0 - v)/C]} \tag{2.24}$$

または同様なことだが，

$$\alpha^*_{\omega' \omega lm} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^\infty dv e^{-i\omega' v'} e^{4Mi\omega \ln(v'/C)} \tag{2.25}$$

$$\beta_{\omega' \omega lm} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^\infty dv e^{i\omega' v'} e^{4Mi\omega \ln(v'/C)} \tag{2.26}$$

いま，closed loop C での積分は，

$$\oint_C dv' e^{-i\omega' v'} e^{4Mi\omega \ln(v'/C)} = 0 \tag{2.27}$$

より，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dv' e^{-i\omega' v'} e^{4Mi\omega \ln(v'/C)} &= -\int_0^\infty dv' e^{i\omega' v'} e^{4Mi\omega \ln(-v'/C - i\varepsilon)} \\ &= -e^{4\pi M\omega} \int_0^\infty dv' e^{i\omega' v'} e^{4Mi\omega \ln(v'/C)} \end{aligned} \tag{2.28}$$

一段目では，(2.27) を使い，$v' \to -v'$ と変数を変換させた．第二段落では $\ln(-v'/C - i\varepsilon) = -\pi + i\ln(v'/C)$ の関係を使った．

これによって，

$$|\alpha_{\omega'\omega lm}| = e^{4\pi M\omega}|\beta_{\omega'\omega lm}| \tag{2.29}$$

という結論が導かれる．Bogolubov coefficients の関係式から，

$$\sum_{\omega'}(|\alpha_{\omega'\omega lm}|^2 - |\beta_{\omega'\omega lm}|^2) = \sum_{\omega'}(e^{8\pi M\omega} - 1)|\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = 1 \tag{2.30}$$

よって Number density は，

$$N_{\omega lm} = \sum_{\omega'}|\beta_{\omega'\omega lm}|^2 = \frac{1}{e^{8\pi M\omega} - 1} \tag{2.31}$$

となる．これはボーズアインシュタイン統計による熱放射と考えれば，その温度，Hawking temperature は，

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \tag{2.32}$$

となる．

3 Green Function and stress-tensor Renormalization

3.1 Ultraviolet Behavior

ストレスエナジーテンソルをここではあつかう．まず，その求め方はグリーン関数を定義することから始まる．グリーン関数のアダマード展開は，

$$G_1(x, x') = \frac{U(x, x')}{\rho} + V(x, x')\ln\rho + W(x, x') \tag{3.1}$$

とかける．ここで，$\rho = \frac{1}{2}y_a y^a$ である．ここで y^a は測地線を張るベクトルであり，微少量で見たときには $\rho = \frac{1}{2}(x - x')^2$ である．ここでグリーン関数は，

$$G_1(x, x') \equiv \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle \tag{3.2}$$

ここではグリーン関数を用いてストレスエナジーテンソルを求める方法を説明する．まずアクションは，

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^4x g^{1/2}\phi(\Box - \xi R - m^2)\phi \tag{3.3}$$

であり，場の方程式は，

$$g^{-1/2}\frac{\delta S}{\delta\phi} = (\Box - \xi R - m^2)\phi = 0 \tag{3.4}$$

ストレスエナジーテンソルは,

$$\begin{aligned} T^{ab} &\equiv 2g^{-1/2}\frac{\delta S}{\delta g_{ab}} \\ = (1-2\xi)\phi^{;a}\phi^{;b} + (2\xi - \frac{1}{2})g^{ab}\phi_{;c}\phi^{;c} &- 2\xi\phi\phi^{;ab} + 2\xi g^{ab}\phi\Box\phi \\ +\xi(R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab})\phi^2 &- \frac{1}{2}m^2 g^{ab}\phi^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

これを次のように計算する．(point-splliting method)

$$T^{ab} = [\vec{\tau}^{ab}(\phi(x)\phi(x'))] \equiv \lim_{x\to x'} \vec{\tau}^{ab}(\phi(x)\phi(x')) \tag{3.6}$$

ここで，$\vec{\tau}^{ab}$ は次のように定義されている．

$$\begin{aligned} \vec{\tau}^{ab} = (1-2\xi)g^{b}_{b'}\nabla^a\nabla^{b'} &+ (2\xi - \frac{1}{2})g^{ab}g^{c}_{c'}\nabla^c\nabla^{c'} - 2\xi\nabla^a\nabla^b \\ &+2\xi g^{ab}\nabla_c\nabla^c + \xi(R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}) - \frac{1}{2}m^2 g^{ab} \end{aligned} \tag{3.7}$$

massless minimaly coupled の時には,

$$T_{ab} = \phi_{,a}\phi_{,b} - \frac{1}{2}g_{ab}\phi_{,a}\phi^{,a} \tag{3.8}$$

となり，グリーン関数を用いると,

$$\langle T_{ab}\rangle = \frac{1}{2}\lim_{x'\to x}\{[\partial_a\partial_{b'} - \frac{1}{2}\partial_a\partial^{a'}]G^{(1)}(x,x')\} \tag{3.9}$$

これから実際にグリーン関数を求めてみる．まず初めにメトリックを Riemann normal coodinate で展開する．ここでは x' の周りで展開する．

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} &- \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma \\ &+(-\frac{1}{20}R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma\delta} + \frac{2}{45}R_{\alpha\mu\beta\lambda}R^{\lambda}{}_{\gamma\mu\delta})y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta \end{aligned} \tag{3.10}$$

同様にしてメトリックの detarminant を展開すると,

$$\begin{aligned} g = 1 &- \frac{1}{3}R_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}R_{\alpha\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma \\ +(\frac{1}{18}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta} &- \frac{1}{90}R_{\lambda\alpha\beta}{}^{\kappa}R_{\lambda\gamma\delta\kappa} - \frac{1}{20}R_{\alpha\beta;\gamma\delta})y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta \end{aligned} \tag{3.11}$$

次に，$\bar{G}(x,x')$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} G(x,x') &= g^{-1/4}(x)\bar{G}(x,x')g^{-1/4}(x') \\ &= g^{-1/4}\bar{G}(x,x') \end{aligned} \tag{3.12}$$

