

# 大学編入学試験数学問題集

平成 15 年 9 月 5 日

# 目次

第1章	基礎解析	1
1.1	式の計算	1
1.2	方程式	1
1.3	三角関数	2
1.4	領域	2
1.5	場合の数	2
1.6	二項定理	4
第2章	解析幾何	5
2.1	平面図形	5
2.2	直線・平面	6
2.3	球	6
2.4	空間曲線	7
2.5	2次曲面	7
第3章	線形代数	8
3.1	ベクトル	8
3.2	一次結合	8
3.3	ベクトルの応用	10
3.4	空間の基	11
3.5	行列	12
3.6	行列の $n$ 乗	14
3.7	行列と図形	15
3.8	逆行列	16
3.9	行列式	18
3.10	行列式の応用	21
3.11	階数と方程式	22
3.12	固有値	24
3.13	固有ベクトル	26
3.14	固有空間	28
3.15	Jordan 標準形	28
3.16	Jordan 標準形の応用	30
3.17	総合問題	31
第4章	微分法	32
4.1	数列	32
4.2	級数	33
4.3	漸化式	34
4.4	極限值	34
4.5	連続性と微分可能	36
4.6	微分	37
4.7	グラフ	38

4.8	最大・最小	39
4.9	微分の応用	39
4.10	微分の応用 (力学)	40
4.11	$n$ 次導関数	40
4.12	近似式	42
4.13	テイラー展開	42
4.14	総合問題	44
<b>第 5 章</b>	<b>積分法</b>	<b>45</b>
5.1	不定積分	45
5.2	定積分	46
5.3	パラメータを含む定積分	47
5.4	漸化式による定積分	48
5.5	広義積分	49
5.6	特殊関数	50
5.7	積分の応用 (最大・最小)	50
5.8	積分の応用 (図形)	51
5.9	積分の応用 (長さ)	52
5.10	積分の応用 (回転体)	52
5.11	区分求積法	53
5.12	積分の応用 (物理)	53
5.13	積分の総合問題	53
<b>第 6 章</b>	<b>偏微分法</b>	<b>55</b>
6.1	偏微分	55
6.2	合成関数の偏微分	56
6.3	連続と偏微分	56
6.4	偏微分の応用 1(最大・最小)	57
6.5	偏微分の応用 2(最大・最小)	57
6.6	偏微分の応用 (図形)	58
6.7	テイラー展開	59
6.8	総合問題	59
<b>第 7 章</b>	<b>重積分法</b>	<b>60</b>
7.1	重積分の計算	60
7.2	重積分	61
7.3	広義積分	62
7.4	$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$	63
7.5	重積分の応用 (体積)	63
7.6	重積分の応用 (面積)	64
7.7	重積分の応用 (物理)	65
7.8	総合問題	65
<b>第 8 章</b>	<b>関数方程式</b>	<b>66</b>
8.1	1 階微分方程式	66
8.2	定係数の線形微分方程式 (1)	67
8.3	定係数の線形微分方程式 (2)	68
8.4	2 階微分方程式	69
8.5	微分方程式の応用 (図形)	70

8.6	微分方程式の応用 (現象)	71
8.7	級数による解法	71
8.8	連立微分方程式	72
8.9	行列微分方程式	73
8.10	積分方程式	73
8.11	差分方程式	73
8.12	偏微分方程式	74
8.13	総合問題	74

# 第1章 基礎解析

## 1.1 式の計算

1.1 次の有理関数を部分分数に分解せよ

(1)  $\frac{4(x+2)}{(x+1)^2(x+3)}$  (60 都立大) (2)  $\frac{4x^2}{x^4-1}$  (62 都立大)

(3)  $\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$  (62 都立大)

1.2  $\frac{y+z}{x} = \frac{z+7x}{y} = \frac{x-y}{z}$  であるとき、この恒等式の値を求めよ (59 図情大)

1.3  $a, b, c$  は与えられた定数とする。次の恒等式

$$x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + c = \{(x + \lambda_1)x + \lambda_2\}\{(x + \lambda_1)x + \lambda_3\} + \lambda_4$$

が成り立っている。このとき、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  を  $a, b, c$  を用いて表せ。 (60 千葉大)

1.4 関数  $f(x)$  を  $x - \alpha$  で割ると余りが  $m$  であった。また、 $f(x)$  を  $x^2 - \beta$  で割ると余りが  $px + q$  であった。 $f(x)$  を  $(x - \alpha)(x^2 - \beta)$  で割ると余りは幾らか。 (61 東大)

1.5 底面の半径  $r$ 、高さ  $h$  の直円錐に内接する球の半径を求めよ。 N-2

## 1.2 方程式

2.1 方程式  $x^4 - 14x^3 + 74x^2 - 182x + 169 = 0$  の2根の積が他の2根の積に等しいことを知ってこれを解け。 (59 都立大)

2.2  $x^3 = 1$ 、 $ax^2 + bx + c = 0$  ならば、 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$  であることを示せ。 (59 図情大)

2.3 方程式  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  の3根を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき、次の3数を解とする方程式を作れ。 (61 都立大)

(1)  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$  (2)  $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$

2.4 次の連立方程式を解け。 (62 千葉大)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 3x - 8y + 13z = 8 \end{cases}$$

2.5  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  ( $p, q, r$  は整数) の解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とすれば、

$$a_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくとき、 $\{a_n\}$  の各項がすべて整数であることを証明せよ。 (63 京大)

2.6  $z^3 = 3$  の 3 乗根を求めよ。 (2 都立科技大)

### 1.3 三角関数

3.1  $\cos \theta = x$  のとき、 $\cos 4\theta$  を  $x$  の多項式で表わせ。 (46 東北大)

3.2 方程式  $\sin 3x + \sin(x + \pi/2) = \sqrt{3} \sin(x + \pi/4)$  を解け。 (52 千葉大)

3.3  $\alpha + \beta = \gamma$ ,  $0 < |\gamma| < \pi$  で  $\gamma$  を一定値として、 $\alpha, \beta$  を変化させるとき、 $\sin \alpha + \sin \beta$  の最大値を求めよ。またこのときの  $\alpha, \beta$  の値を示せ。 (55 東北大)

3.4  $\cos(x + \frac{2}{3}\pi) + \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$  を  $A \cos x + B \sin x$  の形で表わせ。 (62 九州大)

3.5  $25x^2 - kx + 12 = 0$  という方程式がある。この方程式の二つの解が  $\sin 2\theta, \cos 2\theta$  で表され  
るとする。

(1)  $k$  を求めよ。 (2)  $\tan 2\theta$  を求めよ。 (3)  $\tan \theta$  を求めよ。 (62 東北大)

3.6  $3 \sin x + 4 \cos x = a \cos(x - \phi)$  としたとき、 $a$  の値および  $\tan \phi$  を求めよ。 T-63

### 1.4 領域

4.1  $0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 2$  の範囲の領域をグラフに示せ。 N-63

4.2  $y \geq -2, x \geq 4y + y^2, x \leq y + 4$  の領域を示し、この領域内での  $f(x, y) = 2y - x$  の最大  
値、最小値を求めよ。 (2 阪大工)

### 1.5 場合の数

5.1 1 から 100 までの自然数のうち

(1) 2 の倍数の数を求めよ。

(2) 2 と 3 の倍数の数を求めよ。

(3) 2, 3, 5 の倍数でない数は幾つあるか。 (49 東北大)

5.2 7 個の数字 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 を 1 列に並べるのに奇数は奇数番目にあるようにするとき、  
何通りできるか。 (56 北大)

5.3  $a, a, a, b, b, c, c, d, e, f$  の 10 文字より 4 個取り出して作る順列の数を求めよ。  
(59 都立大)

5.4 街道路が長方形に横の方向に  $n+1$  , 縦の方向に  $m+1$  本ある。左下を点  $A(0,0)$  , 右上を点  $B(m,n)$  がある。点  $A$  より最短路を通って点  $B$  へ行くものとする。また  $f(1,1)=2$  ,  $f(2,1)=f(1,2)=3$  ,  $f(2,2)=6$  ,  $\dots$  のようにするとき、  
(1)  $f(7,7)$  を求めよ。  
(2)  $M(i,j)$  を通り  $B(m,n)$  への最短路の数を  $f$  を用いて表せ。 ( $0 \leq i \leq m$ ) , ( $0 \leq j \leq n$ )  
(3)  $M(i,j)$  もしくは  $N(k,l)$  を通り ,  $B(m,n)$  への最短路の数を  $f$  を用いて表せ。  
ただし ,  $0 \leq i \leq k \leq m$  ,  $0 \leq j \leq l \leq n$  とする。  
(60 東大)

5.5 1 桁の 2 進数を 1 ビットという。2 ビットで表される 4 つの状態を書け。3 ビット , 4 ビット ,  $\dots$  , 10 ビットでは、何通りの状態を表現できるか。また , 1 から 10 までの数字を表現するには何ビット以上必要か。更に  $A$  から  $Z$  までの文字についてはどうか。 (59 千葉大)

5.6 いま 10 人の人達が  $A, B, C$  の 3 台の車に乗る方法は何通りあるか。 (63 宮崎大)

5.7 箱の中に  $2n$  個のボールが入っている。その中に  $n$  個の白いボールが入っており、残りのボールはどの二つも色が違う別々のボールが入っている。 $2n$  個のうち  $n$  個を選ぶ組み合わせは何通りあるか。  
(1 阪大基礎)

5.8  $A$  から  $B$  へ行く最短距離の道筋は何種類あるか。 T-2

## 1.6 二項定理

6.1  $n$  を自然数として、次の各式を  $x$  の多項式の形で表せ。

$$(1) \sum_{m=0}^n {}_nC_m x^m (1-x)^{n-m}$$

$$(2) \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} {}_nC_m x^m (1-x)^{n-m}$$

$$(3) \sum_{m=1}^n \frac{m^2}{n^2} {}_nC_m x^m (1-x)^{n-m}$$

ただし、 ${}_nC_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ) は  $(a+b)^n$  を展開したときの  $a^m b^{n-m}$  の係数である。

(53 東北大)

6.2 二項係数  ${}_nC_k$  は異なる  $n$  個のものから  $k$  個を取る組み合わせの数に等しい。 $n$  を正整数として、次の間に答えよ。

(58 東北大)

(1) 次の等式を証明せよ。

$$(a) {}_nC_k = {}_nC_{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$(b) {}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$(c) \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_nC_k = 0$$

(2) 次の和を求めよ。

$$(a) \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_{2n}C_k$$

$$(b) \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_{2n+1}C_k$$

6.3  $(2x^3 + 3^{-2})^5$  の展開式における定数項の係数を求めよ。

(61 千葉大)

6.4  $(1+x)^{12}$  の展開式において、 $x^{10}$  の係数を求めよ。

T-63



## 第2章 解析幾何

### 2.1 平面図形

1.1 三角形 ABC の外接円の周上の一点 P から、この三角形の各辺またはその延長上におろした垂線の足 (交点) L, M および N は一直線上にあることを証明せよ。 (57 図情大)

1.2 (1) 中心の座標が  $(2, 4)$  で  $y$  軸に接するような円の方程式を求めよ。  
(2) 傾きが 1 でこの円に接するような直線の方程式を求めよ。  
(3) 原点 O とこの円周上の点との最長距離および最長となる点の座標を求めよ。 (58 都立大)

1.3 平面上の点  $(x, y)$  に点  $(x'', y'')$  を対応させる規則が、次の (I)、(II) によって与えられている。  
(I)  $x' = x + y, y' = 3x + 2y$  とする。  
(II) 点  $(x', y')$  を原点のまわりに、反時計方向に  $45^\circ$  回転して得られる点を  $(x'', y'')$  とする。  
この規則によって直線  $y = ax + b$  の点がすべてこの直線上に移されるとき、 $a, b$  の値を求めよ。 T-59

1.4 次式で与えられる  $xy$  平面上の領域の概形を示し、その面積を求めよ。

$$(|x| - a)^2 + (|y| - a)^2 = b^2$$

ただし、 $a, b$  は正の定数とする。 T-59

1.5 2 次曲線  $x^2 + 2axy + y^2 = 1$  が閉曲線であるための、定数  $a$  のとるべき値の範囲を求めよ。 (60 図情大)

1.6 方程式  $y^2 + 4x - 2y = 0$  を標準形に直し、その図形を描け。 (60 北大)

1.7 3 点  $S(s, s^2), T(t, t^2), U(u, u^2)$  を通る円の中心座標を求めよ。 (60 東北大)

1.8 方程式  $x^2 - 3xy + \lambda y^2 + 5y + \mu = 0$  が  $x - y$  平面上の直交する 2 直線を表すように  $\lambda, \mu$  を定め、この 2 直線の方程式を求めよ。 (62 都立大)

1.9 直線  $2x + y = 0$  は、直交座標軸を時計方向に  $\pi/4$  だけ回転移動させると、どのように変わるか。 (1 佐大)

## 2.2 直線・平面

- 2.1 (イ) 点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  と平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  との距離を求めよ。  
(ロ) 平面  $x + 2y + 3z = 1$  に関する原点の対称点の座標を求めよ。 (51 金沢大)
- 2.2 点  $(1, 1, 2)$  を通りベクトル  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  に垂直な平面の方程式を求めよ。 (55 山口大)
- 2.3 点  $(3, 4, 5)$  と直線  $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$  を含む平面の方程式を求めよ。 (55 群馬大)
- 2.4 原点  $O$  から平面  $\pi$  へ下ろした垂線の足を  $H$  とする。また、 $OH$  の方向余弦を  $(l, m, n)$  とするとき、平面  $\pi$  の方程式は  $lx + my + nz = p$  で与えられることを証明せよ。ただし、原点  $O$  から平面  $\pi$  までの距離を  $p$  とする。 (55 東大)
- 2.5 二つの平面  $x + y + z = 1$ ,  $y - 2z = 2$  の交点 (直線) のベクトルを求めよ。 (57 広島大)
- 2.6  $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$  と 3 つの座標平面とで囲まれた部分の体積を求めよ。 (61 広島大)
- 2.7  $x + 2y + 3z = 6$  と座標平面上にできる 3 直線の囲む三角形の面積を求めよ。 (63 横浜国大)
- 2.8 直線  $l: x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}$  と平面  $\pi: x + y + z = 3$  に対して、次の問に答えよ。  
(1)  $l$  と  $\pi$  の交点  $P_0$  の座標を求めよ。  
(2)  $\pi$  の単位法線ベクトルを求めよ。  
(3)  $l$  上の点  $P_1(1, 2, 3)$  から  $\pi$  上に下ろした垂線と  $\pi$  との交点  $P'_0$  の座標を求めよ。  
(4)  $P_0$  と  $P'_0$  の 2 点を通る直線の長さ  $l$  の方向ベクトルを求めよ。 T-63
- 2.9  $\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w}$  と  $yz$  座標平面との交点を求めよ。 N-1
- 2.10 3 点  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  を通る平面  $\alpha$  の方程式を求め、その図を描け。さらに点  $(3, 4, 5)$  からのその平面  $\alpha$  への距離を求めよ。 (1 名大)
- 2.11  $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{3}$  を含む  $x + y - z = 0$  に平行な平面の方程式を求めよ。 (2 都立大)

## 2.3 球

- 3.1 空間における直線  $g: x - 1 = 2y = z$  と直交し、点  $(1, 2, 3)$  を通る平面を  $\alpha$  とする。  
(1) 平面  $\alpha$  の方程式を求めよ。  
(2) 点  $(a, b, c)$  と平面  $\alpha$  との距離を求めよ。  
(3) 平面  $\alpha$  と  $x = 0, y = 0, z = 0$  の各平面で囲まれる部分  $Q$  に入りうる最大の球の半径を求めよ。 (61 九州大)
- 3.2  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$  上の点  $(1, 2, 3)$  における接平面の方程式を求めよ。 (63 横浜国大)

## 2.4 空間曲線

- 4.1  $t$  をパラメータとする次の曲線の法平面は原点で交わることを証明せよ。 (55 埼玉大)

$$x = a \sin^2 t, \quad y = a \sin t \cos t, \quad z = a \cos t$$

## 2.5 2次曲面

- 5.1 2次曲面  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$  を平面  $\sqrt{2}x + 5z = 0$  で切る時、切り口が円になることを示し、その面積を求めよ。 (54 金沢大)

- 5.2 次式で表される有心2次曲線がある。

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \quad (A)$$

- (1) 曲面 (A) と点  $P(x_1, y_1, z_1)$  において接する接平面の方程式を書け。  
(2) この接平面の単位法線ベクトルおよび原点からの距離を求めよ。 (54 北大)

- 5.3 曲面  $z^2 = 4x^2 + y^2$  が平面  $ax + z = 1$  上で交わる時の曲線を  $S$  とし、曲線  $S$  を  $xy$  平面に正投影した曲線を  $T$  とするとき、次の問に答えよ。

- (1) 曲線  $T$  の方程式を求めよ。  
(2) 曲線  $T$  が円となるような  $a$  の値を求めよ。  
(3) 曲線  $S$  が円となるような  $a$  の値を求めよ。

N-63

- 5.4 点  $(0, -2, 2)$  から曲面  $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8z = 0$  に引いた接線が  $xy$  平面上に描く図形の式を求めよ。 (1 金沢大)

## 第3章 線形代数

### 3.1 ベクトル

1.1  $n$  次のベクトル  $a, b$  の関数  $\phi(t) = |a + tb|$  の最大値、最小値を求めよ。 (52 信州大)

1.2 通常の座標系  $O - xyz$  が定義されている空間で、次の3個のベクトルを考える。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

空間の任意のベクトル

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を  $\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$  と表すとき、係数  $p, q, r$  は  $x, y, z$  からどのように求められるか。その式を書け。 N-58

1.3  $\vec{a} = (-1, 2), \vec{b} = (2t, 3), \vec{c} = (1, 3)$  のとき、次の問に答えよ。

(1)  $(x_0, y_0)$  を通り、 $\vec{c}$  に直角に交わる直線の方程式を求めよ。

(2)  $k\vec{a} + 2\vec{b}$  が  $\vec{c}$  と直交する時の  $k$  と  $t$  の関係を導け。

(3)  $k\vec{a} + 2\vec{b}$  の大きさが5であるとき、 $k$  と  $t$  の関係を導け。

(4) (2) (3) を満足する  $k, t$  を求めよ。

(62 横浜国大)

1.4 ベクトル  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の大きさが等しいとき、 $\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} - \vec{b}$  は直交することを示せ。 T-62

1.5 2つのベクトル  $\vec{a} = i + 4j, \vec{b} = 3i + xj$  が直交する時の  $x$  の値を求めよ。 T-1

### 3.2 一次結合

2.1 ベクトル  $a, b, c$  が線形独立 (1 次独立) であるならば,

$$a + b, \quad b + c, \quad c + a$$

も線形独立であることを証明せよ。 (52 慶応)

2.2 3つのベクトル  ${}^t x = (x_1, x_2, x_3), {}^t y = (y_1, y_2, y_3), {}^t z = (z_1, z_2, z_3)$  が1次従属である為の必要十分条件を求めよ。 (56 理科大(II) 数)

2.3  $A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & \sqrt{2}b & c \\ a & -\sqrt{2}b & 0 & b \\ a & 0 & \sqrt{2}b & c \end{pmatrix}$  を 4 次正方行列とし、単位基本ベクトルを  $e_1, e_2, e_3, e_4$  とするとき、次の問に答えよ。

(1)  $Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4$  が 1 次独立である時の  $a, b, c$  の関係を求めよ。

(2)  $|Ax| = |x|$  であるときの  $a, b, c$  の値を求め、 $A$  を求めよ。 (57 山梨大)

2.4  $a_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$   $a_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \lambda \\ -1/2 \end{pmatrix}$   $a_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ \lambda \end{pmatrix}$  が 1 次従属である時の  $\lambda$  を求めよ。 (57 熊本大)

2.5 次の 3 ベクトルが 1 次独立であるような実数  $\lambda$  を求めよ。 (59 宮崎大)

$$(\lambda, -1/2, -1/2), \quad (-1/2, \lambda, -1/2), \quad (-1/2, -1/2, \lambda)$$

2.6 次の 4 つの 4 次のベクトルは線形独立 (1 次独立) か否か。理由をつけて答えよ。 (60 千葉大)

$${}^t(1, 0, 0, 1), \quad {}^t(1, 0, 0, 0), \quad {}^t(0, 1, 0, 0), \quad {}^t(0, 0, 1, 0)$$

2.7  $a_1, a_2, \dots, a_m$  が 1 次独立ならば、 $a_1, a_1+a_2, \dots, a_1+a_2+\dots+a_m$  も 1 次独立になることを証明せよ。 (60 熊本大)

