

相對性理論入門

澤山晋太郎 博士(理学)

理論物理学者

目次

- プロフィール
- 特殊相対性理論
- 一般相対性理論
- 宇宙論入門

プロフィール

1978年富士市生まれ

2001年慶應義塾大学理工学部物理学科卒

2007年東京工業大学理工学研究科基礎物理学専攻
卒 基礎物理学の博士号取得

専門は相対論

ブラックホールの消滅問題を解いたことが主要業績

他に日本人思想の研究もしている

書籍「道徳と宗教と法」「日本人の民間信仰と思想」
「高校物理数学」「曲がった時空のQFT」eブックランド
社

特殊相対性理論

- 考え方
- 光速普遍の原理
 - 時空(ミンコフスキー空間)
 - ローレンツ変換
- 双子のパラドックス
- 色々な空間
- ポアンカレ予想

相対論の考え方

自分が時速30kmで走っている電車を見ると電車が時速30kmで走っているように見える。しかし、電車から自分を見ると自分が時速30kmで逆方向に動いているように見える。

もちろん、自分が速度30kmで走っている電車に乗っていて、自分を見れば止まっているように見える。

全ての運動は相対的である。これが相対論の考え方である。

光速普遍の原理

光の速さはどこから見ても同じだったりする。

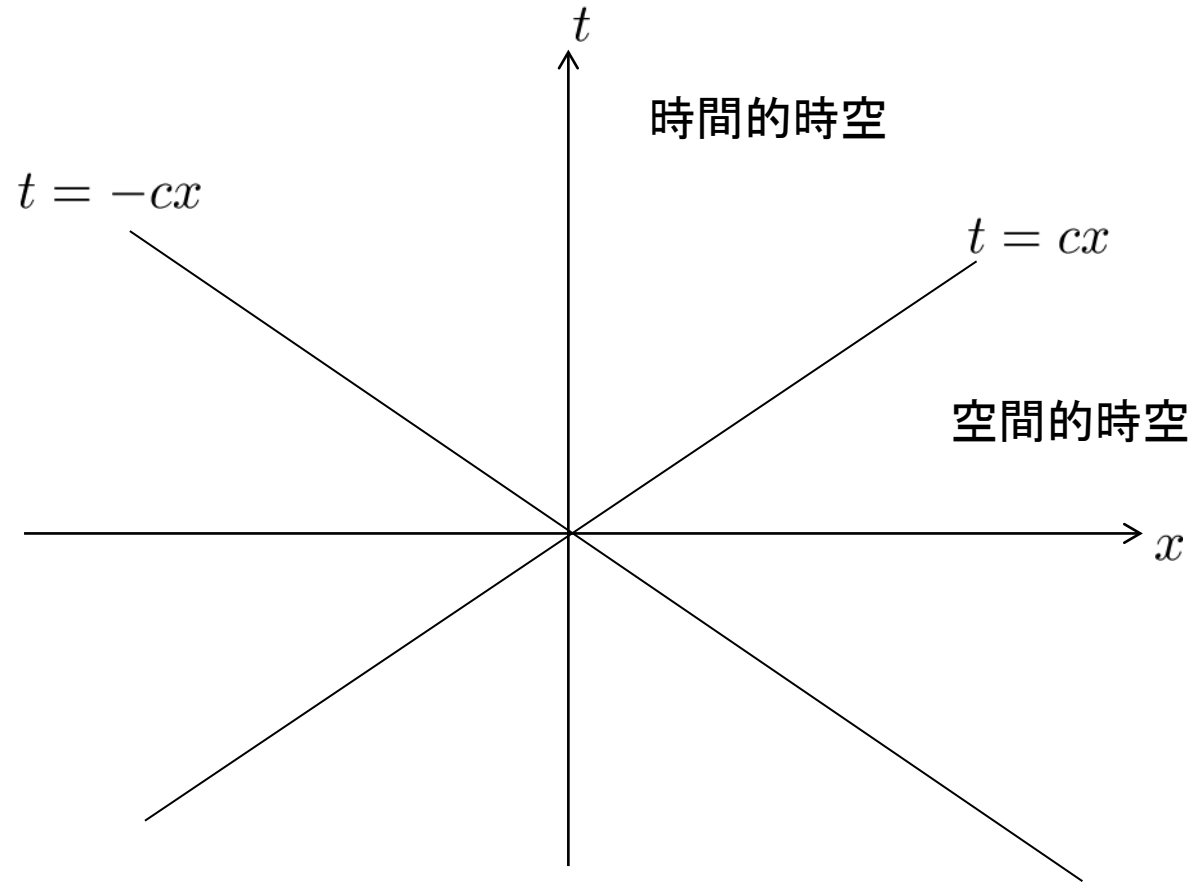
例えば、ロケットを飛ばして、光速の $1/2$ で飛ばして、その中で光を見ても光の速度は変わらない。これを光速普遍の原理という。

地球の北極と赤道では地球が回転しているから、通常を考えれば光速は違っているけれど、実際に観測してみて、光速が同じと分かっている。これは理論から導かれた結論ではなくて、観測から分かった原理である。