これらを，グリーン関数の満たす式,

$$(\Box - m^2 + \xi R)G(x,x') = g^{-1/2}\delta(x-x') \tag{3.13}$$

に代入してやると，

$$
\begin{aligned}
\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\bar{G} - [m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R]\bar{G} - \frac{1}{3}R_\alpha{}^\nu y^\alpha\partial_\nu\bar{G} \\
+\frac{1}{3}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta y^\alpha y^\beta\partial_\mu\partial_\nu\bar{G} - (\xi - \frac{1}{6})R_{;\alpha}y^\alpha\bar{G} \\
+(\frac{1}{3}R_\alpha{}^\nu{}_{;\beta} + \frac{1}{6}R_{\alpha\beta}{}^{;\nu})y^\alpha y^\beta\partial_\nu\bar{G} + \frac{1}{6}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_{\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma\partial_\mu\partial_\nu\bar{G} \\
-\frac{1}{2}(\xi - \frac{1}{6})R_{;\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\bar{G} + (-\frac{1}{30}R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta} + \frac{1}{60}R^\kappa{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta R_{\kappa\lambda} \\
+\frac{1}{60}R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta} - \frac{1}{120}R_{;\alpha\beta} + \frac{1}{40}\Box R_{\alpha\beta})y^\alpha y^\beta\bar{G} \\
+(-\frac{3}{20}R^\nu{}_{\alpha;\beta\gamma} + \frac{1}{10}R_{\alpha\beta}{}^{;\nu}{}_\gamma - \frac{1}{60}R^\kappa{}_\alpha{}^\nu{}_\beta R_{\kappa\gamma} \\
+\frac{1}{15}R^\kappa{}_{\alpha\lambda\beta}R_\kappa{}^\nu{}_\gamma{}^\lambda)y^\alpha y^\beta y^\gamma\partial_\nu\bar{G} + (\frac{1}{20}R^\mu{}_\alpha{}^\mu{}_{\beta;\gamma\delta} \\
+\frac{1}{15}R^\mu{}_{\alpha\lambda\beta}R^\lambda{}_\gamma{}^\nu{}_\delta)y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta\partial_\mu\partial_\nu\bar{G} = -\delta(y)
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

となる．これから次元を一般化してフーリエ展開する．

$$
\bar{G}(x, x') = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{iky}\bar{G}(k) \tag{3.15}
$$

ここで，$ky \equiv k_\alpha y^\alpha = \eta^{\alpha\beta}k_\alpha y_\beta$ である．これから $\bar{G}(k)$ を展開するとすると，

$$
\bar{G}(k) = \bar{G}_0(k) + \bar{G}_1(k) + \bar{G}_2(k) + \cdots \tag{3.16}
$$

となる．$\bar{G}_i(x, x')$ との関係は，

$$
\bar{G}_i(x, x') = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{iky}\bar{G}_i(k) \tag{3.17}
$$

ここで，

$$
\bar{G}_0(k) = (k^2 + m^2)^{-1} \tag{3.18}
$$

であり，一次は

$$
\bar{G}_1(k) = 0 \tag{3.19}
$$

である．よって二次は，

$$
\begin{aligned}
\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_2 - m^2\bar{G}_2 + (\xi - \frac{1}{6})R\bar{G}_0 - \frac{1}{3}R_\alpha{}^\nu y^\alpha\partial_\nu\bar{G}_0 \\
+\frac{1}{3}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta y^\alpha y^\beta\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_0 = 0
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

ここでローレンツ普遍性をこの式にかすと，

$$
-\frac{1}{3}R_\alpha{}^\nu y^\alpha\partial_\nu\bar{G}_0 + \frac{1}{3}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta y^\alpha y^\beta\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_0 \equiv 0 \tag{3.21}
$$

よって，(3.20) は

$$
\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\bar{G}_2 - m^2\bar{G}_2 + (\xi - \frac{1}{6})R\bar{G}_0 = 0 \tag{3.22}
$$

となって，

$$\bar{G}_2(k) = (\frac{1}{6} - \xi)R/(k^2 + m^2)^2 \tag{3.23}$$

同様の計算によってローレンツ普遍性を保つための条件として，

$$(\frac{1}{3}R_{\alpha\ ;\beta}^{\ \nu} + \frac{1}{6}R_{\alpha\beta}{}^{;\nu})y^\alpha y^\beta \partial_\nu \bar{G}_0 + \frac{1}{6}R^{\mu\ \nu}_{\ \alpha\ \beta;\gamma} y^\alpha y^\beta y^\gamma \partial_\mu \partial_\nu \bar{G}_0 \equiv 0 \tag{3.24}$$

$$(-\frac{3}{20}R^\nu{}_{\alpha;\beta\gamma} + \frac{1}{10}R_{\alpha\beta}{}^{;\nu}{}_{\gamma} - \frac{1}{60}R^\kappa{}_\alpha{}^\nu{}_\beta R_{\kappa\gamma} + \frac{1}{15}R^\kappa{}_{\alpha\lambda\beta}R_\kappa{}^\nu{}_\gamma{}^\lambda)y^\alpha y^\beta y^\gamma \partial_\nu \bar{G}_0 + (\frac{1}{20}R^\mu{}_\alpha{}^\mu{}_{\beta;\gamma\delta} + \frac{1}{15}R^\mu{}_{\alpha\lambda\beta}R^\lambda{}_\gamma{}^\nu{}_\delta)y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta \partial_\mu \partial_\nu \bar{G}_0 \equiv 0 \tag{3.25}$$

が出てくる．よって (2.4) は，

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\bar{G} - [m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R]\bar{G} - (\xi - \frac{1}{6})R_{;\alpha}y^\alpha\bar{G} - \frac{1}{2}(\xi - \frac{1}{6})R_{;\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\bar{G} + (-\frac{1}{30}R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta} + \frac{1}{60}R^\kappa{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta R_{\kappa\lambda} + \frac{1}{60}R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta} - \frac{1}{120}R_{;\alpha\beta} + \frac{1}{40}\Box R_{\alpha\beta})y^\alpha y^\beta\bar{G} = -\delta(y) \tag{3.26}$$

k で書くのなら，

$$[k^2 + m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R]\bar{G} + i(\xi - \frac{1}{6})R_{;\alpha}\partial^\alpha\bar{G} + [-\frac{1}{2}(\xi - \frac{1}{6})R_{;\alpha\beta} - \frac{1}{30}R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta} + \frac{1}{60}R^\kappa{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta R_{\kappa\lambda} + \frac{1}{60}R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta} - \frac{1}{120}R_{;\alpha\beta} + \frac{1}{40}\Box R_{\alpha\beta}]\partial^\alpha\partial^\beta\bar{G}(k) = 1 \tag{3.27}$$

である．この方程式を四次まで解くと，

$$\bar{G}(k) = (k^2 + m^2)^{-1} + (\frac{1}{6} - \xi)R(k^2 + m^2)^{-2} + i(\frac{1}{6} - \xi)R_{;\alpha}(k^2 + m^2)^{-1}\partial^\alpha(k^2 + m^2)^{-1} + (\frac{1}{6} - \xi)^2R^2(k^2 + m^2)^{-3} + a_{\alpha\beta}(k^2 + m^2)^{-1}\partial^\alpha\partial^\beta(k^2 + m^2)^{-1} \tag{3.28}$$

ここで，

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\xi - \frac{1}{6})R_{;\alpha\beta} + \frac{1}{30}R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta} - \frac{1}{60}R^\kappa{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta R_{\kappa\lambda} - \frac{1}{60}R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta} + \frac{1}{120}R_{;\alpha\beta} - \frac{1}{40}\Box R_{\alpha\beta} \tag{3.29}$$