2.8 次のベクトルの組が 1 次独立であるか、1 次従属であるかを判定し、その理由を述べよ。 (61 広島大)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.9 次のベクトルは 1 次独立か。 (61 熊本大)

$${}^t(1, 1, 1, 0), \quad {}^t(1, 0, 1, 1), \quad {}^t(1, 1, 0, 1), \quad {}^t(1, 1, 1, 0)$$

2.10 ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$  が 1 次従属である時の  $x$  の値を求めよ。 (62 熊本大)

2.11  $xz > y^2$  であるとき、次のベクトルは 1 次独立か。 (63 熊本大)

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$$

- 2.12  $\mathbb{R}^3$ において、 $e_1 = {}^t(1, 0, 0)$ ,  $e_2 = {}^t(0, 1, 0)$ ,  $e_3 = {}^t(0, 0, 1)$ とする。  
 (1)  $a = {}^t(0, 1, 1)$ ,  $b = {}^t(1, 0, 1)$ ,  $c = {}^t(1, 1, x)$ が1次従属である為の条件を求めよ。  
 (2)  $a, b, c$ が1次独立の時、 $a, b, c$ をそれぞれ  $e_1, e_2, e_3$  に写す1次変換が存在することを示せ。  
 (3)  $a, b, c$ が1次従属のとき、(2)のような1次変換は存在しないことを示せ。  
 (63 大阪府大)

- 2.13 3つのベクトル  $(a, 1, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(a, 0, 1)$ がある。これらが1次独立でない為の  $a$  の値を求めよ。また、 $a = 2$  のとき、これらのベクトルを含む平面の方程式を求めよ。(63 千葉大)

### 3.3 ベクトルの応用

- 3.1 ベクトル  $A$  と  $B$  を2辺とする平行四辺形の面積  $S$  は、

$$S = \sqrt{A^2 B^2 - (A \cdot B)^2}$$

で与えられることを示せ。

また、ベクトル  $A$  の成分を  $(ap + b, cp + 2a^2, a^3p - 1)$ 、ベクトル  $B$  の成分を  $(ap - a, a^2p + a, a^{-1}p + a^3)$  とし、 $p$  が任意の値をとる時、ベクトル  $A$  と  $B$  が直交する  $a, b, c$  の値を求めよ。ただし、 $a > 0$  とする。  
 (53 埼玉大)

- 3.2 (1)  $A = 2i + 2j + k$  のベクトルの長さを求めよ。  
 (2)  $A$  と同じ向きの単位ベクトル  $e$  を求めよ。  
 (3)  $B = 2i + j + 4k$  のとき、 $A$  と  $B$  のなす角を求めよ。  
 (4)  $A$  と  $B$  のつくる直線を表すベクトル  $C$  を求めよ。  
 (55 都立大)

- 3.3  $xy$  平面上に原点  $O(0, 0)$  と他の3点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  が与えられている時、次の問に答えよ。  
 (1)  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  のなす角が  $\theta$  であるとき、 $\cos \theta$  の値を  $x_1, y_1, x_2, y_2$  で表せ。  
 (2)  $\triangle OAB$  の面積を  $x_1, y_1, x_2, y_2$  で表せ。  
 (3)  $\triangle ABC$  の面積を  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  で表せ。

- 3.4 平面  $\pi$  はベクトル  $A = ai + bj + ck$  と直交している。平面  $\pi$  から離れた点  $P(x, y, z)$  をとり、 $\pi$  上に点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  をとる。またベクトル  $A$  と直交するベクトル  $\overrightarrow{P_0P_1}$  をつくる点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  を  $\pi$  上にとる。  
 (1)  $A$  と  $\overrightarrow{P_0P_1}$  の直交条件を式で示せ。  
 (2)  $A$  と同じ向きの単位ベクトル  $n_A$  を作れ。  
 (3)  $n_A$  と  $\overrightarrow{PP_0}$  との内積を求めよ。  
 (4)  $A = i + j + 2k$ ,  $P_0(2, 3, 4)$  として平面  $\pi$  の方程式を求め、 $\pi$  と原点との距離  $d$  を求めよ。平面  $\pi$  が  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸と交わる点  $P_x, P_y, P_z$  を求めよ。  
 (58 都立大)

- 3.5 三角形  $OAB$  において  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とする。 $\angle AOB$  の二等分線が  $AB$  と交わる点を  $C$  とする。一般に  $\vec{v}$  の大きさを  $|\vec{v}|$  で表す。  
 (1)  $OC$  上での長さ1のベクトルを求めよ。  
 (2)  $AB$  上で  $A$  からの長さ  $x$  の点を  $P$  とする。 $\overrightarrow{OP}$  を求めよ。  
 (3)  $\overrightarrow{OC}$  を求めよ。  
 (59 東北大)

- 3.6  $m, n$  を  $0 < m < 1, 0 < n < 1$  である 2 つの実数とする。三角形 ABC において辺 AB 上に点 L が、辺 BC 上に点 M があり、 $AB : AL = 1 : m, AC : AM = 1 : n$  が成り立っているとする。線分 BM と線分 CL との交点を N とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$  とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{BM}$  および  $\overrightarrow{CL}$  をそれぞれ  $\vec{a}, \vec{b}$  の 1 次結合として表せ。
- (2)  $BM : BN = 1 : s, CL : CN = 1 : t$  において、 $\overrightarrow{BN}$  および  $\overrightarrow{CN}$  をそれぞれ  $\vec{a}, \vec{b}$  の 1 次結合として表せ。
- (3)  $s$  および  $t$  をそれぞれ  $m, n$  を使って表せ。

T-61

- 3.7 四面体 OABC において、 $OA \perp BC, OB \perp CA$  ならば、 $OC \perp AB$  であることを証明せよ。

(62 図情大)

- 3.8 2 点  $A(0, 1, 2), B(5, 2, 9)$  がある。 $BA \perp S$  で、平面  $S$  は  $A$  を通っているとする。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$  の関係を示せ。
- (2) 平面  $S$  の方程式が  $5x + y + 7z = 15$  となることを示せ。

T-2

### 3.4 空間の基

- 4.1 ユークリッド空間  $R^n$  で  $R_n$  を定義する。このとき内積を  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  ( $x, y \in R_n$ ) とする。 $\vec{e}_i(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  ( $i$  番目のみ 1) に関する線形変換を  $A = (a_{ij})_{ij=1 \sim n}, Ax = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) \vec{e}_i$  とするとき、次式で定義される変換  $B$  を求めよ。

(59 名工大)

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$$

$$4.2 \quad R^4 \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \text{ とする。}$$

- (1)  $W$  の基底を 1 組求めよ。

- (2)  $W$  の直交補空間の正規直交基底を 1 組求めよ。

(60 東工大)

- 4.3  $R^3$  を 3 次元の実ベクトル空間とする。3 つのベクトル

$${}^t(1, 2, 3), \quad {}^t(4, 3, 2), \quad {}^t(3, 4, 6)$$

は  $R^3$  の基底ベクトルであることを証明せよ。またベクトル  ${}^t(8, 11, 4)$  をこの基底を用いて表すとどのような成分になるか。

(60 電通大)

- 4.4

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} 9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

とおくとき、次の問に答えよ。

(1)  $W_1 \cap W_2$  の次元と基底を求めよ。

(2)  $W_1 + W_2$  の次元を求めよ。

(61 東工大)

4.5 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}$  について、次の問に答えよ。

(1) 行列  $A$  の階数を求めよ。

(2)  $R^5$  の部分空間  $\{x; Ax = 0\}$  の基底ベクトル系を求めよ。

(62 図情大)

### 3.5 行列

5.1 次の計算をせよ。

(1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  (56 都立大)

(2)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (56 都立大)

(3)  $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  N-61

5.2  $A = \begin{pmatrix} 1 & -\tan \alpha/2 \\ \tan \alpha/2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき、  
 $(E - A)^{-1}(E + A)$  を求めよ。 (53 東工大)

5.3  $A, B$  がそれぞれ対称行列である時、積  $AB$  の対称性を調べよ。 (56 理科大 (II) 数)

5.4  $x, y, z$  の同次 2 次式

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$$

について、次の問に答えよ。

(1)  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  とおくとき、

$$f(x, y, z) = {}^t X A X$$

が成り立つような 3 次の対称行列  $A$  を求めよ。

(注) (ア) 任意の行列  $B$  に対し、その転置行列を  ${}^t B$  で表す。



- (イ)  ${}^tB=B$  が成り立つような行列を対称行列という。  
 (2) 新しい変数  $u, v, w$  が

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で与えられる時、 $f(x, y, z)$  を  $u, v, w$  で表せ。

N-59

- 5.5  $i > j$  のとき  $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$  なる行列  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  は上三角行列である。A, B の積が上三角行列であることを示せ。 (61 徳島大)

5.6  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  のとき、 $A^2 - 3A$  を計算せよ。 (63 東商船大)

- 5.7 行列の  $\max \min$  積 ( $\circ$  で示す) を通常の行列の積において、”加法の演算 (+) を最大値をとる演算 ( $\max$ ) に” , また ”乗法の演算 ( $\times$ ) を最小値をとる演算 ( $\min$ ) に” 置き換えたもので定義する。例えば、

$$\text{行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{行列 } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad a_{ij}, b_{ij} \text{ は任意の実数}$$

に対して、 $A \circ B$  の任意の要素は  $\max(\min(a_{i1}, b_{1j}), \min(a_{i2}, b_{2j}))$  となる。

行列  $C = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 \\ 8 & 10 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$  のとき、 $C \circ C$  および  $C \circ C \circ C$  (63 図情大)

- 5.8 2次以下の実数係数多項式  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  全体で作る線形空間 (ベクトル空間) を  $V$  とする。

(1)  $V$  の変換  $T: f(x) \rightarrow \int_{-1}^1 (t-x)^2 f(t) dt$  は  $V$  の線形変換 (一次変換) であることを示せ。

(2) この線形変換  $T$  の、基底  $\langle 1, x, x^2 \rangle$  に関する表現行列を求めよ。 (63 名工大)

- 5.9  $a_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x$  の形の関数全体の作る線形空間 (ベクトル空間) を  $V$  とする。

(1)  $V$  の次元を求めよ。

(2)  $V$  に  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$  で内積を定義する。このとき、 $V$  の変換  $T: f(x) \rightarrow f(x+a)$  は直交変換であることを示せ。 (63 名工大)

- 5.10  $y_1 = x_1, y_2 = 2x_1 - x_2, y_3 = 4x_1 + 2x_2 - x_3$  について、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

となる行列  $A, B$  を求めよ。

N-63

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -ab & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AX = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -a & 0 & a \\ 0 & ab & ab \end{pmatrix}$$

### 3.6 行列の n 乗

6.1  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ B & b & a \end{pmatrix}$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  を求めよ。 (55 山梨大)

6.2 A を正方行列とした時、 $A^n = A^{n-1}A$  である。

(1) I を単位行列とした時、 $(\lambda I + A)^n = \lambda^n I + \sum_{k=1}^n {}_nC_k \lambda^{n-k} A^k$  を数学的帰納法を使って証明せよ。

(2)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする  $A^2, A^3$  を求めよ。

(3)  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  のとき、 $B^n$  を求めよ。 (55 東北大)

6.3 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$  について、次の級数を求めよ。ただし I は単位行列である。 (56 名工大)

$$B = I + \sum_{n=1}^{\infty} A^n$$

6.4 (1) (2, 2) の行列 A は  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  で与えられている。 $A^2, A^3, A^4$  を求めよ。

(2) ある関数  $f(x)$  が無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  に展開できる時、ある行列 B の無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n B^n$  を  $f(B)$  で書き表す。行列 A を (1) で与えられているとする時、

$$e^{\theta A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

であることを示せ。 (58 北大)

6.5  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき、次の問に答えよ。

(1)  $A^2, A^3, A^4$  を出し、 $A^n$  を予想せよ。

(2) それを数学的帰納法で証明せよ。 (58 山口大)

6.6  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  のとき、 $A^2, A^3$  を求めよ。さらに  $A^n$  を求めよ。 (58 徳島大)

6.7  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  について、 $A^{50}$  を求めよ。 (59 千葉大)

6.8 2 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) について、次の問に答えよ。

(a)  $A^{-1}$  を求めよ。

(b)  $A^2 - (\alpha + 1)A + \alpha I$  を求めよ。I は 2 次の単位行列とする。

(c)  $A^n$  を導き、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  を求めよ。

(60 都立大)

6.9 2 次の行列を  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$  とするとき、次の問に答えよ。ただし、E は単位行列、 $n$  は自然数とする。

(1)  $A \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$  を満たす  $\alpha, \beta$  の関係式を求めよ。

(2)  $A^2 - 3A + 2E = 0$  を満たす値  $\beta$  を求めよ。

(3) (1)(2) より  $A^n$  を求めよ。

(62 九大)

6.10  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき、

(1)  $A^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求めよ。

(2)  $B^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求めよ。

(62 東商船大)

6.11  $AD - BC = 1$  のとき、次の式を証明せよ。

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n$$

ただし、 $A_n \sin \theta = A \sin n\theta - \sin(n-1)\theta$ ,  $B_n \sin \theta = B \sin n\theta$

$C_n \sin \theta = C \sin n\theta$ ,  $D_n \sin \theta = D \sin n\theta - \sin(n-1)\theta$

$\cos \theta = (A + D)/2$

(1 長崎大)

### 3.7 行列と図形

7.1  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$  ( $a > 0, ac - b^2 > 0$ ) がある。この楕円を回転して軸を  $x, y$  軸と一致させるのに必要な回転角  $\theta$  を求めよ。 (47 信州大)

7.2 正方行列 A によって 1 次変換される写像がある。列ベクトル  ${}^t(1, 0, 0)$ ,  ${}^t(0, 1, 0)$ ,  ${}^t(0, 0, 1)$  がそれぞれ  ${}^t(-2, 1, 0)$ ,  ${}^t(1, -2, 1)$ ,  ${}^t(0, 1, 0)$  に変換される行列 A を求めよ。 T-56

7.3 (1)  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  が直交行列であることを示せ。

(2) A の幾何学的な意味を述べよ。

(57 大阪府大)

7.4  $xy$  直交座標における曲線が

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = c$$

と表されるという。この曲線に回転変換を行って

$$AX^2 + 2HXY + BY^2 = c$$

と表されるとき、

$$a + b = A + B, \quad ab - h^2 = AB - H^2$$

が成り立つことを示せ。

(58 金沢大)

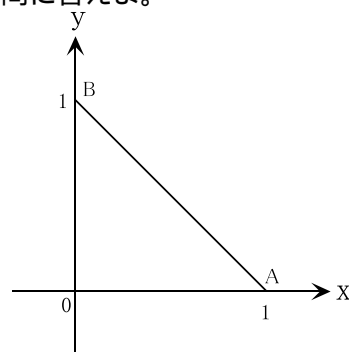
- 7.5 次の行列 (a) ~ (d) から直交行列を選び、選んだものについて座標変換の行列としての幾何学的意味を述べよ。 (60 千葉大)

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 7.6  $xy$  平面上の 1 次変換  $P = \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ b & 1/2 \end{pmatrix}$ , ( $a, b$  は定数) によって、下図に示す三角形 OAB を変換する。点 A, B の像をそれぞれ  $A'$ ,  $B'$  として、以下の問に答えよ。

- (1)  $\angle A'OB' = \theta'$  として  $\cos \theta'$  を  $a, b$  によって表せ。
- (2) 三角形  $OA'B'$  の面積  $S'$  を  $a, b$  によって表せ。さらに  $S' = 0$  とするような  $a, b$  は行列式の値  $|P| = 0$  を満足することを示せ。
- (3) 三角形 OAB と三角形  $OA'B'$  が合同であるとき、 $a > 0$  として  $a, b$  の値を求めよ。 T-62



- 7.7 2 点  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(5, 2, 9)$  がある。  $BA \perp S$  で、平面  $S$  は  $A$  を通っているとする。
- (1) 平面  $S$  と  $x$  軸とが交わる点を  $Q$  とするとき、  $OA \perp OQ$  を証明せよ。
  - (2)  $OA$  を軸として点  $Q$  を回転させたときに点  $Q$  が再び平面  $S$  にぶつかるときの点  $T$  の座標を求めよ。 T-2

### 3.8 逆行列

- 8.1 次の各行列は正則か。正則なら、その逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{N-56} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (57 \text{ 理科大 (II) 数})$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (59 \text{ 電通大}) \quad (4) \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad (63 \text{ 東商船大})$$

- 8.2 次の行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (56 \text{ 都立大}) \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (57 \text{ 都立大})$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (57 \text{ 熊本大}) \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{N-61}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (62 \text{ 都立大}) \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (57 \text{ 千葉大})$$

$$(7) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{N-62}$$

$$(8) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 都立大}) \quad (9) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 広島大})$$

$$8.3 \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ が正則行列になるための必要十分条件を } \alpha \text{ で表せ。} \quad (55 \text{ 大阪府大})$$

$$8.4 \quad \text{行列 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix} \text{ が正則行列であるための条件を求めよ。} \quad (60 \text{ 山口大})$$

$$8.5 \quad \text{行列 } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ について}$$

$$(1) A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E \text{ を求めよ。}$$

$$(2) A \text{ が逆行列をもつ条件を示せ。}$$

$$(3) A \text{ が逆行列をもつとき、その行列を求めよ。} \quad (60 \text{ 東北大})$$

$$8.6 \quad \text{行列 } A \text{ を } A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ とするとき、逆行列 } A^{-1} \text{ は } A^{-1} = A(-\theta) \text{ で与えられることを証明せよ。} \quad \text{T-61}$$

$$8.7 \quad A \cdot A = A^2, A^{k-1}A = A^k \text{ となる行列 } A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ がある。次の問に答えよ。}$$

$$(1) A^n \text{ を求めよ。}$$

$$(2) S = \sum_{k=1}^n A^k \text{ を求めよ。}$$

$$(3) S \text{ の逆行列を求めよ。} \quad (61 \text{ 東北大})$$

$$8.8 \quad A, B \text{ が正則であるとき、} (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ を証明せよ。} \quad (1 \text{ 九大})$$

$$8.9 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \text{ が逆行列を持つ条件とその条件を満たしたときの } A^{-1} \text{ の値を求めよ。} \quad (2 \text{ 熊本大})$$

$$8.10 \quad \text{行列 } A \text{ を } A = A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ とするとき、逆行列 } A^{-1} \text{ は } A^{-1} = A(-\theta) \text{ で与え}$$

8.11  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  のとき、 $AB=I$  となる行列  $B$  を求めよ。 T-2

### 3.9 行列式

9.1 次の行列式の値を求めよ。

(1)  $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$  (50 東農工大)

(2)  $\begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix}$  (58 熊本大)

(3)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$  (60 山口大) (4)  $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$  T-60

(5)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$  (61 東商船大) (6)  $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & -a \end{vmatrix}$  N-61

(7)  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$  (62 東商船大) (8)  $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & b_3 & b_2 \\ -a_2 & -b_3 & 0 & b_1 \\ -a_3 & -b_2 & -b_1 & 0 \end{vmatrix}$  (62 電通大)

(9)  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$  (62 東商船大) (10)  $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$  N-63

(11)  $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$  (63 東商船大) (12)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \\ 8 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$  (2 佐賀大)

(13)  $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix}$  (1 熊本大)

(14)  $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & x-2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & x-3 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & x-4 \end{vmatrix}$  N-1

## 9.2 次の行列式の値を求めよ。

$$(1) x + y + z = \pi \text{ のとき、} \begin{vmatrix} -1 & \cos z & \cos y \\ \cos z & -1 & \cos x \\ \cos y & \cos x & -1 \end{vmatrix} \quad (57 \text{ 北大})$$

$$(2) \omega^3 = 1, \omega \neq 1 \text{ のとき、} \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} \quad (61 \text{ 都立大})$$

## 9.3 次の行列式を因数分解せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} -c & -a & a+b+c \\ -b & a+b+c & -a \\ a+b+c & -b & -c \end{vmatrix} \quad (53 \text{ 秋田大})$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \quad (55 \text{ 群馬大}) \quad (3) \begin{vmatrix} 1+x^4 & x+x^3 & x^2 \\ 1+y^4 & y+y^3 & y^2 \\ 1+z^4 & z+z^3 & z^2 \end{vmatrix} \quad (57 \text{ 北大})$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^3 & x^4 \end{vmatrix} \quad (60 \text{ 電通大}) \quad (5) \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \quad (57 \text{ 山梨大})$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \quad (57 \text{ 秋田大}) \quad (7) \begin{vmatrix} 1 & x^2 & ab \\ 1 & a^2 & bx \\ 1 & b^2 & ax \end{vmatrix} \quad \text{N-60}$$

$$(8) \begin{vmatrix} b+c & c & b \\ c & a+c & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix} \quad (59 \text{ 東北大}) \quad (9) \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \cos \beta & \cos 2\beta \\ 1 & \cos \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 広島大})$$

$$(10) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \quad (1 \text{ 佐賀大}) \quad (11) \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x \\ 1 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 1 \\ x & 1 & 0 & x \end{vmatrix} \quad \text{N-2}$$