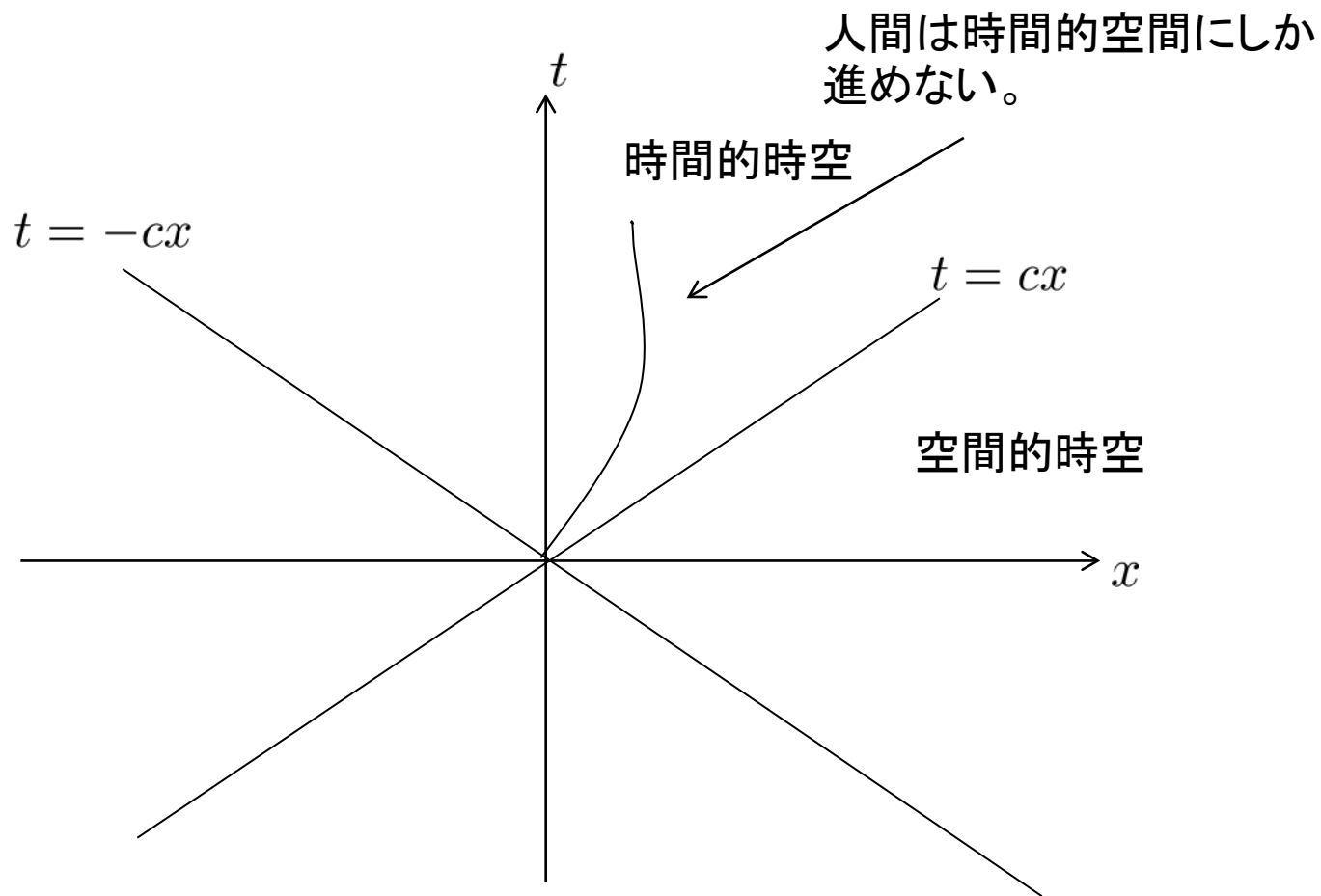
時空

我々が住んでいるのは空間三次元の時間一次元の $SO(3,1)$ 空間(ローレンツ空間)にいる。簡単に言えば四次元空間である。

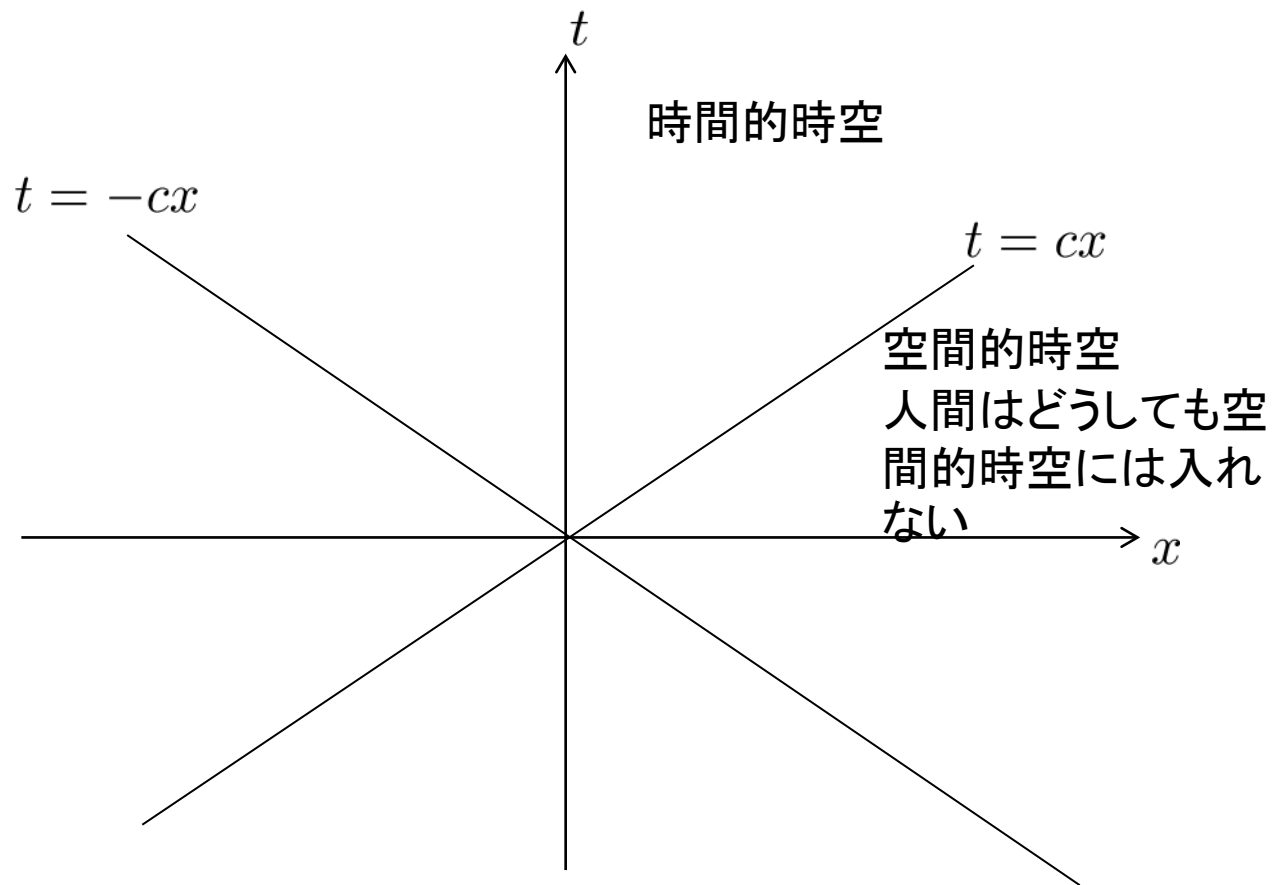
時空 (ミンコフスキー空間)