次に微分の関係を次のように定義すると,

$$(k^2+m^2)^{-1}\partial^\alpha(k^2+m^2)^{-1} \equiv \frac{1}{2}\partial^\alpha(k^2+m^2)^{-2} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}(k^2+m^2)^{-1}\partial^\alpha\partial^\beta(k^2+m^2)^{-1} \equiv \frac{1}{3}\partial^\alpha\partial^\beta(k^2+m^2)^{-2} \\ -\frac{2}{3}\eta^{\alpha\beta}(k^2+m^2)^{-3}\end{aligned} \tag{3.31}$$

式 (3.28) は,

$$\begin{aligned}\bar{G}(k) = (k^2+m^2)^{-1} + (\frac{1}{6}-\xi)R(k^2+m^2)^{-2} \\ +\frac{1}{2}i(\frac{1}{6}-\xi)R_{;\alpha}\partial^\alpha(k^2+m^2)^{-2} \\ +\frac{1}{3}a_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta(k^2+m^2)^{-2} \\ +[(\frac{1}{6}-\xi)^2R^2-\frac{2}{3}a_\lambda{}^\lambda](k^2+m^2)^{-3}\end{aligned} \tag{3.32}$$

$\bar{G}(x,x')$ を求めるにはこれをフーリエ変換してやればよく,

$$\begin{aligned}\bar{G}(x,x') = \int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}e^{iky}[1+f_1(x,x')(-\frac{\partial}{\partial m^2}) \\ +f_2(x,x')(\frac{\partial}{\partial m^2})^2]\frac{1}{k^2+m^2}\end{aligned} \tag{3.33}$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned}f_1(x,x') = (\frac{1}{6}-\xi)R+\frac{1}{2}(\frac{1}{6}-\xi)R_{;\alpha}y^\alpha \\ -\frac{1}{3}a_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$f_2(x,x') = \frac{1}{2}(\frac{1}{6}-\xi)^2R^2-\frac{1}{3}a^\lambda{}_\lambda \tag{3.35}$$

である．今，次のように書けることを利用する．

$$(k^2+m^2)^{-1} = \int_0^\infty ids\exp[-is(k^2+m^2)] \tag{3.36}$$

ここで，m^2 は $m^2-i\varepsilon$ と書き直してある．そして次のように定義をする．

$$F(x,x';is) = 1+f_1(x,x')is+f_2(x,x')(is)^2 \tag{3.37}$$

そして，次の式を使う．

$$\begin{aligned}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\exp[-is(k^2+m^2)+iky] \\ = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}}(is)^{-n/2}\exp(-im^2s-\frac{\sigma}{2is})\end{aligned} \tag{3.38}$$

ここで，$\sigma = \frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha$ とした．すると以下の式を得る．

$$\bar{G}(x,x') = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \times \int_0^\infty \frac{ids}{(is)^{n/2}} \exp\left(-im^2 s - \frac{\sigma}{2is}\right) F(x,x';is) \tag{3.39}$$

van Vleck determinant

$$\Delta(x,x') = -g^{-1/2}(x) \det\left[-\partial_\mu \partial_{\mu'} \sigma(x,x')\right] g^{-1/2}(x') \tag{3.40}$$

を使えば，グリーン関数は，

$$G(x,x') = \frac{i\Delta^{1/2}(x,x')}{(4\pi)^{n/2}} \times \int_0^\infty \frac{ids}{(is)^{n/2}} \exp\left(-im^2 s - \frac{\sigma}{2is}\right) F(x,x';is) \tag{3.41}$$

となる．

今，*effective action* を W とすると，

$$\frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle \tag{3.42}$$

となる．生成関数を Z とおけば，

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\phi] \exp\left\{ iS_m[\phi] + i\int J(x)\phi(x) d^n x \right\} \tag{3.43}$$

である．規格化条件より，

$$Z[0] \equiv \langle \mathrm{out},0|0,\mathrm{in} \rangle = \langle 0|0 \rangle = 1 \tag{3.44}$$

今，$T_{\mu\nu}$ は

$$\frac{2}{(g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} \tag{3.45}$$

そして，

$$\begin{aligned} \delta Z[0] &= i\int \mathcal{D}[\phi] \delta S_m e^{iS_m[\phi]} \\ &= i\langle \mathrm{out},0|0,\mathrm{in} \rangle \end{aligned} \tag{3.46}$$

この二つの式より，

$$\frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta Z[0]}{\delta g^{\mu\nu}} = i\langle \mathrm{out},0|T_{\mu\nu}|0,\mathrm{in} \rangle \tag{3.47}$$

今次のように書くとすると，

$$Z[0] = e^{iW} \tag{3.48}$$

$$W = -i \ln \langle \mathrm{out},0|0,\mathrm{in} \rangle \tag{3.49}$$

よって，

$$\frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}}=\frac{\langle\text{out,0}|T_{\mu\nu}|0,\text{in}\rangle}{\langle\text{out,0}|0,\text{in}\rangle} \tag{3.50}$$

デルタ関数を次のように置き換える．

$$\int d^n x[-g(x)]^{\frac{1}{2}}\delta^n(x-y)[-g(y)]^{-\frac{1}{2}}=1 \tag{3.51}$$

さらに，K_{xy} を次のように定義する．

$$K_{xy}=(\Box+m^2-i\varepsilon+\zeta R)\delta^n(x-y)[-g(y)]^{-\frac{1}{2}} \tag{3.52}$$

そして，以下の式が満たされていることを見る．

$$\int d^n y[-g(y)]^{\frac{1}{2}}K_{xy}K_{yz}^{-1}=\delta(x-z)[-g(z)]^{-\frac{1}{2}} \tag{3.53}$$

これは，

$$K_{xz}^{-1}=-G_F(x,z) \tag{3.54}$$

を意味している．これらより，

$$Z[0]\propto[\det(-G_F)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.55}$$

$$W=-i\ln Z[0]=-\frac{1}{2}i\text{tr}[\ln(-G_F)] \tag{3.56}$$

今，規格化より

$$\langle x|x'\rangle=\delta^n(x-x')[-g(x)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.57}$$

であるから，

$$G_F(x,x')=\langle x|G_F|x'\rangle \tag{3.58}$$

となる．

$$G_F=-K^{-1}=i\int_0^\infty e^{-iKs}ds \tag{3.59}$$

$$\langle x|e^{-iKs}|x'\rangle=i(4\pi)^{-n/2}\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')e^{im^2s+\sigma/2is}F(x,x';is)(is)^{-n/2} \tag{3.60}$$

いま K が small negative imaginary part を持つと仮定するならば，

$$\int_\Lambda^\infty e^{-iKs}(is)^{-1}ids=\text{Ei}(-i\Lambda K) \tag{3.61}$$

となる．ここで Ei は exponential integral function である．これは次のように展開できる．

$$\text{Ei}(x)=\gamma+\ln(-x)+O(x) \tag{3.62}$$

ここで γ はオイラー定数である．この式をさきほどの式に代入して，$\Lambda=0$ とおくと

$$\ln(-G_F)=-\ln K=\int_0^\infty e^{iKs}(is)^{-1}ids \tag{3.63}$$

これらより，

$$\langle x|\ln(-G_F^{DS})|x'\rangle = -\int_{m^2}^{\infty} G_F^{DS}(x,x')dm^2 \tag{3.64}$$