## 9.4 次の方程式を解け。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (56 \text{ 千葉大}) \quad (2) \begin{vmatrix} 1-x & a & a \\ a & 1-x & a \\ a & a & 1-x \end{vmatrix} = 0 \quad (55 \text{ 千葉大})$$

## 9.5 次の $n$ 次元行列式の値を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix} \quad (46 \text{ 信州大})$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 1-n & 0 \end{vmatrix} \quad (59 \text{ 東北大})$$

9.6 行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$  の展開式を  $P = f(a, b, c, d)$  とする。

(1)  $P$  の  $a^3b^2c$  の項の係数を求めよ。

(2)  $P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$  となることを証明せよ。 (53 山梨大)

9.7 次の等式を証明せよ。

(57 熊本大)

$$\begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} = 0$$

9.8  $x, y, z$  の関数  $f(x, y, z)$ 、 $g(x, y, z)$ 、 $h(x, y, z)$  が次式で与えられている。

$g(x, y, z)$ 、 $h(x, y, z)$  が  $f(x, y, z)$  で割り切れることを証明し、その商を求めよ。 N-57

$$f(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}, \quad g(x, y, z) = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix}, \quad h(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix}$$

9.9  $a$  は実数、 $x$  は複素数とする。

$$\begin{vmatrix} a+x & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+x & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+x & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+x & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+x & -a \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} = 0$$

(1) 行列式を展開せよ。

(2) 展開式より  $x$  を求めよ。

(3)  $a = 1$  のとき、 $y = \frac{1}{x}$  はいくらか。 (58 東大)

9.10  $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & b \end{vmatrix} \neq 0$  のとき、 $x$  について次の方程式を解け。 (60 東工大)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & x \end{vmatrix} = 0$$

9.11 行列  $X$  に対して  $X^t$ 、 $X^{-1}$ 、 $|X|$  はそれぞれ  $X$  の転置行列、逆行列、行列式を表す。

実数を要素とする  $2 \times 2$  行列  $A$ 、 $B$  に対して、次の問に答えよ。

(1)  $|A + A^t| + |A - A^t|$  および  $|A + A^{-1}| + |A - A^{-1}|$  を  $|A|$  を用いて表せ。

ただし、 $|A| \neq 0$  とする。

(2)  $|B - \lambda E| = 0$  を満たす  $\lambda$  の値が 1 と 2 であるとき、 $|B^2 - 3B|$  の値を求めよ。

ただし、 $E$  は単位行列とする。 (61 九州大)

9.12 4 次の行列式  $|a_{ij}|$  の展開式において、 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 、 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$  の係数を求めよ。

(61 熊本大)



9.13  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき、

(1)  $AB - BA$  を求めよ。

(2)  $|A - \lambda E| = 0$  となる  $\lambda$  を求めよ。

(62 徳島大)

9.14 2 次の行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}$  に対して、 $a = 1$ ,  $b = -2$  における行列式  $|AB|$  の値は幾らか。

T-1

### 3.10 行列式の応用

10.1 3 点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  を通る円の方程式は、次式で与えられることを証明せよ。  
また、この円の中心と半径を求めよ。

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

10.2 (1)  $\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ x & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$  は  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  を通る直線の方程式を表すことを説明せよ。

(2)  $\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$  は  $(x, y)$  平面上の ( ) を通る ( ) を表す。

( ) を埋めよ。

(58 千葉大)

10.3 3 直線  $a_i x + b_i y + c_i = 0$  ( $i = 1 \sim 3$ )、 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  のとき、

3 直線が共有点を持つ条件は

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

であることを証明せよ。

(62 広島大)

10.4 平面上の 3 点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  が同一の直線上にある時、次の関係があることを証明せよ。

(1 佐大)

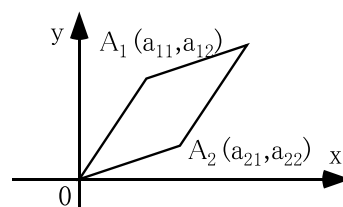
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

10.5 右図に示される平行四辺形の面積は

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

の絶対値で与えられることを証明せよ。

(63 北大)



10.6  $\mathbf{A} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{C} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$  が同一平面内にあるとき、

行列式  $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$  の値を求めよ。

ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  はそれぞれ  $x, y, z$  軸上の単位ベクトルとする。

(2 北大)

### 3.11 階数と方程式

11.1 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases} \quad (54 \text{ 都立大})$$

$$(2) \begin{cases} (m+1)x_1 + x_2 + x_3 = m-2 \\ x_1 + (m+1)x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2 \end{cases} \quad (56 \text{ 北大})$$

$$(3) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 2 \\ 2x - y + z - u = -4 \\ 3x + y + 4z + 3u = -2 \\ x + 3y + 4z + 5u = 2 \end{cases} \quad (59 \text{ 広島大})$$

$$(4) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \quad (60 \text{ 金沢大})$$

$$(5) \begin{cases} 4x + 2y + 3z + w = 1 \\ x + y - 2w = 2 \\ 5x + 2y + 4z - w = 0 \end{cases} \quad (62 \text{ 東商船大})$$

$$(6) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \quad (63 \text{ 電通大})$$

$$(7) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases} \quad (63 \text{ 都立大})$$

$$(8) \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \quad (63 \text{ 東商船大})$$

$$(9) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 都立大})$$

$$11.2 \quad \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 5x + y + 6z = 0 \\ kx + 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{について、次の問に答えよ。}$$

(1)  $x = y = z = 0$  以外の解を持つように  $k$  の値を定めよ。

(2)(1) で求めた  $k$  に対して、解全体の集合の  $\mathbb{R}^3$  での次元を求めよ。 (56 広島大)

11.3 次の連立方程式を満足する、ことごとくは 0 でない  $x, y, z$  の値が存在するように  $m$  の値を求めよ。 (58 図情大)

$$\begin{cases} mx + y - 3z = 0 \\ 5x - 3y - mz = 0 \\ 4x - 7y + (m + 1)z = 0 \end{cases}$$

11.4 連立方程式のクラメル公式を導け。 (58 金沢大)

11.5 (1) 行列式を用いて次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2 \end{cases}$$

(2) 係数の間に  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$  なる関係があるとき、上の連立方程式が解を持つための条件を求めよ。 (60 北大)

11.6 次の連立方程式は、定数  $\alpha$  の如何によって、解が一意に決まるか、あるいは解が存在しないかのいずれかであることを証明せよ。 (60 図情大)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

11.7  $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  で与えられているとき、以下の問に答えよ。

(1) 行列式  $|M|$  を求めよ。

(2) 行列の積  $MX$  を書け。

(3)  $MX = Y$  を満たすような  $X$  を求めよ。

(4)  $X$  が解を持たないときの条件を数式で表せ。 (62 北大)

11.8 次の 3 行 4 列の行列  $A$  に対して、その階数が 2 になるように未知数  $x$  の値を求めよ。 (63 電通大)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 5+x \\ 7 & 5+x & 9 & 1+3x \end{pmatrix}$$

11.9 連立1次方程式：

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -4 \\ 4x + y - 3z = 2 \\ -x + 2y + 2z = -6 \end{cases}$$

の解を、クラメルの公式を用いて求めよ。

(63 広島大)

11.10  $4 \times 3$  の3次元から4次元への変換行列  $A$  がある。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

という条件がある。

(1)  $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  が成り立つとき、行列  $X$  を求めよ。

(2)  $A$  の階数を求めよ。

(1 東工大)

### 3.12 固有値

12.1  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = |xE - A|$  とする。

$f(1) = -18$ ,  $f(2) = -24$ ,  $f(3) = -20$  であるとき、 $A$  の固有値を求めよ。(54 金沢大)

12.2  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  において、

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{pmatrix}$$

を表す行列  $A$  を求め、その固有値を求めよ。

(56 岩手大)

12.3 次の行列の固有値を求めよ。

(57 明治大)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12.4 ユニタリ行列 (または直交行列) の固有値の絶対値は1であることを示せ。(57 広島大)

12.5 次の行列  $A$  について、以下の問いに答えよ。ただし、 $a$  は実数とする。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & -a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)  $A$  の階数 (rank) を求めよ。

(2)  $x$  を列ベクトルとすると、 $Ax = 0$  となる  $x(x \neq 0)$  を求めよ。

T-57

12.6 線形変換  $x' = Ax$  が、正規直交基  $e_1, e_2$  に関して

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x'_1 = 6x_1 + 2x_2, \quad x'_2 = 2x_1 + 3x_2$$

で表されているとする。

(1) この変換  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) この固有ベクトルを正規化して、 $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$  とする。 $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$  は直交することを示せ。

(58 図情大)

12.7  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$  の固有値がすべて正になる必要十分条件が  $|A| > 0$  であることを示せ。

(59 金沢大)

12.8 3 次の直交行列  $A = (a_{ij})$ ,  $|A| = 1$  において、次の問に答えよ。

(1)  $a_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ,  $a_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ ,  $a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  を証明せよ。

(2) 1 は  $A$  の固有値であることを示せ。また、 $\text{tr}(A) = -1$  のとき、 $-1$  も固有値であることを示せ。

(59 金沢大)

12.9 (1) 次の行列  $A$  を計算せよ。

(2)  $|A| = 0$  となるためには  $\lambda$  をいくつにすればよいか。(60 徳島大)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12.10 3 次の行列  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , 対称行列  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$ , 交代行列  $C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{pmatrix}$  として、 $A = B + C$  とする。B の対角項の和  $b_{11} + b_{22} + b_{33} = 3b_0$  を用

いて、 $b'_{11} = b_{11} - b_0$ ,  $b'_{22} = b_{22} - b_0$ ,  $b'_{33} = b_{33} - b_0$  とおき、 $B' = \begin{pmatrix} b'_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b'_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b'_{33} \end{pmatrix}$  を定義する。B の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ,  $B'$  の固有値を  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  とする。スカラー  $J = -(b'_{11}b'_{22} + b'_{22}b'_{33} + b'_{33}b'_{11}) + b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2$  とする。

(1)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  としたとき、 $B, C, B'$  を定め、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, J$  を求めよ。

(2)  $J$  を  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  で表せ。

(3)  $J$  を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  で表せ。

(60 東大)

12.11  $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$  が与えられているとき、次の問に答えよ。

(1)  $A(t)$  の階数を求めよ。

(2)  $A(t_1)A(t_2) = A(\tau)$  のとき、 $\tau$  を求めよ。

(3) スペクトラム (固有値の集合) を求めよ。

(61 大分大)

12.12 行列  $A$  を  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$  とし、行列式  $|A - xE| = 0$  となる  $x$  の値を求めよ。

その最大値を  $\alpha$  において、 $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$  となるベクトル  $\vec{v}$  を求めよ。N-62

### 3.13 固有ベクトル

13.1 次の各行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(1)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  (57 山梨大)

(2)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  (57 熊本大)

(3)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  (1 2 都立科技大)

(4)  $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$  (62 東商船大)

(5)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (62 宮崎大)

(6)  $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$  (63 東商船大)

(7)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  (63 広島大)

(8)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  (1 九大)

(9)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  (2 徳島大)

13.2  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$   $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  がある。 $B = P^{-1}AP$  のとき、 $B$  の固有値および固有ベクトルを求めよ。

(57 東工大)

13.3 (1)  $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$  を求めて因数分解せよ。

(2)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  で  $Ax = \lambda x$  が成り立つ  $\lambda$  を求めよ。ただし、 $\lambda$  はスカラーで  $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$  である。また  $x$  を求めよ。( $x \neq 0$ )

T-57

13.4 次の問に答えよ。

(1) 単位行列でない 2 次の直交行列を 1 つ作れ。

(2) 一般に直交行列の固有値は絶対値 1 の複素数であることを示せ。

(62 広島大)

13.5 行列  $A$  を  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$  とし、行列式  $|A - xE| = 0$  となる  $x$  の値を求めよ。その最大解を  $\alpha$  において  $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$  となるベクトル  $\vec{v}$  を求めよ。

N-62

- 13.6 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$  に対し、行列  $|A|$  が正ならば、 $A$  の固有値も正となることを示せ。  
(63 金沢大)

- 13.7 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  として、次の間に答えよ。  
(1) 行列式  $\det A$  を求めよ。  
(2) 逆行列  $A^{-1}$  を求めよ。  
(3)  $A$  の固有値および固有ベクトルを求めよ。  
(63 愛媛大)

- 13.8  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  の固有値を求め、実数の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。  
(63 徳島大)

- 13.9 4 次行列を 2 次行列  $\times$  2 次行列と表わしたものを  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  と表す。すなわち

$$4 \text{ 次行列} = \begin{pmatrix} \text{左上の } 2 \times 2 \text{ を } A & \text{右上の } 2 \times 2 \text{ を } B \\ \text{左下の } 2 \times 2 \text{ を } C & \text{右下の } 2 \times 2 \text{ を } D \end{pmatrix}$$

$$(1) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

上の関係があるとき、左上の  $2 \times 2$  行列を使って下の関係があることを示せ。

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ G \end{pmatrix} = (AE + BG)$$

- (2) 単位行列  $I$ 、零行列  $0$ 、任意行列  $A$  を  $2 \times 2$  の行列としたとき、行列  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$  の逆行列を求めよ。

- (3)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  と置くとき、 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & 2I + 3A \end{pmatrix}$  の固有値 (固有値  $\lambda$  は複素数) と固有ベクトルを求めよ。  
(1 阪大基)

- 13.10  $A, Y$  を  $n$  次正方行列、 $E$  を  $n$  次単位行列とし、 $f(x, Y)$  を次式で表す。

$$f(x, Y) = |xE - AY| - |xE - YA|$$

- (1)  $f(x, Y) |Y| = |xE - AY| - |xE - YA| |Y| = 0$  を証明することにより  $|xE - AY| = |xE - YA|$  を証明せよ。

- (2)  $a, 0$  を  $n$  次元列ベクトルとする。ここで  $A = (a, 0, \dots, 0)$ ,  $Y = A^t$  とする。このとき (1) を利用して、

$$|xE - aa^t| = x^{n-1}(x - a^t a)$$

を証明し、0 でない固有値を求めよ。

- (3) 対角要素を  $n$ 、非対角要素を  $-1$  としたときの固有値と、 $n$  に無関係な固有ベクトルを (1), (2) を利用して求めよ。  
(2 阪大工)

### 3.14 固有空間

14.1  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  の固有ベクトルが  $\mathbf{R}^4$  全体を張るための必要十分条件を求めよ。

(59 東工大)

14.2 行列の関係式

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

があるとき、次の問に答えよ。

(1) 上式で  $x, y, z$  が共に 0 でないときの  $k$  の値を求めよ。

(2) 上問で求めたそれぞれの値  $k$  のとき、その方程式をグラフに描け。

T-62

14.3 3 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  がある。

(1)  $A$  の固有値 1 に対する固有空間  $V \subset \mathbf{R}^3$  を求めよ。

(2) ベクトル  $\vec{y} \in \mathbf{R}^3$  が (1) の固有空間  $V$  に直交するとして、 $\vec{y}$  と  $A\vec{y}$  のなす角を求めよ。

(63 熊大)

14.4  $A, B$  を  $n$  次の対称行列とし、 $C$  を正則行列とする。 $B = C^{-1}AC$  のとき

(1)  $A$  と  $B$  の固有多項式が一致することを証明せよ。

(2) またこの時、 $A$  の固有値を  $\lambda, \lambda'$  とし、次の部分空間  $W, W'$  の間の関係を求めよ。

$$W = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid AX = \lambda X \right\}, \quad W' = \left\{ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mid AY = \lambda' Y \right\}$$

(63 東工大)

14.5 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  の固有値と、それに対応する固有空間を求めよ。(63 名工大)

### 3.15 Jordan 標準形

15.1 (1)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2)  $n \times n$  の行列  $C, P$  があって  $P$  が正則のとき、 $C$  の固有方程式と  $PCP^{-1}$  の固有方程式が一致することを証明せよ。

(3) (1) の行列について  $PCP^{-1} = B$  (対角行列) が成り立つ  $P$  を求めよ。

(55 東大)



- 15.2  $n \times n$  行列  $A$  が  $A^2 = E_n$  ( $E_n$  は  $n$  次の単位行列) を満たすとき、  
 $R(A - E_n) + R(A + E_n) = n$  であることを証明せよ。 (55 山梨大)

- 15.3 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  がある。  
 (1) 固有値および固有ベクトルを求めよ。  
 (2)  $P^{-1}AP$  が対角行列となるような  $P$  を求めよ。 (56 東工大)

- 15.4  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  がある。次の問に答えよ。  
 (1)  $A, B$  の固有値、固有ベクトルを求めよ。  
 (2)  $A$  と  $PAP^{-1}$  の固有方程式が同じであることを示せ。  
 (3)  $B = PAP^{-1}$  の  $P$  を求めよ。 (56 東大)

- 15.5 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  について、次の問に答えよ。  
 (1) 固有値を求めよ。 (2) 固有ベクトルを求めよ。  
 (3) 適当な正則行列  $P$  を求めて、 $P^{-1}AP$  を対角行列にせよ。 (60 広島大)

- 15.6 行列  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  の固有値、固有ベクトルを求め、標準形で表せ。 (62 熊大)

- 15.7 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  に対し、次の問 (1) (2) (3) に答えよ。  
 (1) 行列式  $\det(A)$  の値を求めよ。 (2) 固有値、固有ベクトルを求めよ。  
 (3)  $AW = WA, W^T W = I$  となるような対角行列  $\Lambda$  と行列  $W$  を求めよ。 (62 図情大)

- 15.8 行列  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  (ただし、 $\theta \neq n\pi: n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) は実数行列の範囲では対角化不可能であるが、複素数行列の範囲では、対角化可能である。その理由を説明せよ。  
 (63 名工大)

- 15.9  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  なる行列がある  
 (1) 階数を求めよ。 (2) 逆行列を求めよ。 (3) 固有値を求めよ。  
 (4)  $A$  は対角化できるか。  
 (5)  $A$  を対角化できたならば、対角化行列  $P$  および  $D = P^{-1}AP$  を求めよ。 (63 京大)

- 15.10 行列  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、ベクトル  $\vec{\lambda}$ 、スカラー  $\nu$  があり、 $A\vec{\lambda} = \nu\vec{\lambda}$  が成立しているとき、  
 (1) 固有列ベクトル  $\vec{\lambda}_i$ 、固有値  $\nu_i$  を求めよ。  
 (2) 行列  $T$  を  $T = (\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3)$  として、 $T^{-1}$  を  $T$  の逆行列とすると、 $T^{-1}AT$  を求めよ。

(3)  $x(k)$  を 3 次元列ベクトルとすると、 $x(k)$  を  $k$  の関数として表せ。

T-63

15.11  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  のとき次の設問に答えよ。

a)  $A^{-1}$  を求めよ。

b)  $A$  の固有値及び固有ベクトルを求めよ。

c)  $A$  を対角化する直交行列  $P$  および対角化された行列  $P^T A P$  を求めよ。ただし、 $P^T$  は  $P$  の転置行列を表す。

(1 千葉大)

15.12  $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$  ( $a \neq 0$ ) とする。

(1)  $A^{-1}$  を求めよ。

(2)  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) 直交行列  $P$  を求めて、 ${}^t P A P$  を対角行列となるようにせよ。

(1 金沢大)

15.13  $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ a^2 - a + 1 & -3a \end{pmatrix}$ ,  $Ax = \lambda x$  であるとき、 $\lambda$  が 2 個の実数解を持つときの  $a$  の範囲を求めよ。

T-2

### 3.16 Jordan 標準形の応用

16.1 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  について

(1) 固有値を求めよ。 (2) 直交行列を用いて  $A$  を対角化せよ。

(3)  $A^n$  を求めよ。

(55 東工大)

16.2  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  という行列がある。次の問に答えよ。

(1)  $B = P^{-1} A P$  が対角行列となる  $P$  の一つを求めよ。

(2)  $B^n = P^{-1} A^n P$  なることを示せ。

(3)  $\exp(A) = E + A + A^2/2! + \cdots$  なる行列  $\exp(A)$  を求めよ。

(59 東工大)

16.3 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$  について、次の問に答えよ。

(1) この行列の階数が 2 であるための条件を求めよ。

(2) この行列の固有値がすべて正であるための条件を求めよ。

(61 国情大)