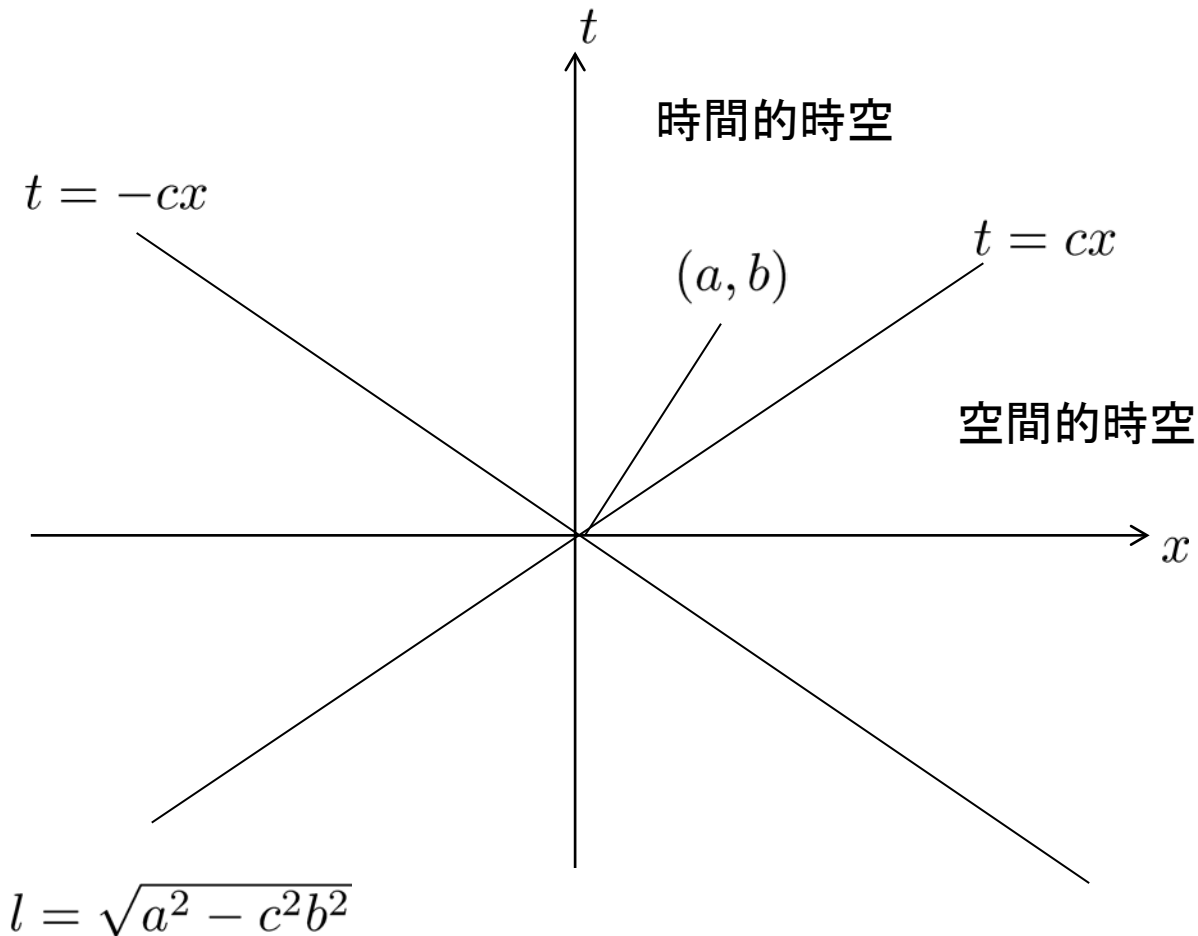
ミンコフスキー空間



ミンコフスキー空間

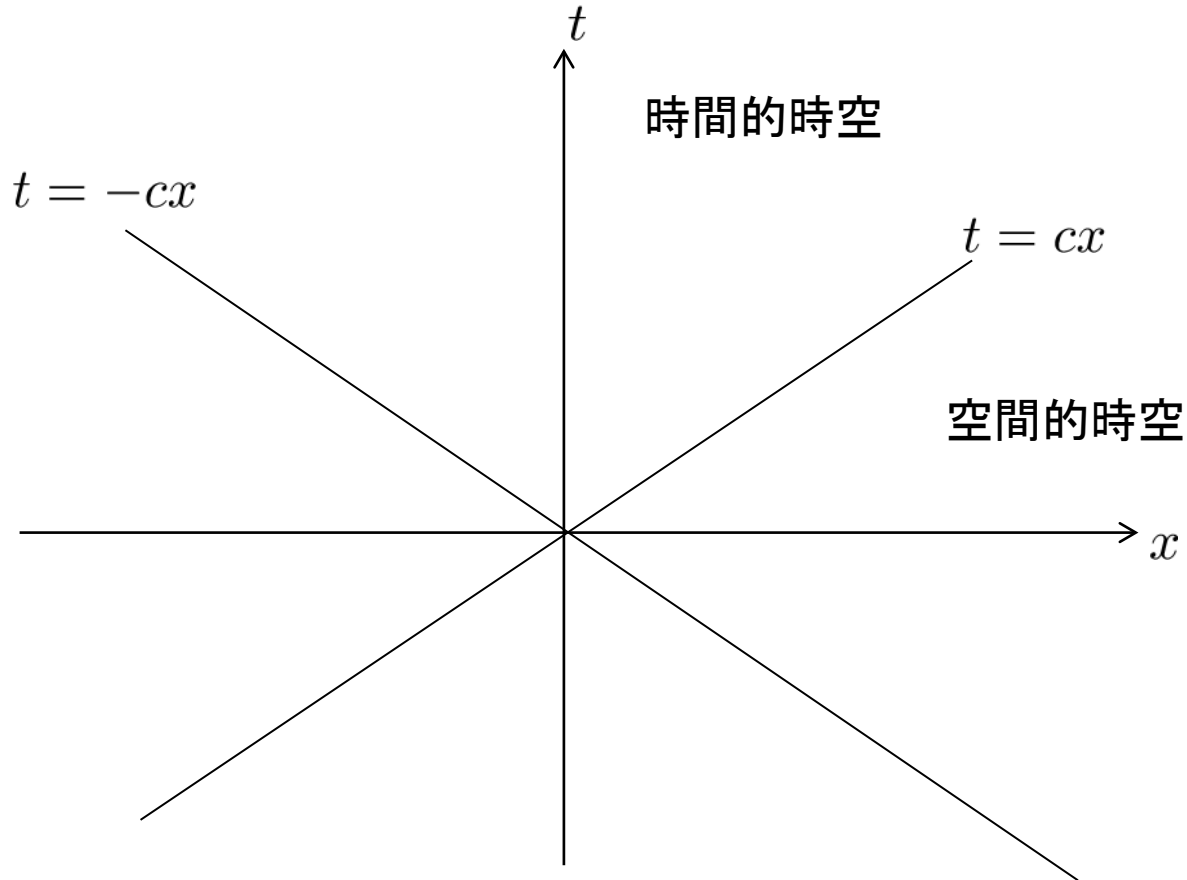


ミンコフスキー空間での距離



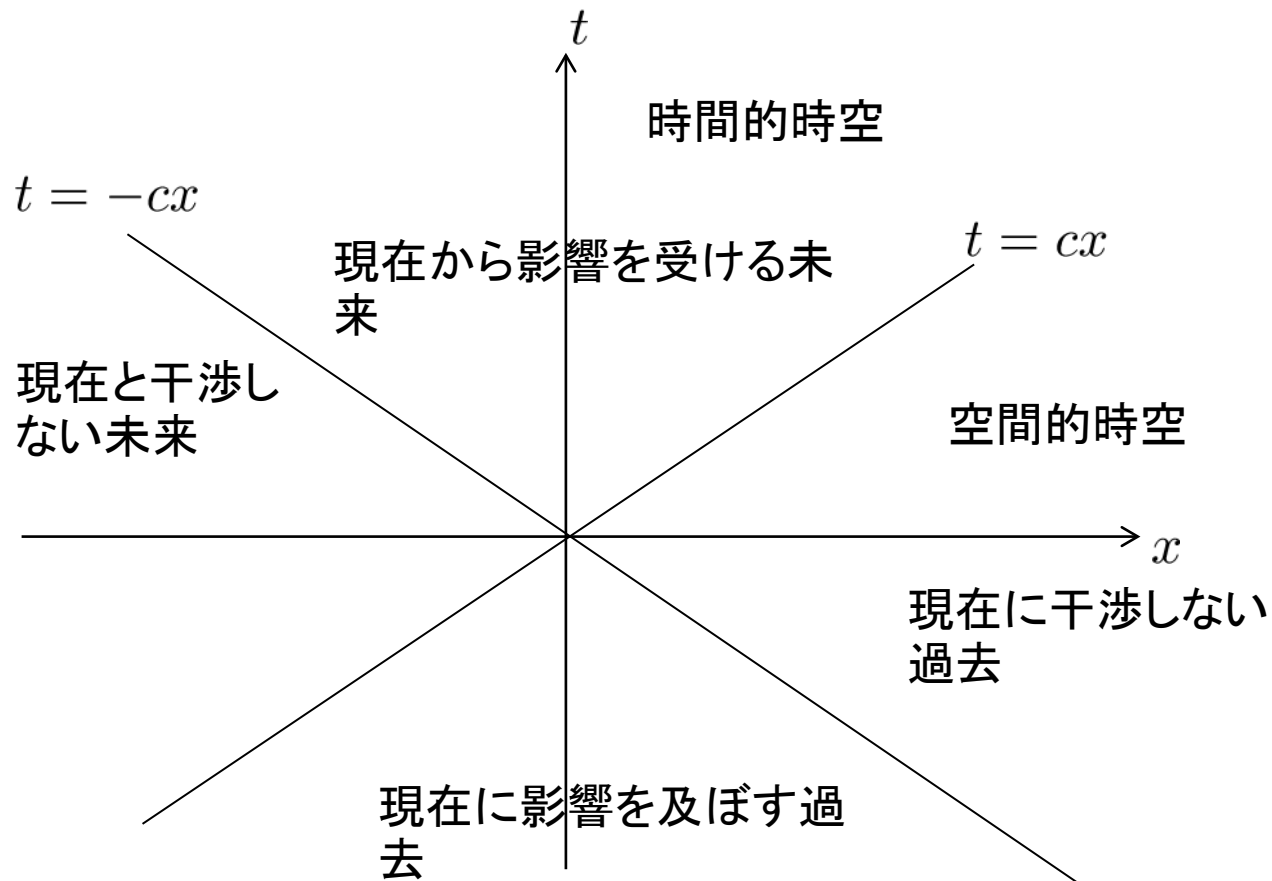
三平方の定理でも時間が虚数になっている。時間的時空では距離が虚数であり、空間的時空では距離が実数である。

ミンコフスキー空間での光



先ほどの距離の定義を見ると距離がゼロのところがある。 $t = \pm cx$ のところである。ここを光が通るところである。ヌル(null)と呼ばれる。

過去、現在、未来



ローレンツ変換

もしも、粒子が速度 v で動いていたとしても、力学系はまるで変わらない。見え方が異なるだけである。そういう速度 v で動いている時の座標系にするのをローレンツ変換といい、力学系が普遍なのを、ローレンツ変換普遍という。