これで W を表現してやれば，

$$W = \frac{1}{2}i\int d^n x[-g(x)]^{\frac{1}{2}} \lim_{x'\to x}\int_{m^2}^{\infty} dm^2 G_F^{DS}(x,x') \tag{3.65}$$

limit $x' \to x$ をとると，

$$W = \frac{1}{2}i\int_{m^2}^{\infty} dm^2 \int d^n x[-g(x)]^{\frac{1}{2}} G_F^{DS}(x,x) \tag{3.66}$$

となる．今，*effective Lagrangian density* $\mathcal{L}_{eff}$ を次のように定義する．

$$W = \int \mathcal{L}_{eff}(x)d^n x \equiv \int [-g(x)]^{\frac{1}{2}} L_{eff}(x)d^n x \tag{3.67}$$

ここで，

$$L_{eff}(x) = [-g(x)]^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}_{eff}(x) = \frac{1}{2}i\lim_{x'\to x}\int_{m^2}^{\infty} dm^2 G_F^{DS}(x,x') \tag{3.68}$$

ここで，G_F^{DS} を代入することによって，

$$L_{eff} \approx \lim_{x'\to x}\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')}{2(4\pi)^{n/2}}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,x')\int_0^{\infty}(is)^{j-1-n/2}e^{-i(m^2 s-\sigma/2s)}ids \tag{3.69}$$

lim $x' \to x$ をとることによって，

$$L_{eff} \approx \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\int_0^{\infty}(is)^{j-1-n/2}e^{-im^2 s}ids \tag{3.70}$$

$$= \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)(m^2)^{n/2-j}\Gamma(j-n/2) \tag{3.71}$$

ここで，$a_j(x) = a_j(x,x')$ とした．さらに任意の mass scale μ を使うことによってこの式は次の式へと変形される．

$$L_{eff} \approx \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}(m/\mu)^{n-4}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)m^{4-2j}\Gamma(j-n/2) \tag{3.72}$$

発散は $j=2$ の時におこる．よって，

$$W_{div} = \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}(m/\mu)^{n-4}\Gamma(2-n/2)\int d^n x[-g(x)]^{\frac{1}{2}} a_2(x) \tag{3.73}$$

$$= \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}(m/\mu)^{n-4}\Gamma(2-n/2)\int d^n x[-g(x)]^{\frac{1}{2}}[\alpha F(x) + \beta G(x)] + O(n-4) \tag{3.74}$$

ここで,

$$F = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R^2 \tag{3.75}$$

$$G = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + R^2 \tag{3.76}$$

そして，定数 α, β は,

$$\alpha = \frac{1}{120}, \quad \beta = -\frac{1}{360} \tag{3.77}$$

ここで次の関係が成り立つことに注意する.

$$\frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}}g^{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int(-g)^{\frac{1}{2}}Fd^nx = -(n-4)(F - \frac{2}{3}\Box R) \tag{3.78}$$

$$\frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}}g^{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int(-g)^{\frac{1}{2}}Gd^nx = -(n-4)G \tag{3.79}$$

これらを使うと,

$$\begin{aligned}\langle T_\mu{}^\mu\rangle = \frac{2}{(-g)^{\frac{1}{2}}}g^{\mu\nu}\frac{\delta W_{div}}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}(m/\mu)^{n-4}(4-n)\Gamma(2-n/2) \\ &\times[\alpha(F - \frac{2}{3}\Box R) + \beta G] + O(n-4)\end{aligned} \tag{3.80}$$

よって，T_{div} は

$$\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{div} = (1/16\pi^2)[\alpha(F - \frac{2}{3}\Box R) + \beta G] \tag{3.81}$$

発散項を取り除くための繰り込み項はそのマイナスだから,

$$\langle T_\mu{}^\mu\rangle_{ren} = -(1/16\pi^2)[\alpha(F - \frac{2}{3}\Box R) + \beta G] \tag{3.82}$$

$$= -a_2/16\pi^2 \tag{3.83}$$

$$= -(1/2880\pi^2)[R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \Box R] \tag{3.84}$$

$$= -(1/2880\pi^2)[C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 - \Box R] \tag{3.85}$$

3.2 Infrared Behavior

これから massless scalar field in flat four-dimensional spacetime を考える．ここでの量子場は

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}} + a^\dagger_{\mathbf{k}}f^*_{\mathbf{k}}) \tag{3.86}$$

今 mode function を box normalization すると,

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\sqrt{2\omega V}}[\alpha(\omega)e^{-i\omega t} + \beta(\omega)e^{i\omega t}] \tag{3.87}$$

となり，

$$|\alpha(\omega)|^2 - |\beta(\omega)|^2 = 1 \tag{3.88}$$

である．二点関数を書くならば，

$$\langle\varphi|\phi(x)\phi(x')|\varphi\rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3k\omega^{-1}\{[\alpha(\omega)e^{-i\omega t} + \beta(\omega)e^{i\omega t}] \\ \times[\alpha^*(\omega)e^{i\omega t'} + \beta^*(\omega)e^{-i\omega t'}]e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \tag{3.89}$$

である．今，ω が小さいとすると，

$$\langle\varphi|\phi(x)\phi(x')|\varphi\rangle \sim \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\omega\omega|\alpha(\omega) + \beta(\omega)|^2 \tag{3.90}$$

である．例えば，

$$\beta(\omega) = \omega^{-c} \quad \alpha(\omega) = (1+\omega^{-2c})^{\frac{1}{2}} \tag{3.91}$$

ととるとすると，

$$|\alpha(\omega) + \beta(\omega)| \sim \omega^{-c}, \quad \omega \longrightarrow 0 \tag{3.92}$$

となり，$c > 1$ で発散する．　二次元の場合も同じく，二点関数は

$$\langle\varphi|\phi(x)\phi(x')|\varphi\rangle \sim \frac{1}{4\pi}\int d\omega\omega^{-1}|\alpha(\omega) + \beta(\omega)|^2 \tag{3.93}$$

となる．ここでも例として，

$$\beta(\omega) = -\omega^{-c}, \quad \alpha(\omega) = (1+\omega^{-2c})^{\frac{1}{2}} \tag{3.94}$$

とすると，

$$|\alpha(\omega) + \beta(\omega)| \sim \frac{1}{4}\omega^{2c}, \quad \omega \longrightarrow 0 \tag{3.95}$$

となり今度は $c > 0$ で有限である．もしも，$\alpha = 1, \beta = 0$ ととるのならこの二次元の場合でも発散は起きる．時間が無限に近づくことによって，

$$\langle\phi^2\rangle \sim t^{2c} \tag{3.96}$$

となる．

同様なことは deSitter spacetime でもおこる．この場合のメトリックは，

$$ds^2 = \frac{1}{(H\eta)^2}(d\eta^2 - d\mathbf{x}^2) = dt^2 - e^{2Ht}d\mathbf{x}^2 \tag{3.97}$$

であり，

$$\Box\phi = 0 \tag{3.98}$$

を満たすモード関数は

$$f_{\mathbf{k}} \propto e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}[c_2H^{(2)}_{\frac{3}{2}}(k\eta) + c_1H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(k\eta)] \tag{3.99}$$