(3) 2 次曲面  $x^2 + 2x^2 + az^2 - 2xy - 2yz = 1$  が実楕円体であるための条件を求めよ。

16.4 (1) 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  の固有値、固有ベクトルを求めよ。

(2) (1) を利用して、 $A$  の直交行列  $T$  を求めよ。

(3)  $2yz + 2zx + 2xy + 1 = 0$  を標準化して、概形を描け。

(62 金沢大)

16.5 実二次形式  $g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_2x_3$  で表し、行列  $F = (f_{ij})$  は 3 次の対称行列である。

(1) ベクトル  $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$  と対称行列  $F = (f_{ij})$  を用いることにより、 $x^t F x = g(x_1, x_2, x_3)$  が成立している。その行列  $F$  を求めよ。

(2)  $F$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  および単位長さに正規化された固有ベクトル  $e_1, e_2, e_3$  を求めよ。

(3) 列ベクトル  $e_1, e_2, e_3$  を横に並べて作られる  $P = (e_1, e_2, e_3)$  が直交行列になることを確かめよ。また、座標変換  $x = Py$  において  $g(x_1, x_2, x_3)$  の 2 次形式が標準化できることを示せ。ただし  $y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$  とする。 (1 阪大工)

16.6 行列  $A, P$  が次のように表されるとき、次の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)  $P^{-1}$  を計算せよ。 (2)  $P^{-1}AP$  を計算せよ。 (3)  $P^{-1}A^5P$  を計算せよ。 (2 愛媛大)

### 3.17 総合問題

17.1 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  に関して、以下の問に答えよ。

(1)  $A$  の逆行列を求めよ。 (2)  $A$  の階数 (ランク) を求めよ。

(3)  $A$  の固有値と正規化された (長さ 1 の) 固有ベクトルを求め、正規化された固有ベクトルを直角座標上に図示せよ。

(4)  $A^{100}$  ( $A$  の 100 乗) を求めよ。 (58 佐賀大)

17.2 次の 5 次の正方行列  $A$  について、次の問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 行列  $A^2$  を求めよ。 (2) 行列式  $|A|$  の値を求めよ。

(3) 行列  $A$  の rank (階数) を求めよ。

(4) 行列  $A$  は正則行列であるが、理由を記して答えよ。 (1 佐大)

17.3  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$  とする。

(1)  $A$  の固有値、固有ベクトルを求めよ。

(2)  $A$  の逆行列を求めて、方程式  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$  を解け。 (1 愛媛大)

## 第4章 微分法

### 4.1 数列

1.1 次の数列の和を求めよ。

N-1

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n + 1)$$

1.2 (1) ある等比数列の初項の8項の和は、初項の4項の和の17倍であるという。この数列の公比を求めよ。

(2) 初項が8、第4項が-1の等比数列がある。この数列の公比を求めよ。

(3) 初項が16、第5項が-1であるような実数の等比数列の存在について論ぜよ。(58 北大)

1.3 数列の和  $\sum_{k=1}^n kx^k$  を求めよ。(59 千葉大)

1.4 数列 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9,  $\cdots$  の第  $n$  項を求めよ。また、第  $n$  項までの和を求めよ。(59 図情大)

1.5 数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  において、各数列の隣接する2項  $a_n$ ,  $a_{n+1}$  および  $b_n$ ,  $b_{n+1}$  の間に

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

という関係が成立するとき、その一般項  $a_n$ ,  $b_n$  を以下の手順に従って求めよ。

(1) 2つのベクトル  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  について、

$$A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 2$$

となる2つの定数  $\lambda_1, \lambda_2$  を求めよ。

(2) 前問でベクトル  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ ,  $(i = 1, 2)$  に対応する定数  $\lambda_i$  を求めたが、いまベクトル  $\begin{pmatrix} a_{n,i} \\ b_{n,i} \end{pmatrix}$  を

$$\begin{pmatrix} a_{n,i} \\ b_{n,i} \end{pmatrix} = \lambda_i^n \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

と表すものとする。このとき、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1,i} \\ b_{n+1,i} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n,i} \\ b_{n,i} \end{pmatrix}$$

が成立することを示せ。

(3) 以上の結果から数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項が

$$a_n = c_1 a_{n,1} + c_2 a_{n,2} \quad (c_1, c_2 \text{ は定数})$$

$$b_n = c_1 b_{n,1} + c_2 b_{n,2}$$

の形で表されるという。数列の初項  $a_1$ ,  $b_1$  が  $a_1 = -10$ ,  $b_1 = 40$  のとき、一般項  $a_n$ ,  $b_n$  を求めよ。

T-60

1.6 数列  $\{a_n\}$  を  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  によって定義する。

(1) 二項定理を用いて、 $a_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  を示せ。

(2) すべての正定数  $n$  に対して、 $n! > 2^{n-1}$  を数学的帰納法を用いて示せ。

(3) すべての正定数  $n$  に対して、 $a_n < 3$  が成り立つことを示せ。

(4) すべての正定数  $n$  に対して、 $a_n < a_{n+1}$  が成り立つことを示せ。 (61 慶大, T)

## 4.2 級数

2.1 次の級数 ( $n = 1 \sim \infty$ ) の和を求めよ。

(1)  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  (63 都立大)

(2)  $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  (63 都立大)

2.2 次の級数の収束、発散を調べ、収束する場合は求められる限りその和を求めよ。

(1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$  (57 東農工大)

(2)  $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \dots$  (58 佐賀大)

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$  (1 東農工大)

(4)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$  (2 佐賀大)

2.3 数列  $\{a_n\}$  を次のように定める。 $a_1 = 1$ ,  $n \geq 2$  については  $a_n = 2^{-(k+1)}$ 。ここで  $k$  は  $2^k < n \leq 2^{k+1}$  を満たす整数とする。

(1) 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束するか発散するか理由をつけて答えよ。

(2)  $b_n = \frac{1}{n}$  とするとき、 $n \geq 3$  に対して不等式  $a_n \leq b_n$  が成り立つことを示せ。

(3) 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  は収束するか発散するか理由をつけて答えよ。 (60 鹿大)

2.4 (1) 二項展開を用いて次の式を証明せよ。ただし、 $\alpha > 0$  とする。

$$(1 + \alpha)^n > \frac{n(n-1)}{2\alpha^2}$$

(2) (1) を用いて、次の極限を求めよ。

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \alpha)^n}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1 + \alpha)^n}$

(3) 次の和を求めよ。(証明不要)

a)  $\sum_{k=0}^n x^k$

b)  $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$

(4) (3) を用いて、次の和を求めよ。(ただし、 $|x| < 1$ )

(61 東北大)

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

2.5 正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の収束発散判別法を一つ書け。

(62 東農工大)

2.6 次の級数の収束半径を求めよ。

(63 東商船大)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(2n)!x^n}{(3n)!}$$

2.7  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 \cdots + nx^n + \cdots$  において  $x = \frac{1}{2}$  としたときの級数の値を求めよ。

T-63

2.8  $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$  において、 $x = \frac{1}{4}$  としたときの級数の値を求めよ。

T-1

### 4.3 漸化式

3.1 数列  $\{a_n\}$  の各項に次の関係があるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

(1)  $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 4}$

(2)  $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{5}$  (1 千葉大)

3.2  $\sigma = \{(a_1, a_2, \dots, a_{10}) \mid a_{k+3} = 3a_{k+2} + 2a_{k+1} + a_k, k = 1, \dots, 7\}$  のとき、空間  $\sigma$  の次元を求めよ。 (52 山梨大)

3.3  $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}, a_1 = 1$  として、次の問に答えよ。

(1)  $a_{n+1} - a_n$  を  $a_n$  と  $a_{n-1}$  で表せ。

(2) この数列が増加数列であることを示せ。

(3)  $a_n < 2$  を示せ。

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  は存在するか。するならばその値を求めよ。 (59 東北大 2 都立大)

3.4  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$  で定義される数列  $\{a_n\}$  について

(1)  $\{a_n\}$  が収束すると仮定して  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  を求めよ。

(2)  $\alpha < a_n$  かつ  $\{a_n\}$  が減少数列であることを示せ。

(3)  $a_{n+1} - \alpha < \frac{a_n - \alpha}{2}$  を示せ。 (62 鹿大)

3.5 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が次の漸化式で与えられている。以下の問に答えよ。

$$a_1 = 1, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3b_n, b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}$$

(1)  $x_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$  とおくと、上の漸化式は  $x_{n+1} = Ax_n$  となる。

$x_n$  を  $A$  と  $x_1$  で表せ。

(2)  $A$  の固有値  $\alpha, \beta$  と固有ベクトルを求めよ。

(3) 次式を満たす  $P$  を求めよ。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = D$$

(4) これから、 $A = PDP^{-1}$  と書ける。これを使って  $A^{n-1}$  を求めよ。

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ。 (2 千葉大)

### 4.4 極限值

4.1  $n \rightarrow \infty$  のとき、次式の極限值を求めよ。

(1)  $\frac{\log n}{n!}$  (57 東農工大)

(2)  $\frac{a^n}{n!}$  (58 広島大)

- (3)  $\frac{n!}{n^n}$  (58 広島大) (4)  $\log(n+1) - \log n$  (58 広島大)  
 (5)  $\sqrt{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})$  T-62 (6)  $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$  (2 千葉大)  
 (7)  $\frac{3n+1}{n^2}$  N-1 (8)  $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$  (2 千葉大)  
 (9)  $n - \sqrt{n^2 + 3n}$  T-2

4.2  $x \rightarrow 0$  のとき、次式の極限値を求めよ。

- (1)  $\frac{\sin x - \tan x}{x^3}$  (56 千葉大) (2)  $\frac{\sin 5x}{e^{2x} - 1}$  (57 千葉大)  
 (3)  $\frac{\sin x}{x}$  (58 広島大) (4)  $\frac{e^{2x} - 1}{x}$  (58 広島大)  
 (5)  $\frac{x^2 + \sqrt{(1 - \cos^2 x)x^2 + 2x^5}}{x^2 + x^3}$  (59 岩手大) (6)  $\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$  (60 東農工大)  
 (7)  $\frac{\sqrt{1+2x+3x^2} - \sqrt{1-3x}}{3x}$  (61 千葉大) (8)  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$  (62 千葉大)  
 (9)  $\frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$  N-63 (10)  $\frac{1/x - 1/\sin x}{x}$  N-1

4.3  $x \rightarrow 0$  のとき、次式の極限値を求めよ。

- (1)  $\frac{x \cos x - x}{\log(1+x^3)}$  (55 東農工大) (2)  $(\log(1+x))^x$  (56 千葉大)  
 (3)  $\frac{x - \log(1+x)}{x^2}$  (56 東農工大) (4)  $\frac{x^\alpha}{e^x - 1} (\alpha \neq 0)$  (60 北大)  
 (5)  $\frac{a^x - b^x}{x} (a > 0, b > 0)$  (60 広島大) (6)  $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$  (61 広島大)  
 (7)  $(1+ax)^{1/x}$  (61 広島大) (8)  $\frac{3^x - 1}{x}$  (62 東商船大)  
 (9)  $\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$  (62 東商船大) (10)  $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$  (59 東農工大, 63 電通大)  
 (11)  $\frac{x}{\sqrt{1+\tan^{-1} 2x} - \sqrt{1+\tan^{-1} x}}$  (63 千葉大) (12)  $\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$  (63 東商船大)

4.4  $x \rightarrow +0$  のとき、次式の極限値を求めよ。

- (1)  $\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$  (56 千葉大) (2)  $(1 - \sin 2x)^{1/x}$  (59 名工大)  
 (3)  $x \log x$  (57 62 東農工大) (4)  $x^x$  (60 63 東商船大)  
 (5)  $(\sin x)^x$  (1 東農工大)

4.5  $x \rightarrow 1$  のとき、次式の極限値を求めよ。

- (1)  $\frac{x^n - 1}{x - 1} (n: \text{正整数})$  (57 千葉大) (2)  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$  (60 北大)  
 (3)  $\sqrt{x^{1/(x-1)}}$  (62 東商船大)

4.6  $n \rightarrow \infty$  のとき、次式の極限値を求めよ。

- (1)  $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$  (57 千葉大) (2)  $\frac{(x+a) \log(x+a)}{x \log x}$  (57 東農工大)  
 (3)  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$  (59 東農工大) (4)  $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$  (60 東工大)  
 (5)  $x^{1/x}$  (61 東農工大) (6)  $x \left(\tan^{-1} x - \frac{\pi}{2}\right)$  (62 広島大)  
 (7)  $\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{1/x}$  (63 電通大) (8)  $x^2 e^{-2x}$  (63 広島大)  
 (9)  $\log_a \frac{1+x}{x}$  (1 千葉大) (10)  $x^3 e^{-x}$  (1 山口大)  
 (11)  $x^3 e^{-ax} (a > 0)$  (1 広島大)

4.7  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$  のとき、次式の極限値を求めよ。 (2 千葉大)

$$(\pi - 2\theta) \tan \theta$$

4.8  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + 2x^2 - 1}{x^{2n} + 1}$  のグラフを描き、不連続点を求めよ。(52 山梨大)

4.9 半径  $r$  の円の半径  $OA$  の延長上に  $P$  をとり、 $P$  から円  $O$  に接線  $PT$  を引き、その接点を  $T$  とする。 $T$  から  $OA$  に垂線  $TN$  を下ろし、その足を  $N$  とする。 $\lim_{P \rightarrow A} \frac{NA}{AP}$  を求めよ。(53 山梨大)

4.10  $a_0 = a, a_{n+1} = pa_n + q$  で定められる数列  $\{a_n\}$  があり、 $b_n = pa_n + \lambda$  ( $\lambda$ : 定数) のとき、次の間に答えよ。

- (1)  $b_n$  について、漸化式を表せ。(2) 数列  $\{a_n\}$  の第  $n$  項を  $n$  を用いて表せ。  
(3)  $a = p = 1$  のとき、 $\{a_n\}$  の極限値を求めよ。(55 東北大)

4.11 (1)  $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$  を  $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$  を使って求めよ。  
(2) 直角三角形の斜辺の長さを  $a$  とする。頂点  $A$  から  $n+1$  等分した斜辺  $BC$  の各辺に引いた線分の長さの平方をそれぞれ  $D_1, D_2, \dots, D_n$  とするとき、その総和を求めよ。

- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k$  を求めよ。(55 東北大)

4.12  $n \rightarrow \infty$  のとき、次式の極限値を求めよ。(57 北大)

- (1)  $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$  (2)  $\sqrt[n]{n!}$  (3)  $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

4.13 無限数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束することの条件を  $\varepsilon - \delta$  法を用いて述べよ。(57 東農工大)

4.14 次の間に答えよ。

- (1)  $a$  と  $b$  が正数であるとき、次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

また、この式の等号が成立するのはどのような場合か。

- (2) 任意の正整数  $n$  に対して

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

と定義する。(1) の関係を利用して、不等式  $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  を導け。

- (3) (2) の数列  $\{a_n\}$  の極限を調べよ。(57 東北大)

4.15  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}$  を求め、さらに  $T_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} - S_n\right)^2}$  を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  の値を求めよ。T-61

4.16  $f(n, k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)/k!$  として、次の間に答えよ。

- (1)  $f(n, k) + f(n, k+1) = f(n+1, k+1)$  を示せ。  
(2)  $\sum_{k=0}^n f(n, k) = 2^n$  を数学的帰納法で示せ。  
(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{2^n} = 0$  がどんな数  $m$  に対しても成り立つことを示せ。(1 三重)

## 4.5 連続性と微分可能

5.1 次の関数において、微分可能性と連続性を判定せよ。(50 山梨大)

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \frac{e^{1/x} + e^{-1/x}}{e^{1/x} - e^{-1/x}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x^h \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$



- 5.2  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$  について、次の問に答えよ。  
 (1)  $f'(x)$  を求めよ。  
 (2)  $f'(x)$  は  $x = 0$  において連続か不連続か。 (51 東農工大, 60 東北大)
- 5.3 (1)  $x = a$  で  $f(x)$  が連続とはどういうことか。定義を書け。  
 (2)  $x = a$  で  $f(x)$  が微分可能とはどういうことか。定義を書け。 (62 東農工大)
- 5.4  $f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で連続で、开区間  $(a, b)$  で微分可能ならば、  

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
 であるような  $c$  が  $(b, a)$  の中に少なくとも一つ存在することを証明せよ。 (2 北大)

## 4.6 微分

- 6.1 次の関数  $y$  を  $x$  で微分せよ。  
 (1)  $e^{-1/x^2}$  ( $x \neq 0$ ) (57 東農工大) (2)  $\log|x + \sqrt{x^2 + A}|$  (59 東農工大)  
 (3)  $x \cos x$  T-61 (4)  $x \log(x^2 + 1)$  (62 九州大)  
 (5)  $\frac{a^x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$  N-61 (6)  $\log \frac{x-1}{x+1}$  T-62  
 (7)  $\log \cos x$  (62 東商船大) (8)  $\sqrt{x^2 + 3x + 5}$  (1 佐賀大)  
 (9)  $e^{-x} \sin x$  (1 佐賀大) (10)  $\sin\left(\frac{x}{a}\right)$  (1 東農工大)  
 (11)  $\log \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$  (1 山口大)
- 6.2 次の関数  $y$  を  $x$  で微分せよ。  
 (1)  $\frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right)$  (55, 58 都立大) (2)  $\sin^{-1} 5x$  (57 東農工大)  
 (3)  $\sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$  (59 都立大) (4)  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$  (59 東農工大)  
 (5)  $\tan^{-1} ax$  (60 千葉大) (6)  $x \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$  (62 東商船大)  
 (7)  $(1 + x^2) \tan^{-1} x$  N-1 (8)  $\sin^{-1} e^x$  (63 九州大)  
 (9)  $\tan^{-1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$  (63 信州大) (10)  $\tan^{-1} 2 \tan \frac{x}{2}$  (2 九州大)
- 6.3 次の関数  $y$  を  $x$  で微分せよ。  
 (1)  $x^x$  (57 東農工大 2 九州大) (2)  $x^{1/x}$  (61 東農工大)  
 (3)  $a^{\sqrt{x}}$  (63 信州大)
- 6.4 次の関数  $y$  を  $x$  で微分せよ。  
 (1)  $x = \sin^3 t, y = \cos^3 t$  (54 都立大)
- 6.5 次の関数  $y$  から  $y', y''$  を求めよ。  
 (1)  $x = \frac{1}{1+t^2}, y = \frac{2t^2}{1+t^2}$  (57 秋田大)  
 (2)  $x^2 y + xy^2 - 2 = 0$  (61 熊本大)
- 6.6  $F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}$  について  $F'$  を求めよ。 (47 金沢大)
- 6.7 次の関数の導関数を求めよ。 (53 東農工大)

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

- 6.8  $f(x) = x^3$  のとき、 $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$  を満足する  $\theta$  を求めよ。また、 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$  を求めよ。 (56 北大)
- 6.9  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ ,  $x(t) = a(t - \sin t)$  のとき、 $y(t)$  を求めよ。 (58 都立大)
- 6.10  $f(x) = e^{1/x^2}$  の関数がある。なお、 $f(0) = 0$  とする。そのとき、 $g(x) = f(x) \cdot \tan^{-1} x$  として  $g'(0)$ ,  $g''(0)$  を求めよ。 (59 電通大)
- 6.11  $f(x) = \sin^{-1} x$  のとき、次の等式を示せ。  
 $(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$  (60 山口大)
- 6.12 次の関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  を求めよ。 (63 東商船大)  
 (i)  $f(x) = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$  (ii)  $f(x) = \sin^{-1} x$
- 6.13  $y = 2 \sin 2\theta \cos \theta$  の導関数と  $\theta = \frac{\pi}{4}$  における微分係数を求めよ。 T-1

## 4.7 グラフ

7.1 次の関数  $y = f(x)$  のグラフの概形を描け。

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| (1) $\sin^{-1}(1 - x^2)$ (55 岡大)                      | (2) $xe^{-x^2}$ (57 室蘭工大)           |
| (3) $\sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$ (57 東農工大)              | (4) $\frac{x^2}{2(x-3)}$ (59 佐賀大)   |
| (5) $y = x(x-1)(x-2)$ (59 金沢大)                        | (6) $y = \frac{1}{\log x}$ (59 千葉大) |
| (7) $2 \cos x + \cos 2x$ (62 東農工大)                    | (8) $\sqrt{1 - x^2}$ T-61           |
| (9) $y = x -  x $ (63 千葉大)                            | (10) $e^{-x} \cos x$ (63 都立大)       |
| (11) $\sinh x + \cosh x$ (63 都立大)                     | (12) $x^2 e^{-x}$ (63 東農工大)         |
| (13) $x \log x$ (1 都立科技大)                             | (14) $x^2 \log x$ (1 都立科技大)         |
| (15) $e^{-x} \sin x$ ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) (2 都立大) | (16) $\frac{\log x}{x}$ (2 都立大)     |
| (17) $x^2 e^x$ (2 佐賀大)                                |                                     |