ローレンツ変換

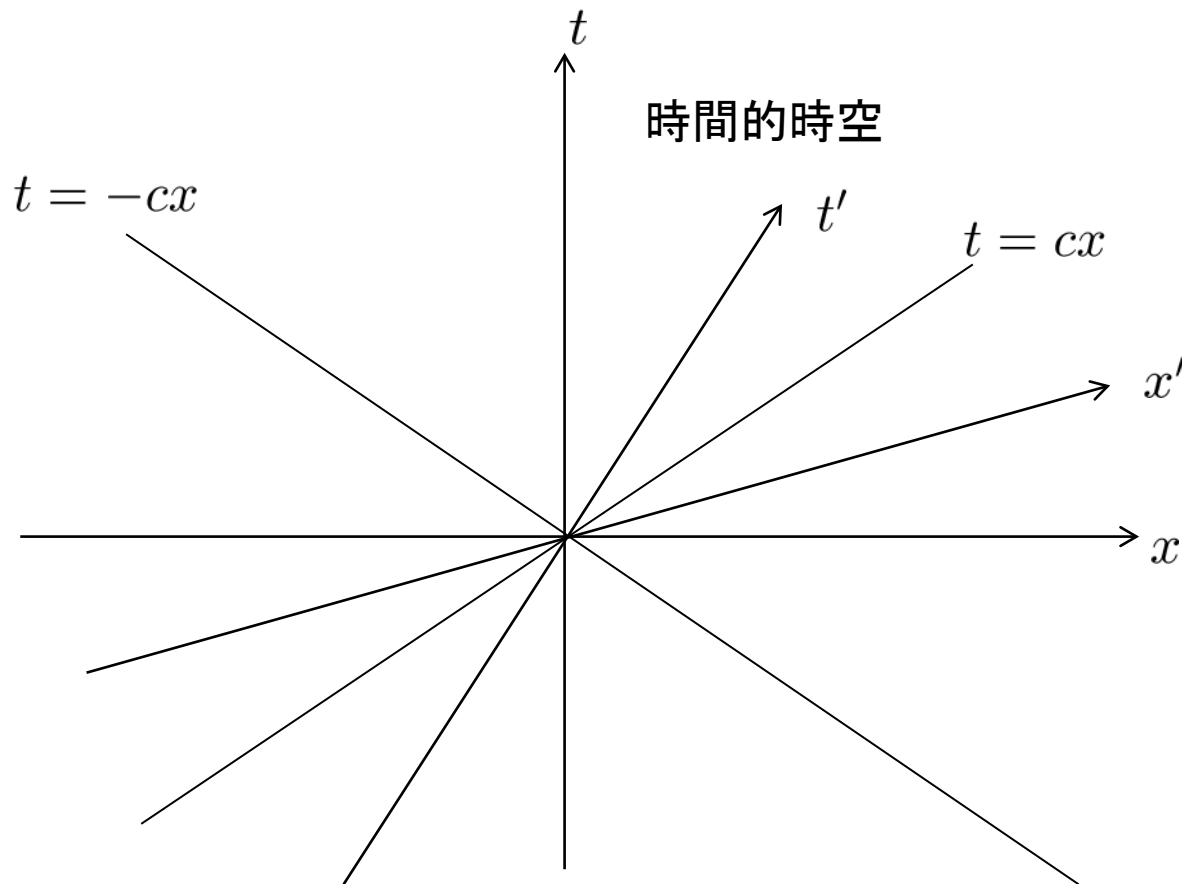
$x = vt, x' = -vt'$ の時、新しい座標系は、

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct - \frac{(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x$$
$$x' = -\frac{(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x$$

と変換される。この変換の導出過程で光速普遍の原理を使っている。後は初等行列の知識でこの変換を導くことができる。

$$v/c < 1$$

ローレンツ変換と座標

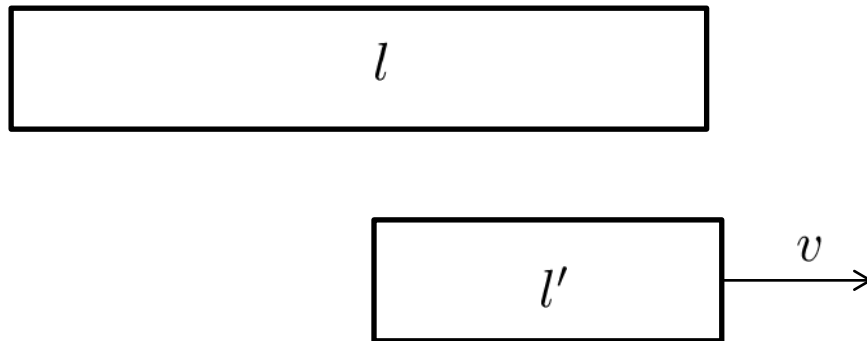


ローレンツ変換後の時間と長さ

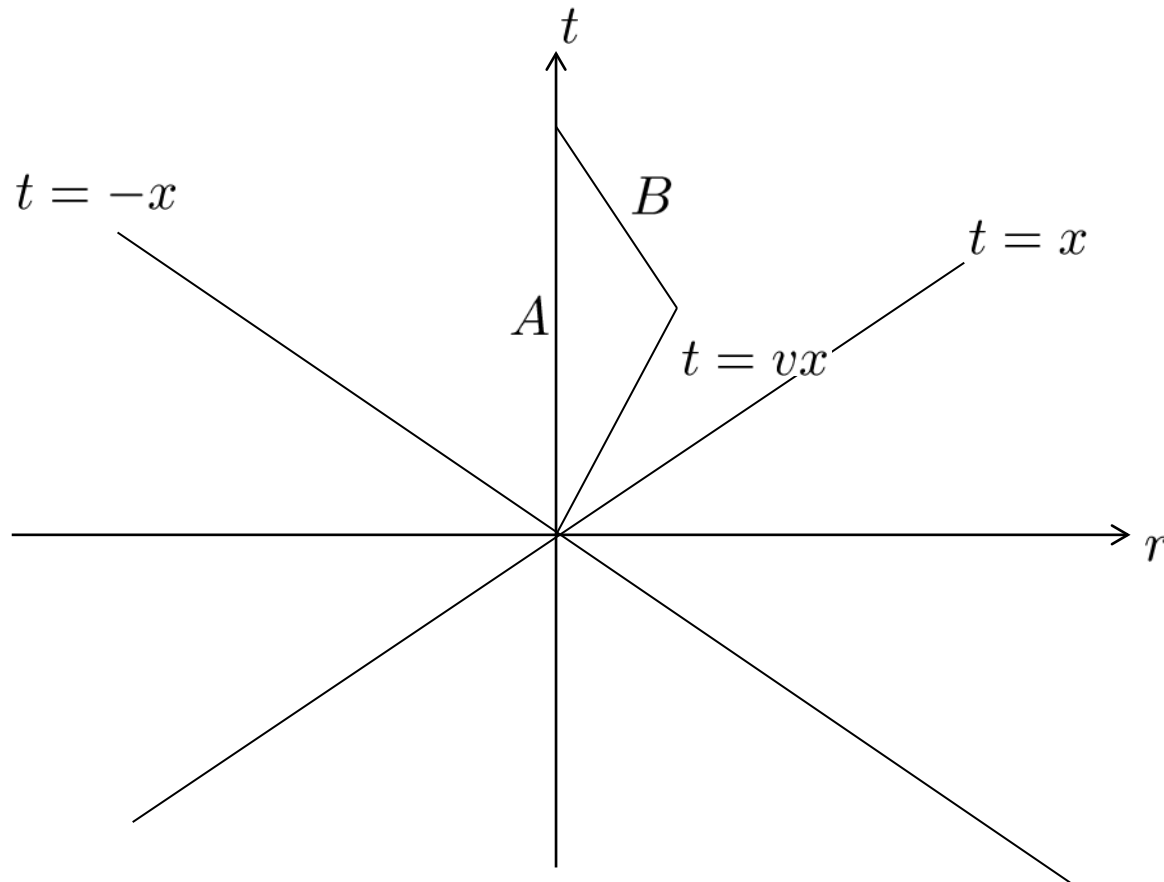
先ほどのローレンツ変換の式より、速度 v で走っている人の時間と長さは次のように変化する。

$$ct' = \sqrt{1 - (v/c)^2} ct$$
$$x' = \sqrt{1 - (v/c)^2} x$$

それなので、時間も距離も短くなることが分かる。とある棒が動いていたら、その長さは走っている速度に応じて短くなっていく。後は光速に近い速度で走っていると、時間の流れが遅くなる。 $v/c < 1$ なので絶対に短くなる。