である．ここで H は Hankel function である．今，$c_2 = 1, c_1 = 0$ とすれば infrared divergent が起きる．なぜなら，

$$H^{(2)}_{\frac{3}{2}}(k\eta) \sim k^{-\frac{3}{2}}, \quad k \to 0 \tag{3.100}$$

となるからである．この場合，時間無限延で

$$\langle \phi^2 \rangle \sim \frac{H^3 t}{4\pi^2}, \quad t \to \infty \tag{3.101}$$

となっている．

この結果は Goldstone model of U(1) symmetry breaking に応用できる．まず Lagrangian density を

$$\mathcal{L} = \partial_\alpha \Phi^* \partial^\alpha \Phi - V(\Phi) \tag{3.102}$$

とおく，ここで，

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2} m^2 \Phi^* \Phi + \frac{1}{4} \lambda (\Phi^* \Phi)^2 \tag{3.103}$$

このポテンシャルは

$$\Phi = \sigma e^{i\phi}, \quad \sigma = m\lambda^{-1/2} \tag{3.104}$$

で minimal をとる．Φ の運動方程式は，$\Box\phi = 0$ を導く．ここで positive and negative frequency part に分けると，$\phi = \phi^+ + \phi^-$ となり，$\phi^+|0\rangle = 0, and \langle 0|\phi^- = 0$ である．これを成分で書けば，$\phi^+ = \sum_j a_j f_j, \phi^- = \sum_j a^\dagger_j f^*_j$ である．今次の式を使う．これには Campbell-Baker-Hausdorff の等式を使う．

$$e^{i\phi} = ei(\phi^+ + \phi^-) = e^{i\phi^-} e^{-\frac{1}{2}[\phi^+, \phi^-]} e^{i\phi^+} \tag{3.105}$$

そして，さらに

$$[\phi^+, \phi^-] = \sum_j f_j f^*_j = \langle \phi^2 \rangle \tag{3.106}$$

を使えば，

$$\langle \Phi \rangle = \sigma \langle e^{i\phi} \rangle = \sigma e^{-\frac{1}{2}\langle \phi^2 \rangle} \tag{3.107}$$

となる．

4 Negative Energy Densities and Fluxes

4.1 Casimir effect

ここでは真空中の electrodynamic stress-energy tensor を考える．このストレスエナジーテンソルは，

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x, \varepsilon) = {} & F^{\mu\lambda}(x + \frac{1}{2}\varepsilon) F^\nu{}_\lambda (x - \frac{1}{2}\varepsilon) \\ & - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\kappa}(x + \frac{1}{2}\varepsilon) F_{\lambda\kappa}(x - \frac{1}{2}\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.1}$$

を使って，次のように定義される．

$$T^{\mu\nu} = \lim_{\varepsilon\to 0}(1+\frac{1}{4}\varepsilon^{\lambda}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^{\lambda}})T^{\mu\nu}(x,\varepsilon) \tag{4.2}$$

このように定義することによって，$(\varepsilon^2)^{-2}$ の発散を取り除くことができる．これからストレスエナジーテンソルの性質を入れていく，まず，divergence がゼロより，

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \tag{4.3}$$

である．また，トレースがゼロより，

$$T^{\mu}_{\ \mu} = 0 \tag{4.4}$$

である．

今，平行に置かれた無限大の完全伝導体があると仮定する．その距離は a である．方向は $\hat{z}^{\mu} = (0,0,0,1)$ とする．ストレスエナジーテンソルは次のような形である．

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle_{(0)} = (\frac{1}{4}g^{\mu\nu} - \hat{z}^{\mu}\hat{z}^{\nu})f(z) \tag{4.5}$$

しかし，今トレースがゼロより $f(z)$ はコンスタントでなくてはならないこれは単位体積あたりのエネルギーだとすると，

$$\langle T^{\mu\nu}\rangle_{(0)} = (\frac{1}{4}g^{\mu\nu} - \hat{z}^{\mu}\hat{z}^{\nu})(\hbar c/a^4)\gamma \tag{4.6}$$

ここで，

$$\gamma = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{l=1}^{\infty} l^{-4} = (1/2\pi^2)\zeta(4) = \pi^2/180 \tag{4.7}$$

である．エナジー密度は，

$$\langle T^{00}\rangle_{(0)} = -(\pi^2/720)(\hbar c/a^4) \tag{4.8}$$

であり，プレッシャーは

$$\langle T^{33}\rangle_{(0)} = -(\pi^2/240)(\hbar c/a^4) \tag{4.9}$$

である．この負のエネルギー密度になることをカシミア効果という．

この仕事に関係して renormalized conformal scalar field のストレスエナジーテンソルを計算したものがある [8]．それによると，

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle = \frac{1}{1440r^4\alpha^2}(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\pi^2})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

となる．ここで r がプレートの距離で，α が角度である．同様な計算で electromagnetic の場合は,

$$\frac{1}{720\pi^2 r^4}(\frac{\pi^2}{\alpha^2}+11)(\frac{\pi^2}{\alpha^2}-1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \tag{4.11}$$

である．

4.2 Negative Energy: simple example

ここではまず初めに真空と 2 粒子状態の重ね合わせを考える．

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}(|0\rangle + \varepsilon|2\rangle) \tag{4.12}$$

これから energy density operator を normal-order にする．

$$\rho =: T_{tt} : \tag{4.13}$$

こうすると真空のエネルギーの期待値がゼロになる ($\langle 0|\rho|0\rangle$)．すると今の場合のエネルギーの期待値は,

$$\langle\rho\rangle = \frac{1}{1+\varepsilon^2}[2\varepsilon \mathrm{Re}(\langle 0|\rho|0\rangle) + \varepsilon^2\langle 2|\rho|2\rangle] \tag{4.14}$$

となる．第一項は負にも正にもなるので，ε を適当に取れば，ある場所で $\langle|\rho|\rangle < 0$ となることができる．

次にもう少し一般的な例として squeezed state のエネルギーがどこかで負になることを利用する．一般の squeezed state は次のように書ける．

$$|z,\zeta\rangle = D(z)S(\zeta)|0\rangle \tag{4.15}$$

ここで，$D(z)$ は displacement operator で

$$D(z) \equiv \exp(za^\dagger - z^* a) = e^{-|z|^2/2}e^{za^\dagger}e^{-z^* a} \tag{4.16}$$

$S(\zeta)$ は squeeze operator で,

$$S(\zeta) \equiv \exp[\frac{1}{2}\zeta^* a^2 - \frac{1}{2}\zeta(a^\dagger)^2] \tag{4.17}$$

である．ここで,

$$z = se^{i\gamma}, \quad \zeta = re^{i\delta} \tag{4.18}$$

であり，任意の複素数である．displacement と squeeze operator は次の関係を満たす．

$$D^\dagger(z)aD(z) = a + z \tag{4.19}$$

$$D^\dagger(z)a^\dagger D(z) = a^\dagger + z \tag{4.20}$$

$$S^\dagger(\zeta)aS(\zeta) = a\cosh r - a^\dagger e^{i\delta}\sinh r \tag{4.21}$$

$$S^\dagger(\zeta)a^\dagger S(\zeta) = a^\dagger\cosh r - ae^{-i\delta}\sinh r \tag{4.22}$$