7.2 次の関数のグラフの概形を描け。

$$r = |2 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta| \quad (63 \text{ 千葉大})$$

7.3 次の関数のグラフの概形を描け。

- (1)  $x = 1 - \frac{1}{t}$ ,  $y = \frac{1}{t+1}$  (59 千葉大)
- (2)  $x = t^2 - 1$ ,  $y = \frac{t}{t-1}$  (63 千葉大)

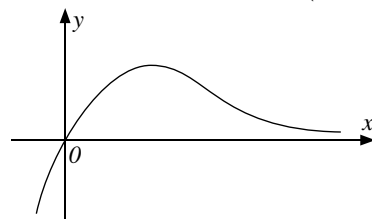
7.4 次の関数  $y = f(x)$  の極大極小を求めよ。

- (1)  $e^x \sin x$  (63 熊本大)
- (2)  $x + \frac{1}{x-1}$  T-2

7.5 曲線  $x^2 + y^2 = 4x$  に傾き 3 で接する直線の方程式を求めよ。 (61 図情大)

7.6  $y = e^x \sin x$  の極大・極小について論ぜよ。 (61 大分大)

7.7 右のグラフの関数の導関数のグラフを描け。 N-63



- 7.8  $x$  の関数  $\begin{cases} x = \tan^{-1} t \\ y = \log |t + \sqrt{t^2 + 1}| \end{cases}$  がある。 $y'$ ,  $y''$  を求め、凹凸を調べよ。(2 東農工大)

## 4.8 最大・最小

- 8.1 3次元ユークリッド空間に点  $P_1(0, 0, 0)$ ,  $P_2(1, 0, 0)$ ,  $P_3(0, 1, 0)$ ,  $P_4(0, 0, 1)$  がある。いま  $P_1, P_2$  を結ぶ直線を  $l_1$  と、 $P_3, P_4$  を結ぶ直線を  $l_2$  とするとき、平面  $\pi$  を次のように定める。  
 (1) 点  $Q(1, -1, 1)$  を通る。  
 (2) その  $\pi$  への  $l_1, l_2$  の正射影が平行、あるいは1点と1直線になるようにする。  
 このような  $\pi$  のうち、原点からの距離が最大となるものを求めよ。(53 東大)
- 8.2  $f(x) = -x^3 + ax$  について  
 (1)  $0 \leq x \leq 1$  のときの  $f(x)$  の最大値  $M$ 、最小値  $m$  を求めよ。  
 (2)  $0 \leq x \leq 1$  で  $|f(x)|$  の最大値  $M$ 、最小値  $m$  を求めよ。(55 東北大)
- 8.3 半径  $a$  の球に内接する直円錐のうち、体積最大のものを求めよ。(56 東工大)
- 8.4 2個の球の半径の和が一定値  $a$  であるとき、その体積の和が最小になるときのそれぞれの半径を求めよ。また、このときの体積の和を求めよ。(57 図情大)
- 8.5  $x^2 + xy + y^2 = 1$  のとき、次の問に答えよ。  
 (1)  $\frac{dy}{dx}$  を  $x, y$  を使って求めよ。  
 (2)  $z = xy$  とするとき、 $\frac{dz}{dx}$  を求めよ。  
 (3)  $x$  の最大値を求めよ。N-57
- 8.6 関数  $f(x) = \sin 3x + 3 \sin x$  について、以下の問に答えよ。  
 (1)  $f(x)$  を  $\sin x$  の関数として表せ。  
 (2) 上の結果を用いて、区間  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  における  $f(x)$  の最大値と最小値を求めよ。T-61
- 8.7 楕円  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  に内接する長方形(2辺の長さを  $2a, 2b$  とする)がある。長方形の面積が最大となるときの  $\frac{b}{a}$  の値を求めよ。T-63
- 8.9 (1)  $f(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$  で  $f(a) = 0$ ,  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  の  $a$  は  $\frac{\pi}{4}$  より大きいのか小さいか理由をあげて説明せよ。  
 (2)  $F(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  がある。 $F(x)$  の最大値を求めよ。  
 (3) (1) の答えを  $a$ 、(2) の最大値を  $M$  とした場合、 $M + \frac{2}{\pi a}$  はどうなるか。(63 九州大)
- 8.10 曲線  $y = e^x + 1$  上の任意の点を  $P$  とし、 $P$  を通る接線と  $x$  軸との交点を  $Q$ 、 $P$  から  $x$  軸に下ろした垂線の足を  $R$  とする。 $P$  が曲線上を動くとき、 $\triangle PQR$  の面積が最小値をとるとき、点  $P$  の座標および最小値を求めよ。(1 愛媛大)
- 8.11  $x + 2y = 6$  のとき、 $\log x + \log y$  が最大となる  $x, y$  の値及び最大値を求めよ。(2 茨城大)

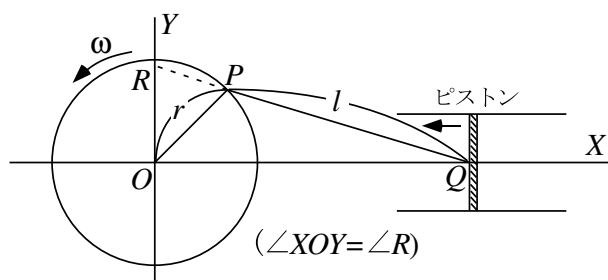
## 4.9 微分の応用

- 9.1  $\alpha > 1$ ,  $x > 1$  のとき、次の不等式を証明せよ。(55 岩手大)
- $$\alpha(x-1) < x^\alpha - 1 < \alpha x^{\alpha-1}(x-1)$$

- 9.2 放物線  $x = 1 + \frac{y^2}{2}$  と楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  とが交点を持つためには  $a^2 \geq 1$  でなければならないが、さらにこの2つの曲線が交点において直交するためには、 $a^2$  の値はどのような範囲になければならないか。また、そのときの  $b^2$  を  $a^2$  で表せ。(55 東北大)
- 9.3  $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \quad (0 < x \leq \frac{\pi}{2})$  が成り立つことを証明せよ。(55 徳島大)
- 9.4  $x - 2 \sin x = 10$  において、正根が少なくとも1つ以上存在することを証明せよ。(57 東農工大)
- 9.5 中間値の定理を述べて証明せよ。(57 秋田大)
- 9.6 (1)  $\sin x < x \quad (0 < x < 2\pi)$  を示せ  
(2)  $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$  を示せ。(58 金沢大)
- 9.7  $-\frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  を証明せよ。(61 熊本大)

## 4.10 微分の応用(力学)

- 10.1 ピストンの往復運動を円運動に変換する、下図のようなクランク装置がある。



点 Q は直線 OX 上を動き、 $r$  は円の半径、 $l$  は線分 PQ でその長さは一定である。QP の延長と直線 OY との交点を R とすると、点 P が半径  $r$  の円周上を一定の角速度  $\omega$  で運動するためには、点 Q の速度  $v$  は  $v = -\omega OR$  で与えられることを示せ。(59 北大)

- 10.2 平面座標上の点 P が原点 O から  $x$  軸上を正方向に向かって一定の速度  $v$  で進んでいる。 $y$  軸上の点を  $A(0, a)$  とし、 $\angle OAP = \theta$  とする。今点 P が  $(3a, 0)$  上にあるときの  $\frac{d\theta}{dt}$  を求めよ。(63 愛媛大)

## 4.11 $n$ 次導関数

- 11.1 次の関数  $f(x)$  の与えられた次数の導関数を求めよ。

(1)  $x^2 e^x$  (10) (62 千葉大) (2)  $e^x \sin x$  (8) (62 千葉大)

- 11.2 次の関数  $y$  の  $n$  次導関数を求めよ。

(1)  $x^2 \cos x$  (62 徳島大) (2)  $e^x \sin x$  (63 徳島大)  
 (3)  $x^{n-1} \log x$  (53 室蘭工大) (4)  $x^3 \sin x$  (61 東商船大)  
 (5)  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  (61 東商船大) (6)  $x \sin x$  (63 広島大)

- 11.3 次の関数  $f(x)$  を  $x = 0$  のまわりで展開し、初めの3項まで示せ。

(1)  $\sin x$  (60 千葉大) (2)  $\sqrt[3]{1+x^2}$  (55 山梨大)  
 (3)  $\log(1+x+x^2)$  (49 東北大) (4)  $\sqrt{1+x}$  (49 東北大)

11.4 次の関数  $f(x)$  の  $f^{(n)}(0)$  を求めよ。

(1)  $\tan^{-1} x$  (48 信州大 63 名工大)

11.5 次の関数  $f(x)$  を  $x = 0$  のまわりで展開し、初めの  $n$  項まで示せ。

(1)  $f(x) = -x^3 \cos x$  (63 信州大)

11.6 すべての実数に対して  $f'(x) = 0$  になるとき、 $f(x) = \text{定数}$ であることを証明せよ。

(52 広島大)

11.7 すべての自然数  $n$  に対して、次の等式が成立することを証明せよ。(53 東北大)

$$(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$$

11.8  $y = \cos^{-1} x$  がある。これについて答えよ。

(1)  $y'$  を求めよ。 (2)  $x, y', y''$  の関係式を表す式を書け。

(3)  $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$  を証明せよ。

(4)  $x = 0$  のときの  $y^{(n)}(0)$  を求めよ。 (54 東農工大)

11.9  $y = \tan^{-1} x$  について、次の問に答えよ。

(1)  $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$  を満たすことを示せ。

(2) (1) の両辺を  $n$  回微分して、 $y^{(n+2)}, y^{(n+1)}, y^{(n)}$  の関係を示せ。

(3) (2) を用いて、 $y^{(n)}(0)$  の値を求めよ。 (54 千葉大)

11.10 テイラーの定理を使って、次式を証明せよ。

(57 熊本大)

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

11.11 (1) 関数  $y = \sin x$  のマクローリン展開における  $x^3$  の項まで求めよ。

(2) (1) を利用して、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (a + bx + cx^2)}{x^3} = d$  ( $d \neq 0$ ) なる  $a, b, c, d$  を求めよ。

(59 広島大)

11.12  $y = f(x)$  が点  $x = a$  を含むある区間で  $(n+1)$  回微分可能であるとき、次式を証明せよ。

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))(x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \quad (60 \text{ 東工大, } 1 \text{ 名工大})$$

11.13 不等式  $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$  を証明せよ。

(61 熊本大)

11.14  $y(x) = \sin^{-1} x$  がある。次の問に答えよ。

(1) グラフを簡略に記せ。 (2)  $y'$  と  $y''$  を求めよ。

(3) 次の式を数学的帰納法で証明せよ。

$$(1-x^2)y^{(n+2)}(x) - (1+2n)xy^{(n+1)}(x) - n^2y^{(n)}(x) = 0$$

11.15  $f_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \{(x^2-1)^n\}^{(n)}$  とする。

(1)  $2n$  次の多項式  $(x^2-1)^n$  の  $k$  次の項の一般式を書け。

(2)  $f_n(0)$  を求めよ。 (3)  $\frac{f_{n+2}(0)}{f_n(0)}$  を求めよ。

(62 東北大)

11.16  $F_n(x) = e^{-x^2+x} (e^{x^2-x})^{(n)}$  とする。

(1)  $(e^{x^2-x})' = (2x-1)e^{x^2-x}$  を  $n$  回微分して  $F_{n+1}(x) = (2x-1)F_n(x) + 2nF_{n-1}(x)$  を示せ。

(2)  $F_n'(x) = 2nF_{n-1}(x)$  を示せ。

(3)  $F_n''(x) + (2x-1)F_n'(x) - 2nF_n(x) = 0$  を示せ。

(63 東商船大)

## 4.12 近似式

12.1  $x \approx 0$  のとき、次の近似式を示せ。

(1)  $\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  (47 秋田大)

(2)  $\sqrt{1-x+x^2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}$  (56 東農工大)

(3)  $e^x \cos x \approx 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}$  (2 茨城大)

12.2 次の関数  $f(x)$  を  $x=0$  のまわりで展開し、 $x$  の 3 次式で近似せよ。

(1)  $\sqrt[3]{1+x}$  (55 山梨大) (2)  $4^x$  (55 山梨大)

12.3  $-1 < x < 1$  のとき、 $(1+x)^m$  を  $x$  の  $n$  次の整式で近似せよ。 (56 東理大)

12.4  $f(x) = \cos x$  で、 $\cos x$  の近似式が  $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  とするとき、誤差が  $\frac{x^6}{6!}$  より小さくなることを示せ。 (58 熊本大)

12.5 関数  $\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$  について、 $x$  が十分に小さいときの近似式を求め、次に  $x \rightarrow 0$  の極限を求めよ。 (58 佐賀大)

12.6  $|x|$  が小さいとき、 $\sin x$  を  $x - \frac{x^3}{3!}$  と近似したときの誤差が  $\frac{|x|^5}{5!}$  以内になることを証明せよ。 (60 熊本大)

12.7  $0 \leq x \leq \pi$  で定義された三つの関数

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{について、}$$

(1)  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ であることを証明せよ。

(2) 三つの関数のグラフの概形を一つの図にまとめて書け。

(3)  $\cos x$  の近似式として  $1 - \frac{x^2}{2}$  を採用したとき、 $0 \leq x \leq 0.2$  での誤差は、およそいくら以下であるかを概算せよ。 (63 図情大)

## 4.13 テイラー展開

13.1 次の等式を証明せよ。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad (61 \text{ 佐賀大})$$

13.2 次の関数を  $x=0$  のまわりで展開せよ。

(1)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  (56 広島大) (2)  $\sin^{-1} x$  (56 広島大)

(3)  $\log(1+x)$  (54 秋田大) (4)  $\sin x$  (1 東農工大)

13.3 次の関数  $f(x)$  をマクローリン展開せよ。その収束域を求めよ。

(1)  $\frac{x}{x^2+1}$  (51 信州大) (2)  $\log(x + \sqrt{1+x^2})$  (52 電通大)

(3)  $\log(1-x)$  (58 広島大) (4)  $\frac{1}{(1-x)^2}$  (58 広島大)

(5)  $\frac{1}{(1-x)^3}$  (58 広島大) (6)  $\log(1+x)$  (60 東農工大)

(7)  $\sin 3x + x \cos 2x$  (63 東商船大)

13.4  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  について

(1)  $f^{(n)}(0)$  を求めよ。 (2) マクローリン展開を求めよ。 (52 信州大)

13.5  $f(x) = \log(1+x)$  の  $n$  次導関数および  $x=0$  におけるテイラー展開を求めよ。  
(58 徳島大)

13.6 次の等式を証明せよ。  
(59 都立大)

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (|x| \leq 1)$$

次にこの式を利用して円周率  $\pi$  を精密に計算する方法を示せ。

13.7  $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$  ( $-1 < x \leq 1$ ) であることを利用して

(1)  $-\log(t-1) + 2\log t - \log(t+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nt^{2n}} \quad (t > 1)$  を示せ。

(2)  $2\log 3 - \log 2$  を小数第三位まで計算せよ。  
 $\left( \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{nt^{2n}} < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{kt^{2n}} \text{ に注意} \right)$   
 (60 東商船大)

13.8  $f(x) = e^{\sqrt{3}x} \sin x$  とするとき、 $f^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x} \sin(x + \frac{n\pi}{6})$  を示し、 $f(x)$  のマクローリン展開を求めよ。  
(61 東商船大)

13.9  $\sqrt{1-x}$  のマクローリン展開で  $x^2$  の項まで求めよ。  
N-61

13.10  $\log(1+x)$  のテイラー展開で、 $x^5, x^6$  の係数はいくらか。  
N-62

13.11  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \log(\sqrt{1+x^2} + x)$  とする。

(1)  $(1+x^2)f'(x) + xf(x) = 1$  を示せ。

(2) (1) の式を  $n+1$  回微分して、次の式を示せ。

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+3)xf^{(n+1)}(x) + (n+1)^2f^{(n)}(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

(3)  $f^{(n)}(0)$  を求め、 $f(x)$  をマクローリン展開せよ。  
(62 東商船大)

13.12 関数  $f(x) = \frac{x}{1-x}$  について、次の問に答えよ。

(1) グラフの概形を示せ。 (2) これを級数展開し、それが収束するような  $x$  の範囲を示せ。

(3)  $f'(x)$  の級数展開式を示し、それが収束するような  $x$  の範囲を示せ。  
(62 図情大)

13.13 関数  $f(x)$  のテイラー展開 (マクローリン展開) を書け。  
(62 東農工大)

13.14 次のものを行え。

(1)  $f(x)$  の  $x=a$  におけるテイラー展開をせよ。

(2)  $e^x$  の  $x=0$  におけるテイラー展開をせよ。

(3)  $\cos x$  の  $x=0$  におけるテイラー展開をせよ。  
(62 宮崎大)

13.15 関数  $\sin x$  の Taylor 展開が、次式で表されることを用いて、関数  $\cos x$  の Taylor 展開を求めよ。  
(63 都立大)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

13.16  $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$  のとき、下の関係が成り立つ  $x, y$  を求めよ。

$$\sin(k\theta) = \frac{\sin(x\theta) \sin(y\theta)}{\sin \theta/2} \quad (1 \text{ 阪大基})$$

13.17 (1)  $\frac{1}{1-t}$  のテイラー展開せよ。

(2)  $\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$  であることと (1) の結果を利用して  $\tan^{-1} x$  のテイラー展開をせよ。  
(2 東農工大)

## 4.14 総合問題

14.1 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  において、

(1) 傾き  $m$  の接線の方程式  $y = mx + c$  の  $c$  を  $a, b, m$  の式で表せ。

(2) 直交する 2 接線の交点の軌跡を求めよ。

(3) 楕円に外接する長方形の最大面積を求めよ。

(55 東大)

14.2 正の数  $z$  に対する正の三乗根  $\sqrt[3]{z}$  を数値的に求めるための漸化式

$$x_n = x_{n-1} - F(x_{n-1})$$

を、 $f(x) = x^3 - z$  とおいて  $f(x_0) > 0$  なる  $x_0$  から初めて、一般に

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$$

と  $x$  軸との交点  $x = x_n$  を求めるとの方針の下に作れ。また、このとき、数列  $\{x_n\}$  は単調に減少して、所望の根  $\sqrt[3]{z}$  に収束することを証明せよ。

(60 図情大)



## 第5章 積分法

### 5.1 不定積分

#### 1.1 次の関数の原始関数はどんな関数か。

(1)  $\log x$  (63 九州大)

#### 1.2 次の関数の不定積分を計算せよ。

(1)  $\frac{2x^2}{x^2-1}$  (55 東農工大)

(3)  $\frac{x}{x^2-16}$  (57 東農工大)

(5)  $xe^x$  (60 北大)

(7)  $\frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}}$  (63 信州大)

(9)  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$  (1 佐大)

(11)  $\log_a x$  (1 佐大)

(13)  $\frac{e^x}{e^x+1}$  (2 都立大)

(2)  $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$  (55 東農工大)

(4)  $x^2\sqrt{1-x^2}$  (59 熊本大)

(6)  $\frac{1}{x} \log x$  (61 佐賀大)

(8)  $(1+e^x)^{-2}$  (1 千葉大)

(10)  $\sqrt{x^2-x^3}$  (1 愛媛大)

(12)  $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$  (1 佐大)

#### 1.3 次の関数の不定積分を計算せよ。

(1)  $\tan^4 x \sec^2 x$  (54 都立大)

(3)  $e^{3x} \sin 2x$  (57 東農工大)

(5)  $(\log x)^2$  (59 61 佐賀大)

(7)  $\frac{1}{1-\cos^2 x}$  (57 東農工大)

(9)  $\frac{1}{2+\cos x}$  (60 東農工大)

(11)  $\frac{1}{\sin x + \cos x}$  (63 東商船大)

(13)  $x^2 \cos x$  (2 都立大)

(2)  $x \tan^2 x$  (55 都立大)

(4)  $e^{-x} \sin x$  (59 佐賀大)

(6)  $e^{-x} \cos x$  (61 佐賀大)

(8)  $e^{ax} \sin bx$  (62 三重大)

(10)  $(\sin x \cos x)^{-1}$  (61 東農工大)

(12)  $x \sin 3x$  (1 佐大)

(14)  $x \cos x \sin x$  (2 茨城大)

#### 1.4 次の関数の不定積分を計算せよ。

(1)  $\sin^{-1} x$  (60 北大)

(3)  $\sec^{-1} x$  (1 佐大)

(2)  $\tan^{-1} x$  (62 佐賀大)