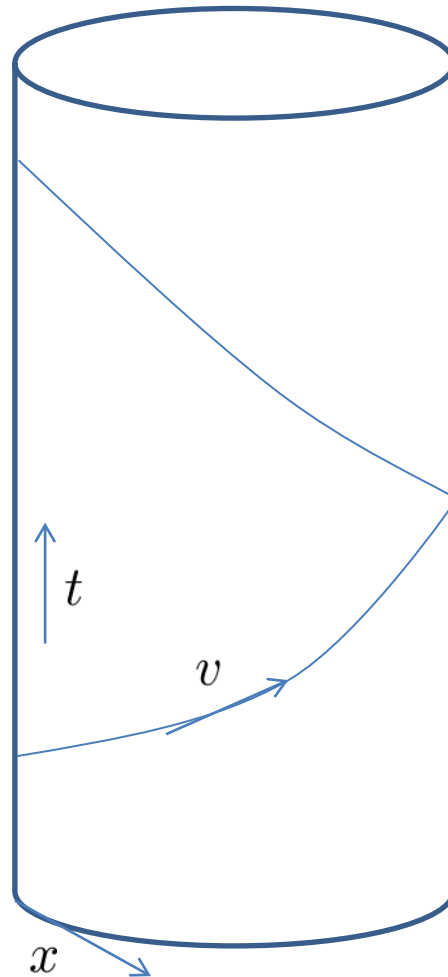


双子のパラドックス



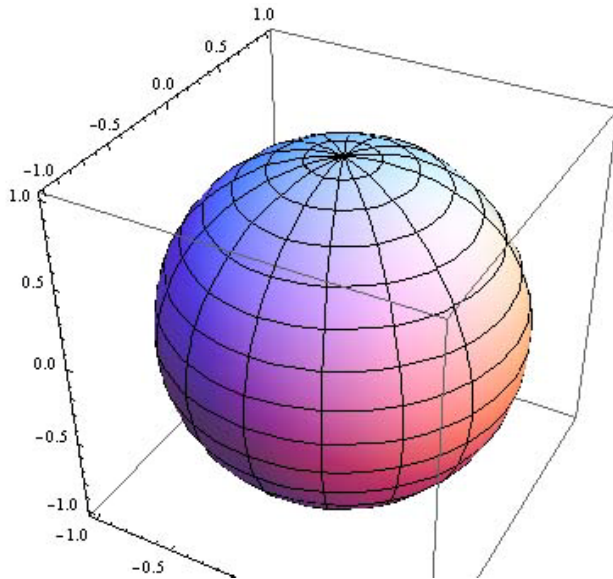
双子がいてAのルートとBのルートを通るかによって、先ほど言ったように時間が異なっているので、Bのほうが若くなる。これを双子のパラドックスというが、実際にはBが速度を急転換するときには加速しているので、このパラドックスは生じない

双子のパラドックスの応用

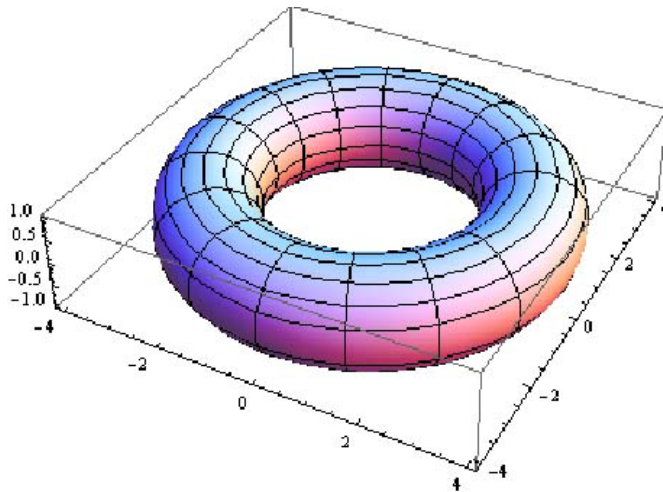


もしも、空間が円柱形であったら、速度 v で動いている人のほうが(一周回って)年を取る。

色々な空間



球面、この表面上にわっかをかけると、全て収縮する(点になる)。



トーラス。これが二個付いているものをダブルトーラスという。これは穴が一個空いているし、収縮しないわっかを二個書ける。収縮しないわっかの数を2で割ると穴の数が求まる。

ポアンカレ予想

$x^2 + y^2 = r^2$ これは円

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ これは球面

$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ ではこれはどういう形かという問題だった。

100万ドルの懸賞問題でロシア人数学者が解いて話題になった。結果的に球面と同じ形をしていると分かった。トーラスのように穴が開いていないと分かった。つまり、わっかをかけた場合に点になるとわかった。

電磁気と特殊相対性理論

実は電磁気を理論物理学で扱うと、場の理論を導くことができ(電磁場)、そこから特殊相対性理論を導くことができるようになっている。

Quantum field theory

実は特殊相対性理論と量子力学と場の理論（電磁場の理論と同じようなもの）を組み合わせると、現代の素粒子理論である場の量子論に到達する。それがQFT (quantum field theory) と呼ばれるものである。

一般相対性理論

- 一般相対性理論入門
- 計量
- 共変微分
- アインシュタイン方程式
- 現在の宇宙
- ブラックホール時空

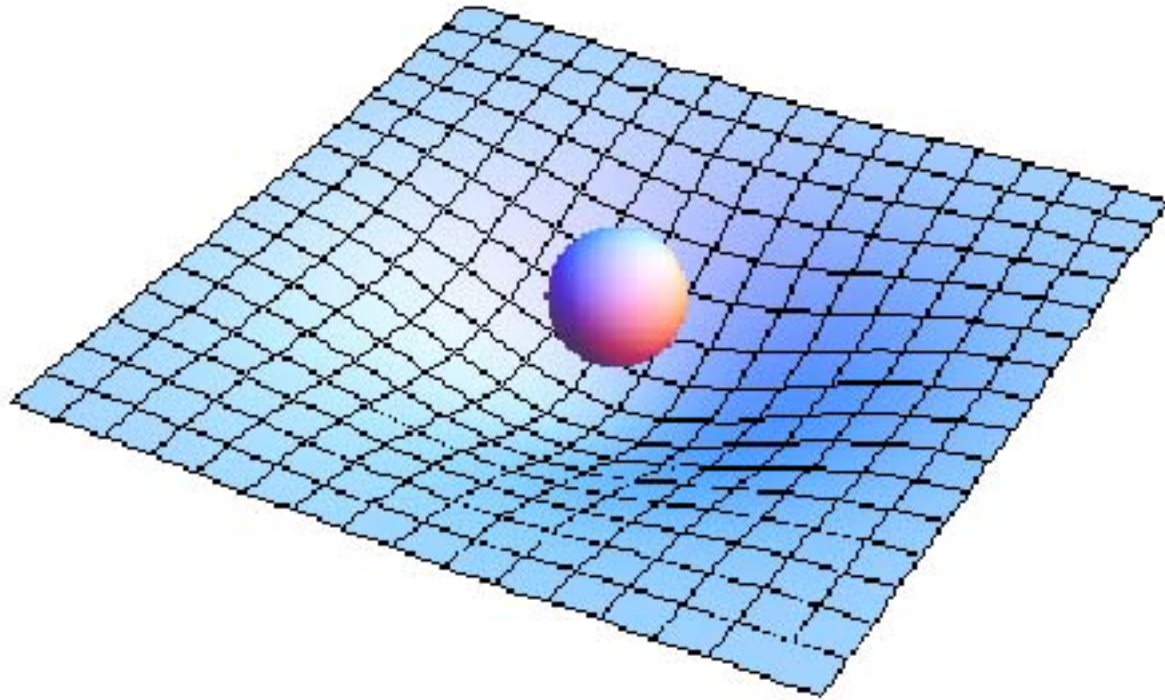
一般相対性理論入門

実は時空は歪んでいる。

例えば、太陽の質量が大きいためにその周りの時空が歪んで重力が発生するようになっている。もちろん、地球も質量を持っていて、その影響で時空が歪み重力が発生している。万有引力というものも時空の歪みが大元にある。

もう一つの考え方として、特殊相対性理論を一般化させて、物理は座標に依存しないという考え方もある。座標はあくまでも人間の手によって与えられたものだから、座標に依存しないような表記の仕方をしている。