$\zeta = 0$ の時はコヒーレント状態 $|z\rangle = |z, 0\rangle$ をえる．この時の量子場の期待値は

$$\langle\phi\rangle = zf + z^* f^* \tag{4.23}$$

となる．さらに，この状態の fluctuation は最小であり，

$$\langle : \phi^2 : \rangle = \langle\phi\rangle^2 \tag{4.24}$$

である．squeezed state $|0, \zeta\rangle$ の場合はどこかで $\langle\rho\rangle < 0$ となることがある．ここで，今までの議論を曲がった空間での量子場の理論に適応してみる．Bogolubov 変換

$$a = \alpha^* b - \beta^* b^\dagger \tag{4.25}$$

とする．ここで $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ である．この変数の元で，$a|0\rangle_{in} = 0$ であり，$b|0\rangle_{out} = 0$ である．今始状態と終状態が次の関係で結ばれているとする．

$$|0\rangle_{in} = \Sigma|0\rangle_{out} \tag{4.26}$$

ここで Σ はオペレーターである．この式に $\Sigma^\dagger a$ をかけてやることによって，

$$\Sigma^\dagger a\Sigma|0\rangle = 0 \tag{4.27}$$

が導かれる．ここで，$\Sigma^\dagger a\Sigma = b = \alpha a + \beta^* a^\dagger$ となっている．もし，$\alpha = \cosh r, \beta = -e^{-i\delta}$ ととるならば，$\Sigma = S$ であり，$|0\rangle_{in}$ は squeezed vacuum になる．よってこれは負の期待値をもつことがある．

4.3 Negative Energy Near Black Hole

簡単のため二次元シュバルツシルトブラックホールを考えてみる．メトリックは，

$$ds^2 = (1 - 2M/r)dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 \tag{4.28}$$

ここで，座標変換をすると，

$$\begin{aligned} u &= t - r^* \\ v &= t + r^* \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} r^* &= r + 2M\ln(r/2M - 1) \\ ds^2 &= (1 - 2M/r)dudv \end{aligned} \tag{4.30}$$

ここで，ストレスエナジーテンソルは，section1.4 より，

$$T_{\mu\nu} = -(\frac{\varepsilon^{-2}}{4\pi t_a t^a} + \frac{R}{24\pi})(\frac{t_\mu t_\nu}{t_a t^a} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}) + \theta_{\mu\nu} + O(\varepsilon) \tag{4.31}$$

となる．ここで，$\theta_{\mu\nu}$ はコンフォーマルファクターを用いて次のように書ける．

$$\begin{aligned} \theta_{\bar{u}\bar{u}} &= -(12\pi)^{-1}C^{1/2}(C^{-1/2})_{,\bar{u}\bar{u}} \\ \theta_{\bar{v}\bar{v}} &= -(12\pi)^{-1}C^{1/2}(C^{-1/2})_{,\bar{v}\bar{v}} \\ \theta_{\bar{u}\bar{v}} &= \theta_{\bar{v}\bar{u}} = 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

ストレスエナジーテンソルをくりこみして，$t^a t_a = \pm 1$ とすると，

$$T_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + \frac{R}{48\pi}g_{\mu\nu} \tag{4.33}$$

これを計算してみると，

$$\begin{aligned} T_{uu} = T_{vv} &= (24\pi)^{-1}(\frac{3M^2}{2r^4} - \frac{M}{r^3}) \\ T_{uv} = T_{vu} &= (24\pi)^{-1}(\frac{2M^2}{r^4} - \frac{M}{r^3}) \\ T_{tt} &= (24\pi)^{-1}(\frac{7M^2}{r^4} - \frac{4M}{r^3}) \\ T_{tr} &= T_{rt} = 0 \\ T_{rr} &= -(24\pi)^{-1}(1-2M/r)^{-2}\frac{M^2}{r^4} \end{aligned} \tag{4.34}$$

となっていて，確かにホライズン近傍ではエネルギーが負になっている．

4.4 Negative Energy Inequality

まず初めに二次元フラットの時空の massless 量子場を考える．stress tensor は，

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} \tag{4.35}$$

である．field operator は生成消滅演算子を使って，

$$\phi = \sum_k (a_k f_k + a_k^\dagger f_K^*) \tag{4.36}$$

となる．ここで mode function は今の場合

$$f_k = \frac{i}{2\omega L}e^{i(kx-\omega t)} \tag{4.37}$$

である．ここで $\omega = |k|$ である．

これから，Negative energy flux を今の式から求める．$x = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} F(t) &= \langle T^{xt} \rangle \\ &= \frac{1}{L}\mathrm{Re}\sum_{k,k'>0}\sqrt{kk'}(\langle a_k^\dagger a_{k'}\rangle e^{i(k-k')t} \\ &\quad + \langle a_k a_{k'}\rangle e^{-i(k+k')t}) \end{aligned} \tag{4.38}$$

ここで，peaked function($t_0/[\pi(t^2+t_0^2)]$) をかけて積分し，積分されたフラックスを次のように定義する．

$$\hat{F} = \frac{t_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)dt}{t^2+t_0^2} \tag{4.39}$$

先ほどの式より，

$$\begin{aligned}\hat{F} = \frac{1}{L}\mathrm{Re}\sum_{k,k'>0}\sqrt{kk'}(\langle a_k^\dagger a_{k'}\rangle e^{-|k-k'|t_0}\\ +\langle a_k a_{k'}\rangle e^{-(k+k')t_0})\end{aligned} \tag{4.40}$$

となる．

次に以下の不等式を証明する．

$$\mathrm{Re}\sum_{k,k'>0}\sqrt{kk'}\langle a_k^\dagger a_{k'}\rangle e^{-|k-k'|t_0} \geq \sum_{k,k'>0}\sqrt{kk'}\langle a_k^\dagger a_{k'}\rangle e^{-(k+k')t_0} \tag{4.41}$$

まず，

$$B_{mn} = \sqrt{mn}e^{-\alpha(m+n)}\mathrm{Re}\langle a_m^\dagger a_n\rangle \tag{4.42}$$

とおく．そして，

$$\begin{aligned}A_{mn} &= (e^{-\alpha|m-n|}-e^{-\alpha(m-n)})\sqrt{mn}\mathrm{Re}\langle a_m^\dagger a_n\rangle\\ &= (e^{-\alpha[|m-n|-(m+n)]}-1)B_{mn}\end{aligned} \tag{4.43}$$

ここで，$k=2\pi mL^{-1}, k'=2\pi nL^{-1}, \alpha=2\pi t_0 L^{-1}$ とすると，(4.41) は次の式に等しいことが分かる．

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}A_{mn} \geq 0 \tag{4.44}$$

今 $B_{mn}\geq 0$ となることを示す．なぜなら

$$\sum_{n,m=J}^{J+M}B_{mn} = ||\sum_{n=J}^{J+M}\sqrt{n}e^{-\alpha n}a_n|\varphi\rangle|| \geq 0 \tag{4.45}$$