#### 1.5 次の関数の不定積分を計算せよ。

(1)  $\frac{\sqrt{1-x}}{x^2}$  (55 東農工大)

(3)  $\frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$  (1 東農工大)

(2)  $\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}$  (59 都立大)

(4)  $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$  (63 名工大)

#### 1.6 次の関数の不定積分を計算せよ。

(1)  $\frac{5x^2+3x+4}{x^3+x^2+x+1}$  (57 東農工大)

(3)  $\frac{2x+1}{x(x+1)(x+2)}$  (58 都立大)

(5)  $\frac{4x+19}{(x^2+4)(x+1)^2}$  (61 金沢大)

(2)  $\frac{5}{x^4-3x^2-4}$  (57 東農工大)

(4)  $\frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}$  (59 名工大)

(6)  $\frac{4x+19}{(x^2+4)(x+1)}$  T-61

$$(7) \frac{1}{(x-1)(x-2)} \quad \text{N-62}$$

$$(8) \frac{x^2}{x^4-1} \quad (63 \text{ 信州大})$$

$$(9) \frac{x^6}{x^4-1} \quad (2 \text{ 東農工大})$$

$$(10) \frac{3x}{x^2-x-2} \quad (2 \text{ 佐賀大})$$

$$(11) \frac{x^3-x+4}{(x-1)(x-2)} \quad (2 \text{ 茨城大})$$

1.7  $I_n = \int (\log x)^n dx$  とするとき、 $I_n$  の漸化式を求め、これを用いて  $I_4$  を計算せよ。  
(57 理大( )数)

1.8 (1)  $\cot \frac{x}{2} = t$  であるとき、 $\sin x$ 、 $\cos x$  および  $\frac{dx}{dt}$  を  $t$  で表せ。

(2) 不定積分  $\int (1-\cos x)^{-1} dx$  を求めよ。 N-60

1.9 次の  $I_n$  についての漸化式を求めよ。 (61 東商船大)

$$(1) I_n = \int x(\log x)^n dx \quad (n \geq 1)$$

$$(2) I_n = \int \frac{dx}{\cos^{2n} x} \quad (n \geq 1)$$

## 5.2 定積分

2.1 次の積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^3 \sqrt{3-t} dt \quad (55 \text{ 群馬大})$$

$$(2) \int_0^t \cos 2x dx \quad \text{T-60}$$

$$(3) \int_0^1 (x^2-x+1)^{-1} dx \quad (61 \text{ 東農工大})$$

$$(4) \int_1^2 \sin^2 \pi x dx \quad (61 \text{ 熊本大})$$

$$(5) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx \quad (61 \text{ 佐賀大})$$

$$(6) \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+t} \quad (62 \text{ 図情大})$$

$$(7) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \quad (63 \text{ 九州大})$$

$$(8) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx \quad (63 \text{ 図情大})$$

$$(9) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx \quad \text{N-1}$$

$$(10) \int_0^2 \frac{\sqrt[4]{x}}{4+4\sqrt{x}} dx \quad (2 \text{ 九州大})$$

2.2 次の積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^1 x \log x dx \quad (53 \text{ 東農工大})$$

$$(2) \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad (60 \text{ 千葉大})$$

$$(3) \int_1^3 \log x dx \quad \text{N-63}$$

$$(4) \int_0^1 x \sin \frac{\pi}{2} x dx \quad (62 \text{ 九州大})$$

$$(5) \int_0^t x \sin x dx \quad \text{T-62}$$

$$(6) \int_0^2 x e^{\pi/2} dx \quad \text{T-63}$$

$$(7) \int_1^2 x \log x dx \quad \text{T-1}$$

2.3 次の積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{\pi/2} (2-\cos x)^{-1} dx \quad (58 \text{ 東農工大})$$

$$(2) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{3+\tan x} \quad (63 \text{ 信州大})$$

2.4 次の積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{a^2 + \cos^2 x} dx \quad (53 \text{ 山梨大})$$

2.5 次の積分の値を求めよ。

$$(1) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} \quad (61 \text{ 東商船大})$$

2.6 次の積分で表されている関数を ( ) の変数で微分せよ。

$$(1) \int_0^{x^2} f(t) dt \quad (x) \quad \text{N-59} \quad (2) \int_0^t f(t, x) dx \quad (t) \quad (62 \text{ 北大})$$

$$(3) \int_{kx}^{x^2-kx} f(kt) dt \quad (x) \quad (63 \text{ 東大})$$

2.7 区間  $[a, b]$  で  $f(x), g(x)$  が連続ならば、

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

が成立することを証明せよ。また、等号はどんなときに成立するか。 (46 信州大)

2.8  $f(x)$  は  $x$  の連続関数で、定数  $a > 0$  に対し、 $f(x) = f(a/x)$  であるとき、

$$\int_1^a \frac{f(x)}{x} dx = 2 \int_1^{\sqrt{a}} \frac{f(x)}{x} dx \text{ を証明せよ。} \quad (55 \text{ 岩手大})$$

2.9 定積分  $\int_0^1 \frac{x^n}{x^4 + 4x^2 + 3} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3)$  を求めよ。 (58 東北大)

2.10  $P(x)$  が 3 次の整数であるとき、

$$\int_a^b P(x) dx = (b-a) \left\{ P(a) + P(b) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\}$$

であることを示せ。 (59 図情大)

2.11 関数  $f(x)$  は 2 回微分可能で  $f''(x)$  は連続であり、 $f(0) = f'(0) = 0$  とする。このとき、次の問に答えよ。

$$(1) f(x) = \int_0^x (x-t)f''(t) dt \text{ であることを示せ。}$$

$$(2) |f''(x)| \leq x \quad (0 < x) \text{ ならば、} |f(x)| \leq \frac{x^3}{3!} \text{ であることを示せ。} \quad (63 \text{ 鹿大})$$

2.12 (1)  $y = x \sin x$  のグラフの概形を書け。ただし、 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

$$(2) \int_0^{\pi/2} x \sin x dx \text{ を求めよ。} \quad (63 \text{ 徳島大})$$

### 5.3 パラメータを含む定積分

$$3.1 \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq \frac{1}{n} \\ n(1-n|x|) & |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

(1)  $n = 1$  のときのグラフを書け。

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \text{ を求めよ。}$$

$$(3) F_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-kx} dx \text{ を求めよ。} \quad \text{N-53}$$

3.2 次の関数のグラフを書け。 (57 千葉大)

$$y(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x \cos \theta}{\sqrt{x^2 + 2x \sin \theta + 1}} d\theta$$

$$3.3 \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left( 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \right) \\ 2n - n^2 x & \left( \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \right) \\ 0 & \left( x < 0, \frac{2}{n} < x \right) \end{cases} \text{ について、次の問に答えよ。}$$

(1)  $y = f_n(x)$  のグラフを書け。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$  を示せ。 (59 電通大)

$$3.4 \quad f_n(x) = \begin{cases} n(n-1)x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{n}\right) \\ 2(n-1) - n(n-1)x & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{2}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases} \text{ とするとき、}$$

(1)  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 f_n(x) dx \right)$  を求めよ。

(2)  $J = \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$  を求めよ。 (59 金沢大)

3.5  $m, n$  を自然数であるとき、次の積分を計算せよ。

(1)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx$

(2)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx$

(3)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx$

(1 長崎大)

3.6  $P_m(x) = \frac{1}{2^m} m! \{(x^2 - 1)^m\}^{(m)}$  とするとき、次の積分の値を求めよ。 (1 長崎大)

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx$$

3.7  $m, n$  が自然数または 0 であるとき、次の積分を求めよ。 (1 佐賀大)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x \cdot \cos(m-n)x dx$$

3.8 (1)  $f(\alpha) = \int_0^1 |x^2 - \alpha^2| dx$  を計算せよ。

(2)  $f(\alpha) = \frac{1}{4}$  のとき、 $\alpha$  の値を求めよ。

T-2

## 5.4 漸化式による定積分

4.1 次の積分の値を求めよ。

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \quad (61 \text{ 徳島大})$$

4.2 次の値を求めよ。

(50 電通大)

(1)  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right]^2$

4.3  $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$  なるとき、漸化式  $I_{m,n} = \frac{n I_{m,n-1}}{m+n+1}$  を導け。ただし、 $m, n$  は正の整数とする。 (56 北大)

4.4  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$  とするとき、次の問に答えよ。ただし、 $n$  は正の整数である。

(1)  $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$  を示せ。

(2)  $I_2$  を求めよ。

(3)  $I_n$  を用いて  $I_{n+2}$  を表せ。

(4)  $I_n$  を求めよ。

(57 東北大)

4.5  $I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$  ( $n$  は自然数) とする。

(1)  $I_1$  を求めよ。

(2)  $I_n = e - nI_{n-1} \quad (n \geq 2)$  を示せ。

(3) (1), (2) の結果を用いて  $I_4$  を求めよ。

(62 東商船大)

4.6  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$  とすると、 $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$  が成立することを証明せよ。また、 $I_n$  はどうなるか。

(2 山口大)

## 5.5 広義積分

5.1 次の積分の値を求めよ。

(1)  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4} \quad (a > 0)$  (56 電通大 61 徳島大)

(2)  $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 4e^{-x} + 5}$  (56 電通大)

(3)  $\int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx$  (57 徳島大)

(4)  $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x - 1}}$  (57 熊本大)

(5)  $\int_1^\infty \frac{1}{x} (1 + x^2) \, dx$  (59 東農工大)

(6)  $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$  (60 東商船大)

(7)  $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx$  (61 佐賀大)

(8)  $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3}$  (62 東商船大)

(9)  $\int_0^\infty x e^{-ax} \, dx \quad (a > 0)$  (62 図情大)

(10)  $\int_0^\infty x e^{-x} \, dx$  (62 63 東商船大, 63 図情大) (11)  $\int_0^\infty x e^{-2x} \, dx$  N-63

(12)  $\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \log(1 + a^2 x^2) \, dx$  (1 山口大)

5.2 次の積分の値を求めよ。

(1)  $\int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) \, dx$  (59 佐賀大)

(2)  $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$  (62 図情大)

(3)  $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{2x-x^2}} \, dx$  (62 図情大)

(4)  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$  (63 信州大)

5.3 次の積分の値を求めよ。

(1)  $\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} \, dx$  (56 東農工大)

(2)  $\int_{-1}^3 \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \, dx$  (62 東農工大)

5.4  $I_{m,n} = \int_0^1 x^n (\log x)^m \, dx$  を求めよ。 (51 東農工大)

5.5  $\int_0^\infty e^{-x} |\sin x| \, dx$  は収束するか発散するか調べよ。もし収束するならその値を求めよ。

(58 金沢大)

5.6  $y = e^{-ax} \quad (a > 0)$  において、

(1) グラフの概形を書け。

(2) 曲線上の点 P より  $x$  軸に下ろした垂線の足を Q、点 P における接線と  $x$  軸との交点を R とするとき、QR の長さを求めよ。

(3)  $\int_0^\infty e^{-ax} \, dx, \int_0^\infty x e^{-ax} \, dx$  を求めよ。 (60 東北大)

5.7  $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x} \, dx$  がある。次のものを求めよ。

(1)  $I_1$  (2)  $I_{2n+1} - I_{2n-1}$  (3)  $I_{2n+2} - I_{2n}$  (4)  $I_{2n-1}$  (61 東北大)

5.8 積分  $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} \, dx$  を求めよ。ただし、 $n$  は自然数。 (62 電通大)

- 5.9 関数  $f(x)$  が  $[0, 1]$  で連続であるとき、次の式を証明せよ。 (2 愛媛大)

$$\int_0^\pi f(\sin \theta) d\theta = 2 \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

## 5.6 特殊関数

- 6.1  $\int_0^1 t^m (1-t)^n dt = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$  であることを示せ。ただし、 $m, n$  は正整数である。 (59 千葉大)

- 6.2  $s > 0$  とし、 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  とおくとき、次の問に答えよ。  
 (1)  $s > 1$  とすれば、 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  が成り立つことを証明せよ。  
 (2)  $\int_0^\infty \alpha e^{-0.5t} t^{s-1} dt = 1$  であるときの  $\alpha$  を求めよ。 (61 東工大)

- 6.3  $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta$  のとき、  

$$xJ_{n+1}(x) - 2nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x) = 0$$
 が成立することを示せ。ただし  $n$  は整数とする。  
 ヒント： $f(\theta) = (\sin(n\theta - x \sin \theta))'$  と置き、右辺の微分を実行した後、両辺を  $\theta$  について 0 から  $\pi$  まで積分してみよ。 (63 千葉大)

- 6.4  $s > 0$  とし、 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  とおくとき、次の問に答えよ。  
 (1)  $s > 1$  とすれば、 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  が成り立つことを証明せよ。  
 (2)  $\Gamma(5)$  を求めよ。 (1 名大)

- 6.5  $m, n$  は自然数で、 $0 \leq p \leq 1$  であるとき、次の関係が成り立つことを証明せよ。  

$$p^{m+1} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}} (1-p)^{n-k} = (m+n+1) \int_0^p x^m (1-x)^n dx$$
 (1 阪大基)

## 5.7 積分の応用 (最大・最小)

- 7.1 空間座標で  $t$  を助変数として  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{ht}{2\pi}$  で与えられる曲線が  $\pi ah = c$  (定数) の関係をもつとき、  
 (1)  $0 \leq t \leq 2\pi$  のときの弧の長さの最小値を  $c$  で表せ。  
 (2) このときの  $a$  と  $h$  の関係を求めよ。 (56 東大)

- 7.2 実数  $x, y$  について  $I = \int_0^{2\pi} (x \cos \theta + y \sin \theta - \theta)^2 d\theta$  を定義するとき、 $I$  を最小にする  $x, y$  を求めよ。また、このときの  $I$  の値を求めよ。 (57 東北大)

- 7.3  $x$  の関数  $G(x) = \int_0^{x^2} e^{-t} \sin t dt$  の最大値、最小値を求めよ。ただし、 $x$  はすべての実数の範囲を動くものとする。 N-59

- 7.4  $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$  とするとき、次の問に答えよ。  
 (1)  $t+s \geq 0$  で  $0 < t < 1$  の領域を  $(s, t)$  平面に図示せよ。  
 (2)  $g(s) = \int_0^1 e^{2t} f(t+s) dt$  とするとき、これを、 $s < -1, -1 \leq s \leq 0, 0 < s$  の場合に分け

て計算せよ。

(3)  $g(s)$  の最大値とその時の  $s$  の値を求めよ。

(62 九州大)

7.5 半径が 1 である球に内接する円柱で体積が最大になるときの体積を求めよ。 (2 愛媛大)

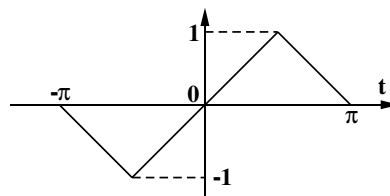
## 5.8 積分の応用 (図形)

8.1  $f(t)$  は図のような関数とする。これを関数

$$g(t) = a \sin t + b \sin 2t$$

で近似するとき、誤差  $E$  が最小になるような  $a, b$  を求めよ。

また、そのときの  $E$  も求めよ。ただし、



$$E = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \{f(t) - g(t)\}^2 dt}{\int_{-\pi}^{\pi} \{f(t)\}^2 dt}$$

(54 東大)

8.2  $f(x) = e^{-x} \sin x$  について、次の問に答えよ。

(1)  $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$  における面積  $S_k$  はいくらか。

(2)  $\sum_{k=0}^n S_k$  を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n S_k$  を求めよ。

(4)  $\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n S_k \right\} \times 0.99 \leq \sum_{k=0}^n S_k$  をみたす最小の  $n$  を求めよ。

(55 北大)

8.3  $y_1 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, y_2 = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$  について、次の問に答えよ。

(1) 二つの曲線のグラフを書け。

(2) 直線  $x = 1, x = a$  によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(56 山梨大)

8.4 サイクロイド  $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) と  $x$  軸とで挟まれた部分の面積を求めよ。

(57 大阪府大 62 東農工大)

8.5 (a) 曲線  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  の極値、変曲点、漸近線を求めて、そのグラフをかけ。

(b) この曲線と  $x^2 = 2y$  とによって囲まれた図形の面積を求めよ。

(58 図情大)

8.6 次の問に答えよ。

(1) 変数  $\zeta, \eta$  が  $0 \leq \zeta \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq \eta \leq 1$  の範囲で変わるとき、極座標で表された点  $P(r, \theta)$

$$r = \left\{ \frac{a(1-\eta)}{2} + \frac{3a(1+\eta)}{2} - 2a \right\} \cos \zeta + 2a$$

$$\theta = \zeta$$

の存在する領域の概形を示せ。ただし、 $a$  は正の定数である。

(2) 上の領域の面積を求めよ。

T-59

8.7 曲線  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  と  $x$  軸、 $y$  軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(60 山口大)

8.8  $t(0 \leq t \leq \pi)$  を媒介変数とする方程式

$$x = 1 - e^{-t}, y = \sin^{2n} t \quad (n: \text{自然数})$$

で表される平面上の曲線を  $C_n$  と  $x$  軸とで囲まれる部分の面積を  $S_n$  とするとき、次の問に答えよ。

(1)  $S_{n-1}$  と  $S_n$  の関係式を求めよ。

(2)  $S_n$  を求めよ。

(61 九州大)

8.9  $2x^2 + 2xy + y^2 = 1$  について、次の問に答えよ。

(1)  $y'$ ,  $y''$  を求めよ。

(2) この曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(62 電通大)

8.10  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) と  $x$  軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

(63 東農工大)

8.11  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  の表す図形の面積を求めよ。

(63 愛媛大)

8.12  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $a > 0$ : 定数) で囲まれる領域の面積を求めよ。

(63 徳島大)

8.13 関数  $y = xe^{x^2}$  について

(1)  $(1, e)$  における接線の方程式を求めよ。

(2)  $y = xe^{x^2}$  と (1) で求めた接線と  $x$  軸により囲まれる部分の面積を求めよ。 (1 徳島大)

## 5.9 積分の応用 (長さ)

9.1 星芒形  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  の一周の長さを計算せよ。

(47 金沢大)

9.2  $x = t^2$ ,  $y = t - \frac{t^3}{3}$  で定義される曲線について

(1) 曲線の概形を描け。

(2) この曲線の閉曲線をなす部分について、その全長を求めよ。

N-53

9.3  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ) は一つの閉曲線である。

(1) この曲線の概形を書け。

(2) この曲線で囲まれる面積を求めよ。

(3) この曲線の長さを求めよ。

(55 57 北大)

9.4  $xy$  平面上に、 $a$  を正の定数として、次式で表される曲線がある。

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

この曲線に関して、次の問に答えよ。

(1) この曲線の  $xy$  平面上での方程式を求め、そのグラフの概略を書け。

(2)  $x$  軸および  $y$  軸とこの曲線との交点をそれぞれ A および B とするとき、曲線の長さ AB を求めよ。

(3) この曲線と  $x$  軸および  $y$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(4)  $x = \frac{a}{2}$  におけるこの曲線の接線の方程式を求めよ。

(58 北大)

## 5.10 積分の応用 (回転体)

10.1 サイクロイド ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) を  $x$  軸の回りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(49 秋田大 60 佐賀大)

10.2 第一象限において円  $x^2 + y^2 = 4$  と双曲線  $xy = 1$  とによって囲まれた図形を  $x$  軸の回りに回転させてできる回転体の体積を求めよ。

(59 北大)



### 10.3 サイクロイド曲線について答えよ。

(1)  $x = r(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = r(1 - \cos \theta)$  を証明せよ。

(2)  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  の範囲の曲線の長さを求めよ。

(3)  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  の範囲の回転体の体積を求めよ。

(2 阪大工)

## 5.11 区区分求積法

### 11.1 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$$

(60 広島大)

11.2 (1)  $\log 2 + \log 3 + \cdots + \log(n-1) < \int_1^n \log x \, dx < \log 2 + \cdots + \log n$  をグラフを使って解け。

(2)  $n \log n - n + 1 < \log n! < (n+1) \log n - n + 1$  を証明せよ。

(58 山口大)

11.3  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right)$  が 0 と 1 の間の数であることを示せ。ただし、 $\log n = \int_1^n \frac{1}{x} \, dx$  を用いよ。

(59 千葉大)

11.4 次式が成り立つことを定積分の定義に基づいて示せ。

(62 都立大)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{f\left(\frac{i}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f(x) \, dx$$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right\}$$

11.5  $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$  とすると

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{n} + \int_{1/n}^1 \log x \, dx < \log a_n < \int_{1/n}^1 \log x \, dx$$

が成立している。

(1) 上式が成り立つことを示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n$  を求めよ。

(3)  $n^n e^{-n+1} < n! < n^{n+1} e^{-n+1}$  となることを示せ。

(1 阪大工)