星による時空の歪みの可視化



計量

時空の歪みを測るために計量というものがある。

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

座標は t, x, y, z の四つで、 a, b に対応している。

$g_{\{ab\}}$ はどんな座標系にも対応する関数。

g が計量と呼ばれる。

ここではもうすでに座標に依存しない書き方をしている。座標も人為的なもので、人為的なものは自然界に存在しないから消している。こういうのをアブストラクトインデックスノテーションという。

共変微分

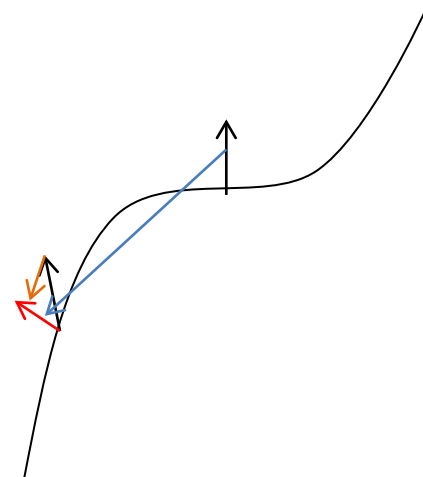
曲がった時空においての微分は通常の微分とは異なる。

共変微分と呼ばれて次のようになっている。

$$\nabla_a A^b := \partial_a A^b + \Gamma_{ac}^b A^c$$

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$$

上のはベクトルの微分で、
下のはクリストッ
フェルシンボルと呼ばれる。



アインシュタイン方程式

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab}$$

これがアインシュタイン方程式である。

$$R^a_{bcd} = (\nabla^a \nabla_b - \nabla_b \nabla^a)g_{cd} \quad \text{リーマンテンソル}$$

$$R_{ab} = R^c_{acb} \quad \text{リッチテンソル}$$

$$R = g^{ab}R_{ab} \quad \text{リッチスカラー}$$

アインシュタイン方程式の左辺は時空の歪みを表わしていて、右辺はストレス・エネルギーテンソルと呼ばれて物質を表わしている。つまり、時空と物質の関係の方程式である。リーマンテンソルは時空をちょっとだけ一周してきた時にどのくらいずれているかを測っている。リッチテンソルはその一部分で、リッチスカラーは時空の曲がり具合を数値化している。ちなみに、テンソルは行列のようなものである。

現在の宇宙

現在の宇宙は一様等方と呼ばれる。一様というのはどこでも同じで、等方とはどこから見ても同じということである。その場合の計量は、

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

この時のアインシュタイン方程式は

$$3\ddot{a}/a = -4\pi(\rho + P)$$

となっている。 a が宇宙の大きさである。

現在の宇宙

$$3\ddot{a}/a = -4\pi(\rho + P) + \Lambda$$

ここで Λ は宇宙項と呼ばれるものである。

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

ここで、ハッブル望遠鏡が宇宙項を観測して、現在の宇宙は延々と膨張していくとわかっている。現在から60億年後には地球と火星で通信ができなくなる。 ρ は宇宙の物質密度で、 P は宇宙の圧力である。

ブラックホール時空

計量が球対象な時にブラックホールになる。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega$$

これはアインシュタイン方程式の解だけれども、ブラックホールに吸い込まれそうになると、時間はどんどん0に近づき、距離は無限大に近づくということを示している。これはシュバルツシルトブラックホールといわれる。