だからである．これから A_{mn} を和に展開する．

$$\sum_{m,n=1}^{N}A_{mn} = \sum_{l=1}^{N}(A_{ll}+\sum_{j=0}^{N-1-l}(A_{l,N-j}+A_{N-j,l})) \tag{4.46}$$

A_{mn} を B_{mn} を用いて展開すれば,

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=1}^{N} A_{mn} &= \sum_{l=1}^{N}(e^{2\alpha l}-1)(B_{ll}+\sum_{j=0}^{N-1-l}(B_{l,N-j}+B_{N-j,l})) \\
&= (e^{2\alpha N}-1)B_{NN}+(e^{2\alpha(N-1)-1})[B_{N-1,N-1}+(B_{N-1,N}+B_{N,N-1})]+\cdots \\
&\geq (e^{2\alpha(N-1)}-1)[B_{NN}+B_{N-1,N-1}+(B_{N-1,N}+B_{N,N-1})] \\
&+ (e^{2\alpha(N-2)}-1)[B_{N-2,N-2}+\sum_{j=0}^{1}(B_{N-2,N-j}+B_{N-j,N-2})]+\cdots \\
&\geq (e^{2\alpha(N-2)}-1)\sum_{i,j=1}^{2} B_{N-i,N-j} \\
&+ (e^{2\alpha(N-3)}-1)(B_{N-3,N-3}+\sum_{j=0}^{2}(B_{N-3,N-j}+B_{N-j,N-3})) \\
&\geq \cdots \geq (e^{2\alpha(N-k)}-1)\sum_{i,j=0}^{k} B_{N-i,N-j} \\
&+ (e^{2\alpha(N-k-1)}-1)(B_{N-k-1,N-k-1}+\sum_{j=0}^{k}(B_{N-k-1,N-j}+B_{N-j,N-k-1}))+\cdots \\
&\geq \cdots \geq (e^{2\alpha}-1)\sum_{i,j=0}^{N-1} B_{N-i,N-j} \\
&= (e^{2\alpha}-1)\sum_{m,n=1}^{N} B_{mn} \geq 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

よって,

$$\sum_{m,n=1}^{N} A_{mn} \geq 0 \tag{4.48}$$

したがって，次の不等式が成り立つ.

$$\mathrm{Re}\sum_{k,k'>0}\sqrt{kk'}\langle a_k^\dagger a_{k'}\rangle e^{-|k-k'|t_0} \geq \sum_{k,k'>0}\sqrt{kk'}\langle a_k^\dagger a_{k'}\rangle e^{-(k+k')t_0} \tag{4.49}$$

そして，この式の右辺は実であるから,

$$\hat{F} \geq \frac{1}{L}\mathrm{Re}\sum_{k,k'>0}\sqrt{kk'}e^{-(k+k')t_0}(\langle a_k^\dagger a_{k'}\rangle+\langle a_k a_{k'}\rangle) \tag{4.50}$$

次に $h(k)=\sqrt{k}e^{-t_0 k}$ としたときに，次の式が成り立つことを証明する.

$$\hat{F} \geq -\frac{1}{2L}\sum_{k>0} h^2(k) \tag{4.51}$$

これは一般論から証明をする．まず，状態を Fock representation で表現すると,

$$|\varphi\rangle = \sum_{\{n_i\}} c(\{n_i\})|\{n_i\}\rangle \tag{4.52}$$

であり，

$$\sum_{\{n_i\}} |c(\{n_i\})|^2 = 1 \tag{4.53}$$

である．いま，$\{h\}$ を任意の実の数として，次のオペレーターを定義する．

$$P_N = \sum_{i,j=1}^{N} h_i h_j (a_i^\dagger a_j + a_i a_j + \mathrm{H.c.}) \tag{4.54}$$

そして，

$$\begin{aligned} S_N &= \langle\varphi|P_N|\varphi\rangle \\ &= 2\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{N} h_i h_j (\langle a_i^\dagger a_j\rangle + \langle a_i a_j\rangle) \end{aligned} \tag{4.55}$$

と定義する．これから S_N を展開していく．

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{\{n_i\}}(\sum_{i=1}^{N} h_i^2[n_i|c|^2 + \sqrt{n_i(n_i-1)}c^*(n_i-2)c] \\ &+ \sum_{i\neq j}^{N} h_i h_j[\sqrt{n_j(n_i+1)}c^*(n_i+1, n_j-1)c \\ &+ \sqrt{n_i n_j}c^*(n_i-1, n_j-1)c]) + \mathrm{c.c.} \end{aligned} \tag{4.56}$$

ここで，$c(\{n_i\}) = c(n_1, n_2, \cdots)$ であり，$c(n_i-2) = c(n_1, n_2, \cdots n_i-2, \cdots)$ である．次に上記の式を次のように書く．

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{\{n_i\}}(\sum_{i=1}^{N} h_i^2\{(n_i+1)|c|^2 + n_i|c|^2 + \sqrt{n_i(n_i-1)}[c^*(n_i-2)c + \mathrm{c.c.}]\} \\ &+ \sum_{i\neq j} h_i h_j[\sqrt{n_j(n_i+1)}c^*(n_i+1, n_j-1)c \\ &+ \sqrt{n_i n_j}c^*(n_i-1, n_j+1)c + \mathrm{c.c.}]) - \sum_{i=1}^{N} h_i^2 \end{aligned} \tag{4.57}$$

ここで，

$$\sum_{\{n_i\}}\sum_{i=1}^{N} h_i^2|c|^2 = \sum_{j=1}^{N} h_i^2 \tag{4.58}$$

となることを使った．これからさらに書き直すことによって，

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{\{n_i\}}(\sum_{i=1}^{N} h_i^2\{n_i|c(n_i-1)|^2+(n_i+1)|c(n_i+1)|^2 \\
&+ \sqrt{n_i(n_i+1)}[c^*(n_i-1)c(n_i+1)+\text{c.c.}]\} \\
&+ \sum_{i\neq j}^{N} h_i h_j\{\sqrt{n_j n_i}c^*(n_j-1)c(n_i-1)+\sqrt{(n_j+1)(n_i+1)}c^*(n_j+1)c(n_i+1)) \\
&+ [\sqrt{(n_i+1)n_j}c^*(n_j-1)c(n_i+1)+\text{c.c.}]\})-\sum_{j=1}^{N} h_j^2 \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

となる．ここで，以下の関係式を使った．

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{n_i\}}\sqrt{n_j(n_i+1)}c^*(n_i+1,n_j-1)c \\
&= \sum_{\{n_i\}}\sqrt{n_j n_i}c^*(n_j-1)c(n_i-1) \qquad (4.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\sum_{\{n_i\}}\sqrt{n_j(n_i+1)}c^*(n_i+1,n_j-1)c)^* \\
&= \sum_{\{n_i\}}\sqrt{(n_j+1)(n_i+1)c^*(n_j+1)c(n_i+1)} \qquad (4.61)
\end{aligned}$$