## 5.12 積分の応用 (物理)

12.1 曲線  $y = \frac{1}{x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) と直線  $y = x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) で囲まれる部分を  $y$  軸の回りに回転してできる容器を考える。この容器に水を 1 秒当たり 1 単位体積ずつ入れてゆく。

(1)  $t$  秒後の高さ  $H(t)$  を求めよ。

(2) 水面の上昇速度  $H'(t)$  を求めよ。

(55 東工大)

## 5.13 積分の総合問題

13.1  $y = \sin^{-1} x$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ) について

(1) グラフを書け。

(2)  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを証明せよ。

(3)  $(1-x^2)y''' - 3xy'' - y' = 0$  が成り立つことを示せ。

(4)  $\int \sin^{-1} x \, dx$  を部分積分法によって求めよ。

T-54

13.2 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  において

(1) 傾き  $m$  の接線の方程式  $y = mx + c$  の  $c$  を  $a, b, m$  の式で表せ。

(2) 直交する 2 接線の交点の軌跡を求めよ。

(3) 楕円に外接する長方形の最大面積を求めよ。

(55 東大)

13.3  $x = 0$  のときは  $f(x) = 1$ ,  $x > 0$  のときは  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  なる関数に対して

$$a_n = (-1)^{n-1} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x) \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおいたときの、次の事項を証明せよ。

(1)  $0 < a_n < \frac{1}{n-1}$

(2)  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

(3)  $\int_0^\infty f(x) \, dx$  の値が存在する。

(58 電通大)

13.4 微分における平均値の定理および積分における平均値の定理について説明せよ。

(58 佐賀大)

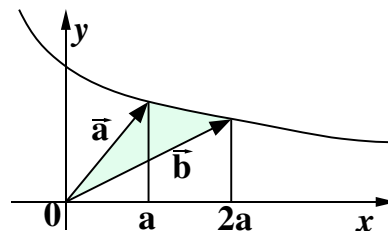
13.5 関数  $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$  がある。

(1) 右の図において  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  を用いて表せ。  
また内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。

(2)  $x = a$  における接線の方程式を求めよ。

また原点から接線に至る距離を求めよ。

(3) 図の斜線の部分を  $x$  軸を中心として回転したときの回転体の体積を求める式とその値を求めよ。



## 第6章 偏微分法

### 6.1 偏微分

1.1 次の関数  $z$  を  $x$  および  $y$  それぞれについて偏微分せよ。

- (1)  $z = (x^2 + y)^3$  T-60 (2)  $z = \log(\sin x + \cos y)$  (61 東商船大)  
 (3)  $z = \sin^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$  (61 東商船大) (4)  $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  N-61  
 (5)  $z = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$  (62 東商船大) (6)  $z = \sin(x \cos y - y \sin x)$  (62 東商船大)  
 (7)  $z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{2x}\right)$  N-2

1.2 次の関数を  $z$  とおくときの  $z_{xx} + z_{yy}$  を求めよ。

- (1)  $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$  (55 大阪府大)  
 (2)  $\log(x^2 + y^2)$  (60 山口大, 60 徳島大, 60 1 広島大)  
 (3)  $\log \sqrt{x^2 + y^2}$  (60 都立大) (4)  $\log(x^2 + y^2)$  (61 佐賀大)  
 (5)  $x^3y + 2x^2y^2 + 5xy^3$  (62 徳島大) (6)  $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$  (63 熊本大)  
 (7)  $e^{ax}(\sin by + \cos by)$  (2 都立科技大)

1.3 次の関数を  $f$  とおくときの  $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$  を求めよ。

- (1)  $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$  (51 信州大, 60 熊本大)

1.4  $z = e^x f(x+y) + e^{-x} g(x-y)$  のとき、 $z_{xx} = z + 2z_y + z_{yy}$  を証明せよ。 (50 電通大)

1.5  $z = f(x, y)$  が  $ax + by$  の関数として表されるとき、 $bz_x = az_y$  が成り立つことを証明せよ。 (55 群馬大)

1.6  $z = f(x, y)$  が連続3回微分可能かつ調和関数 ( $z_{xx} + z_{yy} = 0$ ) であるとき、 $u = yz_x - xz_y$  もまた調和関数であることを証明せよ。 (55 岡大)

1.7  $\partial_{xy} \cos(xy)$  を求めよ。 (57 明大)

1.8  $u(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$  とするとき、 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$  を証明せよ。 (57 広島大)

1.10  $x + y + z = f(x^2 + y^2 + z^2)$  について、次のものを求めよ。

- (1)  $z_x$  (2)  $z_y$  (3)  $(y - z)z_x + (z - x)z_y$  (59 東農工大)

1.11  $z = f(r)$  を  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  の2回偏微分可能な関数とすると、 $z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$  を求めよ。 (60 東商船大)

1.12  $x + y + z = f(x^2 + y^2 + z^2)$  において、次の問いに答えよ。

- (1)  $z_x, z_y$  を求めよ。  
 (2)  $(y - z)z_x + (z - x)z_y = x - y$  を証明せよ。 (61 東農工大)

1.13  $f(x, y) = x^3 a^{\sin y}$  のとき、 $f_x, f_y, f_{xy}$  を求めよ。 (63 信州大)

- 1.14  $u(x, y, z) = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$  であるとき、  
 (1)  $u_x$  を求めよ。  
 (2)  $u_x + u_y + u_z = \frac{3}{x + y + z}$  となることを示せ。 (2 茨城大)

## 6.2 合成関数の偏微分

- 2.1 次の関数から  $\frac{dz}{dt}$  を求めよ。  
 (1)  $z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $x = t + \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  (56 電通大)  
 (2)  $z = f(x, y)$ ,  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$  N-63
- 2.2 次の関数から  $z_u, z_v$  を求めよ。  
 (1)  $z = x^2 + y^2$ ,  $x = 2u - v$ ,  $y = u + 2v$  (56 電通大)  
 (2)  $z = xy$ ,  $x = \log \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $y = \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)$  (63 東農工大)
- 2.3  $z = f(x, y)$ ,  $x = u + v$ ,  $y = uv$  のとき、次式を証明せよ。 (52 茨城大)
- 2.4  $z$  は  $x$  と  $y$  の関数のとき、 $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  であるとき、次を証明せよ。  
 $z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{z_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{z_r}{r}$  (57 山梨大, 58 熊本大)
- 2.5  $z$  は  $x$  と  $y$  の関数のとき、 $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  であるとき、次を証明せよ。  
 $(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \frac{(z_\theta)^2}{r^2}$  (57 秋田大, 57 58 熊大)
- 2.6  $u = 2x + 3y$ ,  $v = 4x - 5y$ ,  $z = f(u, v)$  があるとき、 $z_u, z_v$  を  $z_x, z_y$  で表せ。 (59 山口大)
- 2.7  $z = f(x, y)$ ,  $x = \cos \phi - \rho \sin \phi$ ,  $y = \sin \phi + \rho \cos \phi$  のとき、次の等式を証明せよ。  
 $z_{xx} + z_{yy} = z_{\phi\phi} + z_{\rho\rho}$  (59 熊本大)
- 2.8  $z = f(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + 2y^2}$  であれば、 $z_{xx} + \frac{z_{yy}}{2} = f''(r) + \frac{f'(r)}{r}$  が成立することを示せ。  
 (1 愛媛大)

## 6.3 連続と偏微分

- 3.1  $f(x, y) = \begin{cases} x + y + \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{cases} \quad (x = y = 0)$  について (53 東農工大)  
 (1)  $f_x(0, 0)$  を求めよ。 (2) この関数は原点において連続か否かを調べよ。
- 3.2  $f(x, y) = \frac{\log |ax^2 + by^2 - 1|}{x^2 + y^2}$  のとき、  
 (1)  $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$  の値を求めよ。  
 (2)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  が存在するための必要十分条件を  $a, b$  の関係式で表せ。 (55 岡大)
- 3.3  $\Delta u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x - h, y) + u(x, y + h) + u(x + h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y)}{h^2}$  を示せ。  
 ただし、 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$  (59 千葉大)
- 3.4  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  について、原点における連続性と偏微分可能性を調べよ。  
 (59 金沢大)

- 3.5  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(e^{x^2} - e^{y^2})}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  とする。  
 (1)  $f_x(x, y)$  および  $f_y(x, y)$  を求めよ。 (2)  $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$  を求めよ。  
 (3)  $f_{xy}(0, 0)$ ,  $f_{yx}(0, 0)$  を求めよ。

## 6.4 偏微分の応用 1(最大・最小)

4.1 次の関数  $f(x, y)$  の極値を求めよ。

- (1)  $x^4 - x^3 - y^3 + 3x^2y$  (49 東農工大) (2)  $x^3 - 2x^2y + x^2 - y^2$  (50 東工大)  
 (3)  $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 4xy$  (52 東工大) (4)  $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 4xy$  (53 東工大)  
 (5)  $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$  (56 東農工大) (6)  $x^3 + 3xy + y^3$  (57 60 東農工大)  
 (7)  $xy(1 - x^2 - y^2)$  (61 東農工大) (8)  $x^3 + 8y^3 + 12axy$  ( $a \neq 0$ ) (62 熊本大)  
 (9)  $xy(x + 2y - 6)$  (62 東農工大) (10)  $x^3 + 2x^2y + xy^2 - 4xy$  (63 東工大)  
 (11)  $4x^3 - y^3 + 3x^2y + 9y$  (63 東商船大) (12)  $x^2 - xy + y^2 - 3x + y - 2$  (63 信州大)  
 (13)  $x^4 + y^4 - 3(x - y)^2$  (1 東工大) (14)  $x(1 - x^2 - y^2)$  (1 東農工大)

4.2 次の関数  $f(x, y)$  の極値を求めよ。

- (1)  $(x^2 + 2y^2)e^{-x^2 - y^2}$  (58 山口大) (2)  $xe^{-x^2 - y^2}$  (60 電通大)  
 (3)  $\sin x + \sin y + \sin(x + y)$  ( $0 < x, y < \pi$ ) (1 熊本大)

4.3  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$  について

- (1) テーラー展開を利用して  $F(x, y) = f(x + h, y + h) - f(x, y)$  を  $h, k$  の 2 次式で示せ。  
 (2) 極値を求めよ。 (50 東農工大, 50 山梨大)

- 4.4  $f(x, y) = \begin{vmatrix} \sin x & 0 & \sin y \\ 1 & 1 & -\cos y \\ -\cos x & 1 & 1 \end{vmatrix}$  の極値を求めよ。 (50 岡大)

- 4.5 (1)  $x^2 + xy + y^2 = 3$  より  $y', y''$  を求めよ。  
 (2)  $y$  の極値を求めよ。 (55 東農工大)

4.6  $f(x, y) = x^3 - 3axy + y^3$  のとき、

- (1)  $f(x, y)$  の極値を求めよ。 (2)  $f(x, y) = 0$  の極値を求めよ。 (54 山梨大)

- 4.7 (1)  $f(x, y) = \frac{(x-1)^2 + y^2}{2} + \sin \sqrt{x^2 + y^2}$  が極値を持つのは  $(x, y) = (0, 0)$  のときだけであることを示せ。  
 (2)  $x \leq \sin x + \frac{x^2}{2}$  を示せ。  
 (3)  $f(x, y)$  は  $(x, y) = (0, 0)$  で極小値となることを示せ。 (55 電通大)

- 4.8  $x^2 + y^2 - 2xy - 2y - 1 = 0$  で決まる  $x$  の関数  $y$  の極大値、極小値を求めよ。 (56 東農工大)

- 4.9  $f(x, y) = x^2 + ay + by^2 + cy^3$  が極値を持たぬ条件を求めよ。 (58 電通大)

## 6.5 偏微分の応用 2(最大・最小)

5.1 与えられた条件のもとに関数  $f$  の最大値または最小値を求めよ。

- (1)  $x + y + z = 9$  :  $f = xyz$  (59 佐賀大)  
 (2)  $x^2 + y^2 = 1$  :  $f = x^2 + 2xy + y^2$  (2 徳島大)

5.2  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  における関数  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - xz + yz + zx$  の最大、最小を求めよ。  
(52 電通大)

5.3  $x, y, z \geq 0$  で  $x + y + z = 1$  とする。このとき

$$H(x, y, z) = -\{x \log x + y \log y + z \log z\}$$

の最大値および最小値となる値  $x, y, z$  を求めよ。ただし、 $\log$  の底を 2 とする。(50 東工大)

5.4  $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$  の範囲を  $x, y$  が動くとき、

$$z = x + y + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$$

の最大値および最小値を求めよ。

N-60

5.5 正数  $m, n, p$  が与えられている。このとき、与えられた正数  $a$  を 3 つの正数  $x, y, z$  にわけて  $x^m, y^n, z^p$  が最大になるようにせよ。  
(61 広島大)

5.6 点  $(x, y)$  が  $x^2 + y^2 = 1$  上を動くとき、 $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$  の最大値と最小値  $\lambda$  は、次の 2 次方程式の根であることを証明せよ。  
(2 熊本大)

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

## 6.6 偏微分の応用 (図形)

6.1 (1)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  の極値を求めよ。

(2)  $x = \pm 1, y = \pm 1$  を頂点とする四辺形の辺上の点  $(x, y)$  が変化すると、関数  $f(x, y)$  はどのように変わるか。

(3) 集合  $D : |x| \leq 1, |y| \leq 1$  における  $f(x, y)$  の最大値、最小値を求めよ。(50 岡大)

6.2  $n$  個の点  $P_i(x_i, y_i)$  があり、点  $P(x, y)$  との各点間の距離の 2 乗の和が最小となる点はどんな点か。  
N-56

6.3 半径  $a$  の球がある。この球に含まれる (外部にはみでない) 直円柱のうち、表面積  $S$  と体積  $V$  の比  $S/V$  が最小となるものを求めよ。  
N-58

6.4 三角形の 3 辺の長さをそれぞれ  $a, b, c$  とする。この三角形の内部の一点から、3 辺に下ろした垂線の長さをそれぞれ  $x, y, z$  とするとき、 $xyz$  の最大値を求めよ。(58 図情大)

6.5 縦、横、高さが  $x, y, z$  の直方体がある。 $x, y, z$  の和は 6 で、表面積は 18 である。

(1)  $x$  のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 直方体の体積の最大のものを求めよ。(59 東大)

6.6 表面積 1 の直方体の最大体積を求めよ。(60 東工大)

6.7 平面上の四角形 ABCD がある。辺  $AB=10, BC=5, \angle D = \frac{\pi}{3}$  のとき、この四角形の面積が最大となるときの  $\angle B$  を求め、その面積を求めよ。(61 東大)

6.8 半径  $a$  の円の周上に 3 点 P, Q, R がある。このとき、2 つのベクトル  $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$  の内積の最小値を求めよ。  
N-61

6.9 直方体の辺  $x, y, z$  の和が一定 ( $k$ ) のとき、表面積の最大値を求めよ。(62 都立大)

6.10 3 点 A, B, C があ、点  $P(x, y)$  のまわりに  $\frac{\pi}{3}$  回転させたときの像を  $A', B', C'$  とする。

$$\triangle AA'P + \triangle BB'P + \triangle CC'P$$

の面積が最小となるときの  $P(x, y)$  を求めよ。(63 東大)

6.11 半径  $r$  の定円に内接する三角形のうち、三角形の面積が最大となるのは、正三角形であることを示せ。 (1 阪大工)

6.12 一辺の長さが 2 である正三角形の内部の点から、それぞれの辺に引いた垂線の長さを  $x, y, z$  とする。このとき、

$$I = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

の最小値を求めよ。 (1 電通大)

## 6.7 テイラー展開

7.1 次の関数  $f(x, y)$  の  $(0, 0)$  における  $x, y$  についてのテイラー展開を求めよ。

(1)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$  (56 東工大) (2)  $e^{ax} \cos by$  (61 金沢大)

7.2  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  のとき、 $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta g}{g}}{2}$  となることを証明せよ。 (62 三重大)

## 6.8 総合問題

8.1  $\log \sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  であるとき、

(1)  $\frac{dy}{dx}$  を求めよ。 (2)  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を求めよ。

(3) 与式を極座標で表し、 $x, y$  直交座標でそのグラフを描け。 (2 山口大)

## 第7章 重積分法

### 7.1 重積分の計算

#### 1.1 次の2重積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} x \sin(x+y) dx dy \quad (57 \text{ 広島大}) \quad (2) \int_0^1 dx \int_x^1 \sin^2 \pi y dy \quad (61 \text{ 熊本大})$$

$$(3) \int_0^2 dx \int_0^x xy^2 dy \quad (62 \text{ 徳島大})$$

#### 1.2 次の2重積分の積分順序を変更せよ。

$$(1) \int_0^2 dx \int_{x^2/4}^{3-x} f(x, y) dy \quad (56 \text{ 東農工大})$$

#### 1.3 次の2重積分を計算せよ。

$$(1) x^2 + y^2 \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1 \quad (50 \text{ 東工大})$$

$$(2) xy \quad D: y \leq \sqrt{x}, y \geq 0, x \leq 1 \quad (58 \text{ 東農工大})$$

$$(3) x + y^2 \quad D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{1}{x+1} \quad (60 \text{ 東農工大})$$

$$(4) 1 + x + y \quad D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \quad (60 \text{ 徳島大})$$

$$(5) x\sqrt{y} \quad D: y \leq 2x, y \leq -x + 3, y \geq 0 \quad (60 \text{ 都立大})$$

$$(6) xy \quad D: x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, x - y + 2 \geq 0, y \geq 0 \quad (62 \text{ 横浜国大})$$

$$(7) \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad D: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x \quad (63 \text{ 東農工大})$$

$$(8) x^2 y \quad D: x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x \leq y \leq 1 \quad (1 \text{ 広島大})$$

$$(9) x \quad D: x^2 + y^2 \leq 4, x + y \leq 2 \quad (1 \text{ 長崎大})$$

$$(10) x^2 + y^2 \quad D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \quad (2 \text{ 千葉大})$$

#### 1.4 次の関数を領域 $D$ で2重積分せよ。

$$(1) \sqrt{x} \quad D: x^2 + y^2 \leq 1 \quad (50 \text{ 電通大})$$

$$(2) 1 - x^2 - y^2 \quad D: x^2 + y^2 \leq 1 \quad (53 \text{ 東農工大})$$

$$(3) x^2 + y^2 \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0 \quad (60 \text{ 東工大})$$

$$(4) 1 + x \quad D: x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0 \quad (60 \text{ 東工大})$$

$$(5) xy \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \quad (60 \text{ 広島大})$$

$$(6) e^{-(x^2+y^2)} \quad D: x^2 + y^2 \leq 1 \quad (61 \text{ 千葉大})$$

$$(7) x \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, y > 0 \quad (62 \text{ 佐賀大})$$

$$(8) xy \quad D: x^2 + y^2 \leq 4, xy \geq 0 \quad (62 \text{ 宮崎大})$$

$$(9) y^2 \quad D: x^2 + y^2 \leq 1 \quad (63 \text{ 熊本大})$$

$$(10) \left( \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \right)^2 \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2, p, q, \text{const} \quad (63 \text{ 東工大})$$

$$(11) x^2 \quad D: x^2 + y^2 \leq 1 \quad (1 \text{ 電通大})$$

#### 1.5 次の関数を領域 $D$ で2重積分せよ。

$$(1) \sqrt{x^2 + y^2} \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 - 2ax \geq 0 \quad (52 \text{ 東工大})$$

$$(2) \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} \quad D: x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0 \quad (53 \text{ 東工大})$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad D: x^2 + y^2 \leq 1 \quad (56 \text{ 東農工大})$$



- (4)  $1+x^2+y^2$   $D: (x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2, x \geq 0$  (56 電通大)
- (5)  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$   $D: x^2+y^2 \leq 1$  (62 千葉大)
- (6)  $\sqrt{x^2+y^2}$   $D: (x-1)^2+y^2 \leq 1$  (62 広島大)
- (7)  $\sqrt{x^2+y^2}$   $D: 2x \leq x^2+y^2 \leq 4$  (62 東農工大)
- (8)  $\sqrt{9-x^2-y^2}$   $D: x^2+y^2 \leq 3x$  (63 信州大)
- (9)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$   $D: x^2+y^2 \leq 1$  (2 東農工大)
- (10)  $xy$   $D: x^2+y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0$  (2 都立科技大)

### 1.6 次の関数を領域 $D$ で 2 重積分せよ。

- (1)  $|x|$   $D: r \geq a, r \leq 2a \sin \theta$  (52 電通大)
- (2)  $|xy|$   $D: 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3$  (55 電通大)
- (3)  $\sin(x+y)$   $D: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \frac{\pi}{2}$  (59 東農工大)
- (4)  $\cos x$   $D: 0 \leq x \leq y \leq 1$  (63 熊本大)