曲がった時空での物質の運動

物質は測地線を通る。

測地線とは最短距離である。

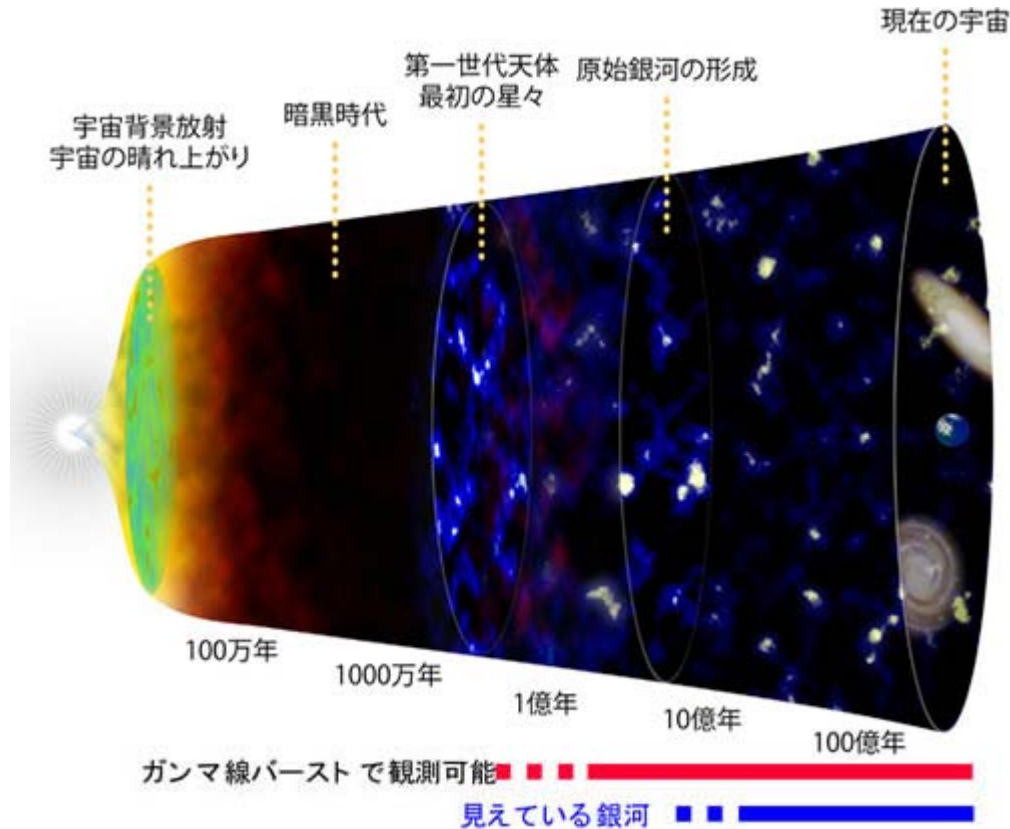
正しく言えば極小な距離のところを通る。

光は距離がゼロのところを通る。

宇宙論入門

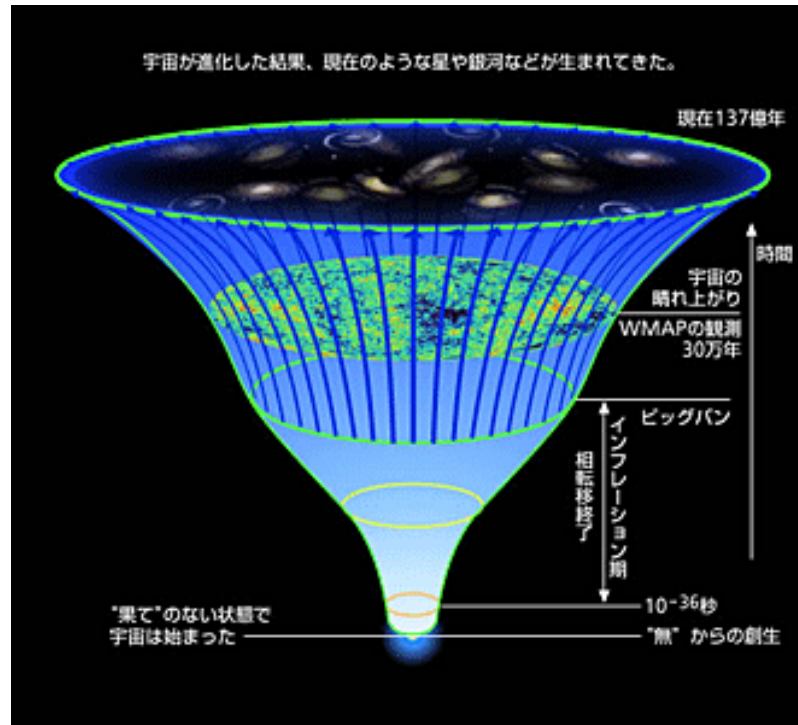
- 宇宙の始まりから終わりまで
- 重力レンズ
- ブラックホール

宇宙誕生から消滅まで



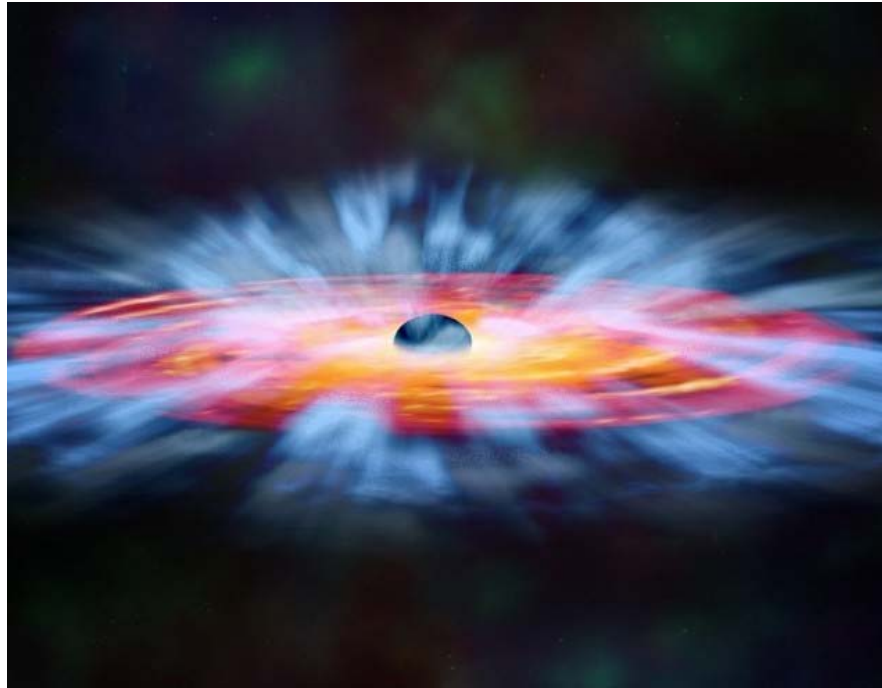
宇宙は無から生まれたと言われているけれど、真偽のほどはよく分かっていない。宇宙誕生から10のマイナス35秒後にインフレーションが起こり、10のマイナス33秒後にビッグバンが起こったとされている。今は宇宙誕生から130億年である。後50億年後には宇宙は消滅してしまう。

宇宙誕生



自分が研究しているのは無から宇宙ができたかどうかの辺り、その後でインフレーションが起こり、その次にビッグバンが起こった。ビッグバン研究では佐藤勝彦先生が有名というか創始者。なぜ、宇宙誕生から10のマイナス36乗秒後などと分かるのかというと次元解析をしているから。プランク定数、光速、重力定数からスケールを求めている。

宇宙消滅

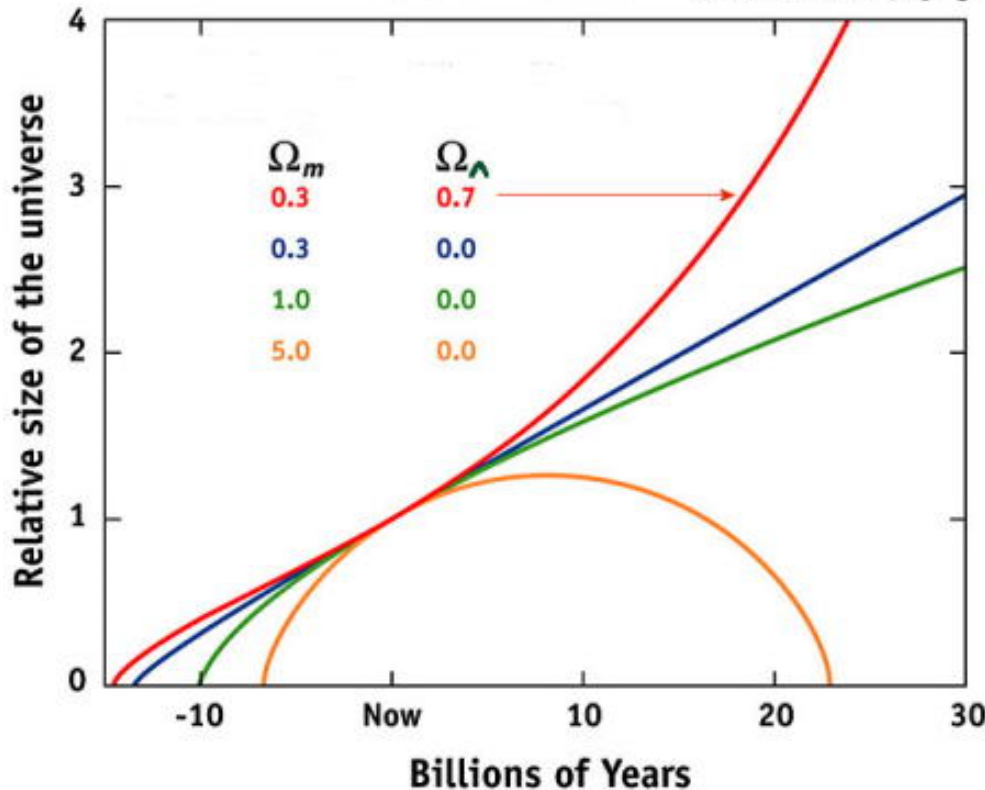


今から50億年後に宇宙はブラックホールだらけになって、やがて、そのブラックホールも消滅する。つまり50億年後に宇宙の寿命は尽きる。ちなみに、地球は後40億年後に太陽に飲み込まれてしまう。粒子と粒子がバラバラになるようなもの。しかも、粒子と粒子で情報伝達ができなくなる。

今の宇宙は延々と膨張していく

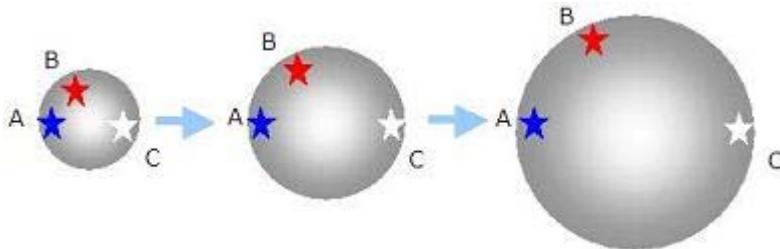
宇宙の膨張

NASA WMAP Gによる



宇宙が膨張するかどうかを決めるのは宇宙項である。最近だとダークエネルギーなどと言われる。後は見えない物質としてダークマターが考えられていたけれど、ないと分かった。先ほどのアインシュタイン方程式の解から宇宙がどうなるか分かるようになっている。

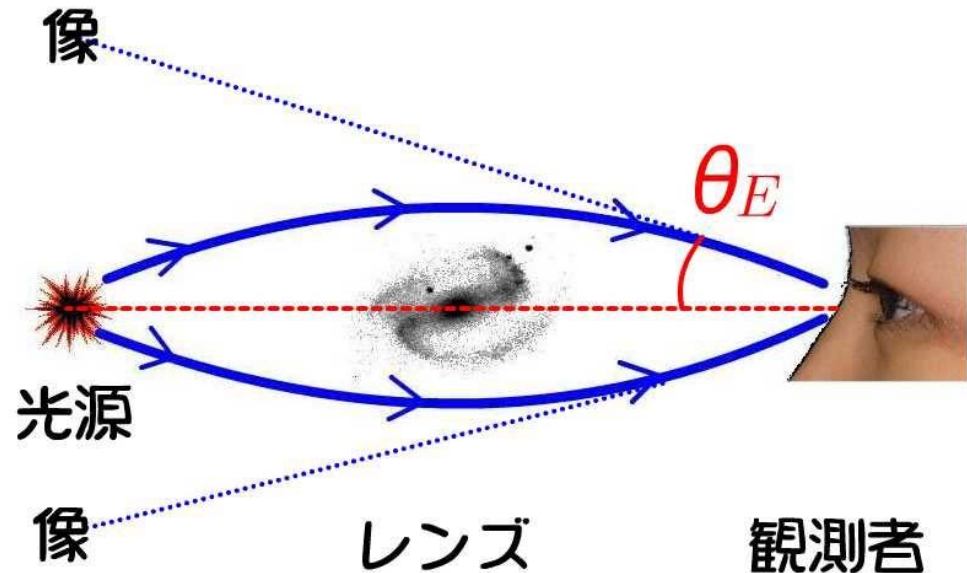
$$3\ddot{a}/a = -4\pi(\rho + P) + \Lambda$$