さらに S_N を書き下すと，

$$\sum_{\{n_i\}}|\sum_{i=1}^{N} h_i[\sqrt{n_i}c(n_i-1)+\sqrt{(n_i+1)}c(n_i+1)]|^2-\sum_{i=1}^{N} h_i^2 \qquad (4.62)$$

となる．これより明らかに，

$$S_N \geq -\sum_{i=1}^{N} h_i^2 \qquad (4.63)$$

である．これによって (4.51) が証明された．今，式 (4.51) の和を積分に直すと ($\sum_{k>0}\to(L/2\pi)\int_0^\infty dk$)，

$$\hat{F} \geq -\frac{1}{16\pi t_0^2} \qquad (4.64)$$

となる．今，デルタ関数的なパルスが流れ込むときを考える．例えば，

$$F(t)=|\Delta E|[-\delta(t)+\delta(t-T)] \qquad (4.65)$$

というパルスを考えた場合，式 (4.64) より，

$$|\Delta E| \leq \frac{T^2+t_0^2}{16 t_0 T^2} \qquad (4.66)$$

という式を得ることができる．ここで，$T = t_0$ とすると，

$$|\Delta E| \leq \frac{1}{8T} \tag{4.67}$$

となる．

四次元の場合も同様に計算でき，

$$|\Delta E| \leq \frac{3}{16\pi T} \tag{4.68}$$

となる．

同様な不等式はブラックホール時空でも計算でき [9][10], Reissner-Nordstrom spacetime の時の $Q = M$ の場合，

$$|\Delta M| < \frac{1}{t} \tag{4.69}$$

となる．ここで t は naked singularity の duration である．また，ブラックホールエントロピーに関しては，

$$\Delta S \approx M\Delta M \tag{4.70}$$

となるが，エントロピーが減るのは，

$$T \leq (\Delta M)^{-1} \tag{4.71}$$

の時間間隔 T のときのみである．さらにコンディションとして $T > M$ を要求するのなら，

$$\Delta S < 1 \tag{4.72}$$

となる．これはエントロピーの減少が 1 ビット以下と言っているが，熱力学第二法則は破られていない．

上述の方法を energy density にも適応できる [11]．今，energy density を以下のように定義する．

$$\rho = \langle T_{\mu\nu} \rangle \tag{4.73}$$

そして，先ほどと同様に積分された energy density を

$$\hat{\rho} \equiv \frac{t_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(t)dt}{t^2 + t_0^2} \tag{4.74}$$

で定義する．二次元平坦時空の場合 massless scalar field の時は，

$$\hat{\rho} \geq -\frac{1}{8\pi t_0^2} \tag{4.75}$$

であり，四次元平坦時空の massless scalar field の場合は，

$$\hat{\rho} \geq -\frac{3}{32\pi^2 t_0^4} \tag{4.76}$$

である．electromagnetic field の時は，

$$\hat{\rho} \geq -\frac{3}{16\pi^2 t_0^4} \tag{4.77}$$

となる．

5 Metric Fluctuations

ここではメトリックに fluctuation を加えて量子論を展開する．今，x と x' を結ぶ測地線の距離を σ_0 とする．

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(x-x')^2 \tag{5.1}$$

ここで fluctuation を一次まで考え，

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + O(h_{\mu\nu}^2) \tag{5.2}$$

とする．σ_1 は一次の摂動である．平坦な時空では，retarded Green's function for massless scalar field は，

$$G_{ret}^{(0)}(x-x') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi}\delta(\sigma_0) \tag{5.3}$$

である．これに一次の摂動までを加えると，

$$G_{ret}(x,x') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi}\delta(\sigma) \tag{5.4}$$

となり，デルタ関数を積分表示にすると，

$$G_{ret}(x,x') = \frac{\theta(t-t')}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{i\alpha\sigma_0} e^{i\alpha\sigma_1} \tag{5.5}$$

となる．ここで σ_1 を分解する．$\sigma_1^+|\varphi\rangle = 0$，$\langle\varphi|\sigma_1^- = 0$ となるようにして，$\sigma_1 = \sigma_1^+ + \sigma_1^-$ とする．そうすると，section3 のようにして，

$$\langle e^{i\alpha\sigma_1}\rangle = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\langle\sigma_1^2\rangle} \tag{5.6}$$

となり，retarded Green's function の期待値は，

$$\langle G_{ret}(x,x')\rangle = \frac{\theta(t-t')}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{i\alpha\sigma_0} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\langle\sigma_1^2\rangle} \tag{5.7}$$

となる．

この積分は $\langle\sigma_1^2\rangle > 0$ の場合のみ収束し，

$$\langle G_{ret}(x,x')\rangle = \frac{\theta(t-t')}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\langle\sigma_1^2\rangle}}\exp\left(-\frac{\sigma_0^2}{2\langle\sigma_1^2\rangle}\right) \tag{5.8}$$

となる．

Hadamard function を書くのならば，

$$\langle G_1(x,x')\rangle = -\frac{1}{2\pi^2}\langle\frac{1}{\sigma}\rangle = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} d\alpha \sin\alpha\sigma_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\langle\sigma_1^2\rangle} \tag{5.9}$$

となる．ここで二つの極限をとると，

$$\langle G_1(x,x')\rangle \sim -\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\sigma_0}, \quad \sigma_0^2 \gg \langle\sigma_1^2\rangle \tag{5.10}$$

$$\langle G_1(x,x')\rangle \sim -\frac{\sigma_0}{2\pi^2\langle\sigma_1^2\rangle} \quad \sigma_0^2 \ll \langle\sigma_1^2\rangle \tag{5.11}$$

となる．ここで第二式は lightcone の近傍であり，その近傍で有限であることを示している．average of the Feynman propagator over metric fluctuation は次の関係から求められる．

$$G_F(x,x') = \frac{1}{2}[G_{ret}(x,x') + G_{ret}(x',x)] - iG_1(x,x') \tag{5.12}$$

これもまた lightcone の近傍で有限である．

参考文献

[1] L.H.Ford gr-qc/9707062

[2] L.Parker *Phys. Rev.* **183** 1057(1969);*Phys. Rev* **D 3**349 (1971)

[3] E.Schrodinger *Physica* **6** 899 (1939)

[4] S.A.Fulling and P.C.W.Davies *Proc. R. Soc. London* **A 348** 393 (1976)

[5] P.C.W.Davies and S.A.Fulling *Proc. R. Soc. London* **A 356** 237 (1977)

[6] B.S.DeWitt *Phys. Rep.* **19** 295 (1975)

[7] S.W.Hawking *Commun. Math. Phys.* **43** 199 (1975)

[8] D.Deutsch and P.Candelas *Phys. Rev.* **D 20** 3063 (1979)

[9] L.H.Ford and T.A.Roman *Phys. Rev.* **D 41** 3662 (1990)

[10] L.H.Ford and T.A.Roman *Phys. Rev.* **D 46** 1328 (1992)

[11] L.H.Ford and T.A.Roman *Phys. Rev.* **D 55** 2082 (1997)