重力レンズ

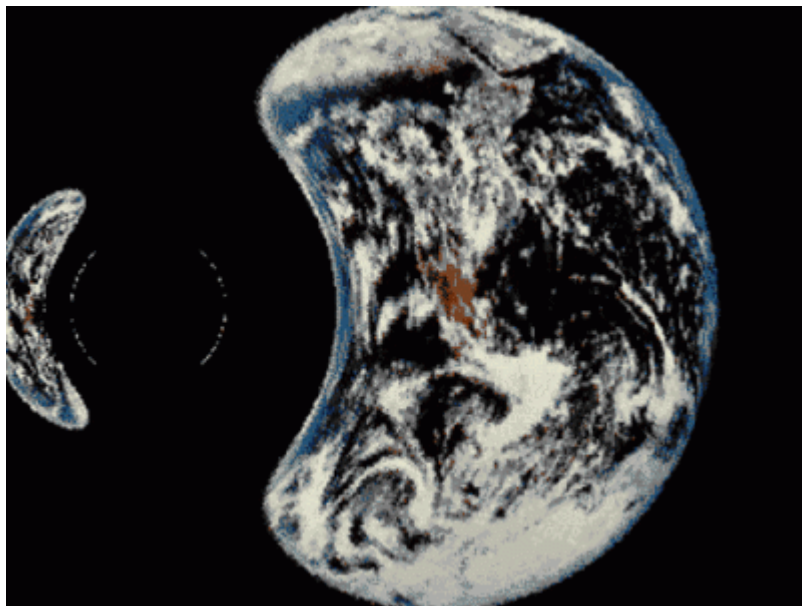
質量があると周りの時空が歪む。

重力レンズなどが有名。例えば本の後ろに何かあっても、その本が非常に重かったら、後ろに何かあるか分かる。これも一般相対性理論のブラックホール周りの光の軌道計算から理論的に分かっている。



重力レンズのことで去年はノーベル賞受賞者が出た。
相対論では初めてだった。

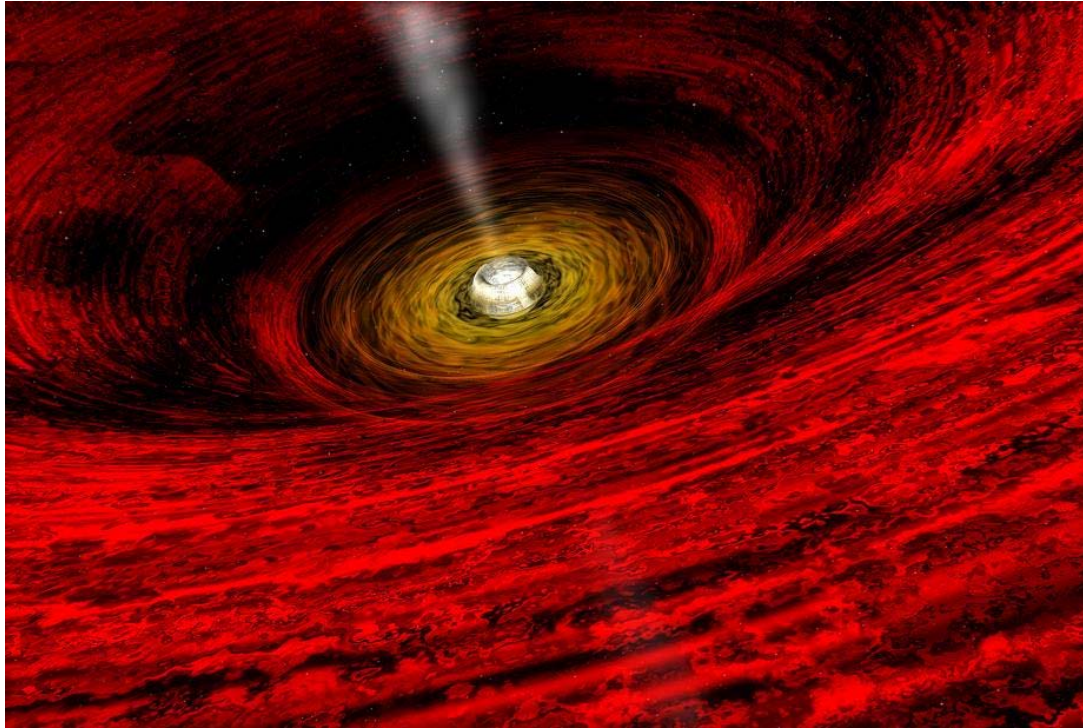
ブラックホール



あくまでもイメージ画像。ただしシュミレーションはされている。左が重力レンズ。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega$$

銀河中心



これは宇宙論の人に聞いたことだけれども、どうやら銀河中心にはブラックホールがあって、そこからジェットを出しているらしい。観測したという論文は数多くあるのだが、見えないので、本当にあるかどうかは観測できない。ただ、理論上はある。

GPS

実は一般相対性理論はGPSで使われている。
先ほどのシュバルツシルト時空のところに地球の質量を入れると時空の歪みを補正できるようになっている。

ブラックホール消滅問題

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega$$

実はこのブラックホールから熱輻射が起きていることがホーキングによって1975年に示されている。ただ、本当に消滅するかどうかは世紀の大問題だったが、自分が2006年に解決している。

$$M^2 = \frac{8b(1+e^{-v/2M})^4 e^{v/M}}{-\frac{3}{2}(1+e^{-v/2M}) + \frac{v}{2M} e^{-v/2M}} \left((1 + e^{-v/2M}) + \frac{v}{2M} e^{-v/2M} \right)$$

色々と計算した結果上の方程式が得られて、消滅するって分かった。

最近のトピックから

CERNと名古屋大学がニュートリノの速度が光速を超えたと発表したけれど、自分は早くからそういうことはないと言っていた。

後は、CERNがミニブラックホールを作るとか、ミニビッグバンを起こすと言っていたけれど、それも理論上できないと言っていた。あれは高次元宇宙の理論に基づくけれど、もしも宇宙が高次元ならば宇宙の大規模構造(銀河団の動き)などに変化が生じるはずで、実際にはそのような変化がないから理論上不可能と言っていた。高次元宇宙はストリング理論から導ける。CERNの予定通りならば二年前にミニブラックホールができていないとおかしいけれど、延々と作り出せていない。

タイムマシンの理論

ブラックホールには三種類あって、その中の回転しているブラックホールのことをカーブラックホールと言う。それがあれば、タイムマシンを作ることが理論上可能と言われていたけれど、それはブラックホールを使うので実際には不可能。

ただし、太陽十個分のエネルギーを集めれば、タイムマシンを作ることにも理論上可能。もしくは、太陽の中で10秒間に1個の粒子は一秒間だけタイムスリップしているかもしれない。

最近のトピックから

去年はシュタインズゲートというアニメが放送されたけれども、過去に携帯のメールを送るということをアニメで流していた。もしも、ミニブラックホールを作ることができたら、少しのデータを過去に送ることは可能。携帯のメールも少しのデータなので、そういうものを過去に送ることは多分できる。ただし、ミニブラックホールを作ることとは今のところ無理。

相対論は間違っているのか

よくそういうことを言われるけれど、
間違っていると言われるのは特殊のほうで、
一般は難しすぎるから間違っているとは言われ
ない。

そもそも、理解できる人が少ない。

ストリング理論と相対論

ストリング理論とはひもの振動のエネルギーが質量になっているというもので、理論上は正しいけれど、実際に観測できていないので、本当に正しいかどうかは分からない。ただし、反物質は一部見つかっている。

ストリング理論がバックグラウンド(時空)を与えられたものとして使うのに対して、相対論は時空そのものを扱っているという違いがある。

終わり

質問は気軽にどうぞ