### 1.7 次の 2 重積分を計算せよ。

- (1)  $x^2+y^2$   $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  (57 東農工大 58 2 熊本大)

### 1.8 次の 2 重積分を計算せよ。

- (1)  $y$   $D: x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} \leq 1$  (59 東工大)
- (2)  $x$   $D: 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1$  (59 電通大)
- (3)  $(x-y)^2 + (x+2y)^2$   $D: |x+y| \leq 2, |x+2y| \leq 1$  (61 熊本大)
- (4)  $(x+y)e^{x-y}$   $D: 0 \leq x+y \leq 1, 0 \leq x-y \leq 1$  (2 徳島大)

### 1.9 次の関数を領域 $D$ で 3 重積分せよ。

- (1)  $x+y+z$   $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  (56 山梨大)

## 7.2 重積分

### 2.1 2 変数 $x, y$ の関数 $z = \log \frac{1}{r}$ , $r = \sqrt{x^2+y^2}$ について、次の問に答えよ。

- (1)  $(x, y) = (0, 0)$  を除く任意の  $(x, y)$  に対して、 $z_{xx} + z_{yy} = 0$  の関数を満たすことを示せ。
- (2)  $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq R^2, R > 0\}$  として  $\int_A z \, dx dy$  の値を求めよ。 T-55

### 2.2 次の領域 $D$ において下の 2 重積分を行え。また領域 $D$ を図示せよ。

$$D: x^2 + y^2 \leq 2ax \quad \iint_D |xy| \, dx dy \quad (57 \text{ 東農工大})$$

### 2.3 $y=0, y=x, x+y=2$ で囲まれた領域 $D$ で $f(x, y) = 2xy$ のとき、 $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ を求めよ。

(57 東農工大)

### 2.4 (1) 直交座標 $(x, y)$ を極座標 $(r, \theta)$ に変換するときのヤコビアン $|J|$ を求めよ。

- (2) (1) を利用して  $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx dy$   $\{D \text{ は半径 } a \text{ の円の内部}\}$  を求めよ。 (58 東大)

### 2.5 $z = 2xy$ を $y=0, y=x, x+y=2$ で囲まれる三角形で積分せよ。

(58 徳島大)

### 2.6 直交座標系 $O-xy$ が定義された平面において、通常のように原点 $O$ を極、 $Ox$ を始点とする極座標 $(r, \theta)$ を定める。この極座標による方程式が

$$r = a \cos 2\theta \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, a \text{ は正の定数}\right)$$

- (1) 曲線の概形を書け。

- (2) この曲線で囲まれる部分を  $D$  とするとき、2 重積分  $\iint_D x \, dx dy$  を求めよ。 N-58

2.7  $f(x, y)$  は  $x, y$  の連続関数とする。  $t > 0$  に対し

$$F(t) = \iint_{I_t} f(x, y) dx dy, \quad I_t = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t\}$$

とおくとき、  $F'(t)$  を求めよ。 (59 広島大)

2.8 不等式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  で表される平面の範囲を  $D$  とする (ただし、  $a > 0, b > 0$  とする)。  
次の問に答えよ。

- (1) 連続な関数  $f(x, y)$  に対し、  $D$  上の 2 重積分  $\int_D f(x, y) dx dy$  を考える。この 2 重積分を  
変数変換  $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}$  により、  $u, v$  に関する 2 重積分として表せ。  
(2) 次の 2 重積分を求めよ。 N-59

$$\int_D (x^2 + y^2) \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

2.9  $D : x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$  で  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  のとき

- (1) 点  $(x, y)$  は  $xy$  平面上でどんな図形を描くか。  
(2) ヤコビアン  $J$  を求めよ。  
(3)  $\iint_D xy dx dy$  を求めよ。 (60 山口大)

2.10  $I = \iint_D \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy \quad D : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$

について次の問に答えよ。

- (1)  $I$  を  $r, \theta$  の極座標形式で示せ。  
(2)  $I$  を実際に計算せよ。 (61 東農工大)

2.11 次の積分を計算せよ。 (63 大阪府大)

$$I = \iint_D \max(x^2, y) dx dy \quad D : 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1$$

2.12  $\int_D (x^2 - y) dx dy$  を  $0 \leq x \leq y \leq 1$  の範囲で求めよ。 N-2

## 7.3 広義積分

3.1 次の関数を領域  $D$  で 2 重積分せよ。

- (1)  $\frac{x+y}{x^2+y^2} \quad D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$  (55 東工大)  
(2)  $\frac{1}{(x+y)^{-3/2}} \quad D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  (58 電通大)  
(3)  $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad D : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$  (2 愛媛大)

3.2 次の関数を領域  $D$  で 2 重積分せよ。

- (1)  $\sin^{-1} \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad D : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}$  (56 東工大)  
(2)  $\cos \frac{x-y}{x+y} \quad D : 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq x+y \leq 1$  (57 東工大)

3.3 次の関数を領域  $D$  で 2 重積分せよ。

- (1)  $e^{-(x^2+y^2)} \quad D : x \geq 0, y \geq 0$  (62 千葉大)  
(2)  $\frac{1}{(x^2+y^2)^2} \quad D : x^2+y^2 \geq 1$  (63 東農工大)

3.4  $\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$  ( $D: x^2+y^2 \leq a^2$ ,  $a, p$  は正数) が存在するか、存在するならその値は幾らか。(59 金沢大)

3.5 (1)  $\sin^{-1} \frac{x}{a}$  を積分せよ。

(2)  $\int_0^a \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy dx$  の積分の順序を変更して、この値を求めよ。(60 電通大)

7.4  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

4.1 次の積分値を求めよ。

(1)  $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$  (1 電通大) (2)  $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$  (56 広島大)

(3)  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  (57 山梨大) (4)  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  T-57

(5)  $\int_0^\infty \int_0^\infty (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} dxdy$  (60 千葉大)

4.2 次式を証明せよ。

(1)  $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (56 岩手大)

(2)  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (1 名大)

4.3  $\text{Erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  について

(1)  $x=0$  においてテイラー展開し、収束半径を求めよ。

(2)  $\text{Erf}(1)$  の値を小数点以下第一位まで正確に求めよ。(55 東農工大)

4.4 3次元空間で曲面  $z = \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2\pi}$  がある。いま  $(x, y)$  平面上の領域  $\{(x, y) | x+y \leq a\}$  で上記の曲面下の体積を  $V(a)$  とする。

(1)  $V(a)$  を積分の形で示せ。

(2)  $V(a)$  を  $a$  で微分し、その結果を最も簡単な形で表せ。ただし、 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  である。(56 理科大(Ⅱ)数)

4.5  $D$  を無限領域  $x \geq 0, y \geq 0$  とするとき、 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$  を求めよ。(62 千葉大)

4.6 次の問題に答えよ。

(1) 関数  $e^{-r^2}$  を図1のような半径  $R$  の4分円の領域で2重積分(面積積分)した結果  $I(R)$  を計算せよ。

( $dS = r d\theta dr$ )

(2) 同じ関数を図2の正方形の領域で2重積分した値と  $I(R)$  と  $I(\sqrt{2}R)$  との大小関係を不等式で表せ。

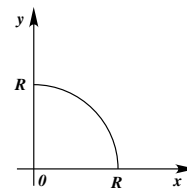


図 1

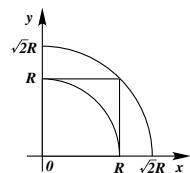


図 2

## 7.5 重積分の応用(体積)

5.1 次のいくつかの曲面・平面で囲まれる部分の立体の体積を求めよ。

(1)  $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $x^2+y^2 \leq 1$  (50 山梨大)

(2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x}{a}$  ( $a > b > c > 0$ ) (51 信州大)

- (3)  $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$  (54 岡大)  
 (4)  $x^2 + y^2 = z, \quad y = z$  (60 熊本大)  
 (5)  $z = x^2 + y^2, \quad z = 2x + 2y + 1$  (56 東工大)  
 (6)  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$  (59 山口大)  
 (7)  $x^2 + y^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad z^2 + x^2 = a^2$  (62 熊本大)  
 (8)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$  (1 東農工大)

## 5.2 次の不等式の表す立方の体積を求めよ。

- (1)  $0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)^{1/4}$  (55 東農工大)  
 (2)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$  (58 熊本大)  
 (3)  $x^2 + y^2 \leq 1, \quad z \geq -y, \quad z \leq 2y$  (60 東工大)  
 (4)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x + y + z \geq 1$  N-61  
 (5)  $x^2 + y^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \leq x + y$  (63 愛媛大)  
 (6)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  (1 佐大)  
 (7)  $x^2 + y^2 \leq ax, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  (1 徳島大)  
 (8)  $x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq y$  N-2

## 5.3 回転楕円体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + z^2 \leq 1 \quad (0 < a \leq 1)$ の $z = -a$ から下の体積と、それを最大にする $a$ を求めよ。

(54 東大)

## 5.4 曲面 $z = a - \sqrt{x^2 + y^2}$ と 2 平面 $x = 0, \quad z = x$ で囲まれる立体の見取り図を書き、その体積を求めよ。

(55 岡大)

## 5.5 $x^2 + y^2 = z$ を図に示し、 $z = y$ とで囲まれる立体の体積を求めよ。

N-56

## 5.6 $(x - 2a)^2 + y^2 \leq a^2, \quad |x| + |z| \leq 1$ で囲まれた部分の立体の体積 $V$ を求めよ。ただし、 $0 < 3a \leq 1$ とする。

N-57

## 5.7 半径 $a$ の球形の容器に水を入れて、水の体積をその水が容器と接する面積で割った値が最大となる水深は幾らか。

(57 東大)

## 5.8 半径 $a$ の円柱が 2 つあって軸が直交している。この時の重なっている部分の体積を求めよ。

(57 1 熊本大)

## 5.9 半径 $r$ 、高さ $h$ の円柱を右図 (略) のように 2 つの平面で切ったとき出来る刃形の立体の体積を求めよ。

(60 東大)

## 5.10 (1) $x^2 + y^2 = z$ が $2x^2 + y^2 = a^2$ で切り取られる曲面を描け。 (2) $z$ を鉛直方向にとった場合に、水の入る量を求めよ。ただし、表面張力は考えないでよい。

N-62

## 5.11 2 定点 $(0, 0, 1), \quad (0, 0, -1)$ からの距離の和が $2a$ であるとき (ただし $a > 0$ ) ,

(1) 方程式を求め、図形の概形を描け。

(2) 図形で囲まれる部分の体積を求めよ。

N-1

## 7.6 重積分の応用 (面積)

### 6.1 次の曲面の面積を求めよ。

(1)  $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  の  $x > 0, \quad y > 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1$  (50 山梨大)

(2)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq b, \quad 0 \leq b \leq a$  (57 山梨大)

- (3) ドーナツ面  $x = (a + b \sin \theta) \cos \phi$ ,  $y = (a + b \sin \theta) \sin \phi$ ,  $z = b \cos \theta$  ( $a > b > 0$ )  
(1 東工大)

(4)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , ( $a, b, c > 0$ )  
(1 佐大)

- 6.2 直交座標系  $O-xyz$  において, 点  $A(a, 0, 0)$  と点  $B(-a, 0, 0)$  と点  $P$  のなす角  $\angle APB = \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ) が一定であるとして, この点  $P$  が作る立体の表面積を求めよ。  
(51 東大)

- 6.3 (1)  $x = au \cos v$ ,  $y = bu \sin v$  が与えられているとき, ヤコビアン

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

を求めよ。

- (2)(1) で求めたヤコビアン (関数行列式) を用いて,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  のグラフの囲む図形の面積を求めよ。  
T-56

- 6.4  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  のとき,  $z \geq b$  の部分の曲面積を求めよ。ただし,  $0 < b < a$   
T-57

- 6.5  $z$  軸を軸とした無限に長い半径 1 の円柱がある。この円柱の  $z \geq 0$ ,  $x + y + z \leq 1$  の部分の側面積を求めよ。  
(59 東大)

- 6.6 直方体  $ABCD-EFGH$  において, 頂点  $A$  を通る平面が  $BF$ ,  $CG$ ,  $DH$  と交わる点をそれぞれ  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  とし, また  $\angle BAB' = \alpha$ ,  $\angle DAD' = \beta$  とすれば, 平行四辺形  $AB'C'D'$  の面積  $S$  が下式で与えられることを証明せよ。

$$S = ab\sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}$$

ただし,  $AB = a$ ,  $AD = b$  である。  
(61 金沢大)

## 7.7 重積分の応用 (物理)

- 7.1  $y = x$  と  $y = x^2$  とで囲まれた図形の重心を求めよ。ただし密度  $\rho$  は一定。  
(50 岡大)

- 7.2 半径  $a$  の半球面  $z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$  の重心  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  を求めよ。ただし, 密度は一定とする。  
(60 東工大)

- 7.3 一様な密度をもち, 半径が  $a$  である半球体の重心の位置を求めよ。  
(63 北大)

## 7.8 総合問題

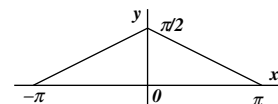
- 8.1 (1)  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $z \leq bx$ ,  $z \geq 0$  で囲まれる立体を図示せよ。  
(2) その立体の体積を求めよ。 (3) その立体の表面積を求めよ。  
(4) 体積が  $V_0$  と決められたとき,  $z = bx$  上の表面積を最大とするような  $a, b$  を求めよ。  
(51 東大)

- 8.2  $f(x, y) = \int_{x-2y}^{x+2y} g(t) dt$  とし,  $g(t)$  は  $C^1$  級とする。

(1)  $f_x(x, 0)$ ,  $f_y(x, 0)$  を求めよ。

(2)  $f_{yy}(x, y) = C f_{xx}(x, y)$  を満たす  $C$  の値を求めよ。

(3)  $g(t) = \cos t$  として, 重積分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  を求めよ。



(62 金沢大)

## 第8章 関数方程式

### 8.1 1階微分方程式

#### 1.1 次の微分方程式を解け。

$$(1)y' = \frac{y}{x(x+1)(x+2)} : y(1) = 1 \quad (57 \text{ 図情大}) \quad (2)y' = 2\sqrt{y} : y(0) = 1 \quad (58 \text{ 東北大})$$

$$(3)y' = y \cos x \quad \text{N-61} \quad (4)e^{x+y} + e^{2e-y}y' = 0 \quad (1 \text{ 佐賀大})$$

#### 1.2 次の微分方程式を解け。

$$(1)y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad (52 \text{ 電通大}) \quad (2)y' = \frac{2y - x}{x} \quad (57 \text{ 秋田大})$$

$$(3)x + yy' = ky \quad (58 \text{ 都立大}) \quad (4)y' = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \quad (62 \text{ 広島大})$$

#### 1.3 次の微分方程式を解け。

$$(1)y' - 2y = e^x \quad (61 \text{ 東大}) \quad (2)y' + \frac{y}{x} = \log x \quad (62 \text{ 徳島大})$$

$$(3)y' - y \tan x = \sin x \quad \text{N-62} \quad (4)(1 + x^2)y' = xy + 1 \quad (63 \text{ 徳島大})$$

$$(5)y' + xy = x \quad (1 \text{ 東農工大}) \quad (6)y' - \frac{y}{x} = x^2 : y(1) = \frac{3}{2} \quad (2 \text{ 千葉大})$$

$$(7)y' + 3y = x^2 + 1 \quad (2 \text{ 北大})$$

#### 1.4 次の微分方程式を解け。

$$(1)(x + y) dx = y dy \quad (57 \text{ 大阪府大})$$

#### 1.5 微分方程式 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ( $n \neq 0, 1$ ) において、未知関数 $y$ 変換 $z = y^{1-n}$ を行なえば、 $z$ を未知関数とする線形微分方程式になることを示せ。これを用いて、次の各微分方程式を解け。

$$(1)y' + \frac{y}{x} = x^2y^2 \quad (55 \text{ 都立大}) \quad (2)y' + \frac{y}{x} = -\frac{x^2y^3}{2} \quad \text{N-56}$$

$$(3)y' - \frac{y}{x-1} + y^2 = 0 \quad (56 \text{ 58 都立大}) \quad (4)y' = \frac{y}{1+xy} \quad (57 \text{ 理科大(II) 数})$$

#### 1.6 微分方程式 $y' + y(y-1) = 0$ において

$$(1) \text{ この方程式の一般解を求めよ。}$$

$$(2) \int_0^1 y dx = y_0 \text{ の条件を満たす解を求めよ。} \quad (51 \text{ 東農工大})$$

#### 1.7 微分方程式 $y' + y = f(t)$ において、次の問に答えよ。

$$(1)f(t) = 0 \text{ のときの一般解を求めよ。}$$

$$(2)f(t) = \cos \omega t \text{ のとき, } y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \text{ とおくことによって特殊解を求めよ。}$$

$$(3) \text{ この方程式の一般解を求めよ。}$$

$$(4)f(t) = \cos t + \cos 3t \text{ のときの特殊解を } \sin t \text{ と } \cos t \text{ の和で示せ。} \quad (56 \text{ 三重大})$$

$$1.8 \quad y' = \frac{1}{\log(2x + y + 3)} - 2 \text{ の一般解を求めよ。} \quad (57 \text{ 東農工大})$$

#### 1.9 次の微分方程式を解け。

$$(p^2 + 1)^2 - (px - y)^2 = 0 \quad (p = y') \quad (57 \text{ 東大})$$

1.10  $x$  の関数  $y(x)$  の導関数  $y'(x)$  が  $x$  によらず次式を満たすとき，以下の問に答えよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x^2 & 2x & 2 \\ 2x^2 & 1 & x & x^2 \\ 2x & x & y' & x \\ 2 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(1)  $y' = \frac{2x^2}{1+x^2}$  であることを示せ。

(2)  $y$  を求めよ。

T-57

1.11  $x' = -kx$  と初期条件  $x(0) = 2$  がある。  $J(k) = \int_0^\infty (1+k^2)x \, dt$  で，  $J(k)$  を最小にするには，  $k$  をいくらにしたらよいか。また，そのときの  $k$  に対して  $x(t)$  のグラフの概略をかけ。

(58 東大)

1.12 微分方程式

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = (4x + y + 2)^2$$

について，次の問に答えよ。

(1)  $4x + y + 2 = u$  とおき，  $(a)$  を  $u$  に関する微分方程式に変換せよ。

(2) (1) の変換を利用して，  $(a)$  の一般解を求めよ。

(3)  $x = 0$  のとき，  $y = 0$  であるような  $(a)$  の解を求めよ。

N-60

1.13  $y = A \sin mx + B \cos mx$  から  $A, B$  を消去して微分方程式を作れ。

T-62

1.14 微分方程式  $xy' = 2y - x$  がある。

(1)  $y = xu$  とおき，  $u$  の方程式に直せ。

(2) 更に  $x = e^t$  とおけば，方程式はどんな形になるか。

(3)  $x = 3$  で  $y = 0$  なる条件を満たす与式の解を求めよ。

(63 九州大)

1.15 一階常微分方程式  $dx + xy \, dy = y^2 \, dxy \, dy$  を  $dx, dy$  で整理し，解曲線が閉曲線となるような解を示せ。

(63 千葉大)

1.16  $y = y(x)$  が  $y' = f(x, y)$  を満たすとき，  $y'', y'''$  を  $f(x, y)$  またはその導関数で表せ。

(1 金沢大)

1.17  $y' = y^2 - 1, y(0) = c$  なる微分方程式の解を，  $c$  を  $-1, 0, 1, 2$  と変化させたときに対応してそれぞれ求めよ。

(1 九大)

1.18  $y' + xy = x^2 - x + 1$  のとき，特殊解が2次以下となることを証明せよ。

(2 都立科技大)

1.19  $2x^2y' - x^2y^2 + 2xy + 1 = 0$  について

(1)  $u = xy$  とおいて，与式を  $u$  の関数で表せ。

(2) (1) の結果を用いて，与式を解け。

N-2

## 8.2 定係数の線形微分方程式 (1)

2.1 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)  $y''' - 3y'' + 4y' - 12y = 0$

(57 千葉大)

(2)  $a^2y^{(4)} = y''$

(59 都立大)

(3)  $y''' + y'' + 4y = 0$

(59 岩手大)

(4)  $y'' - y' - 2y = 0$

T-60, N-62

(5)  $y'' - 5y' + 5y = 0$

N-61

(6)  $y'' + 2y' - 3y = 0$

N-62

## 2.2 次の微分方程式を初期条件のもとで解け。

- (1)  $y''' - y = 0$  :  $y(\infty) = 0$  (55 千葉大)  
(2)  $x'' + 3x' + 2x = 0$  :  $x(0) = 1, x'(0) = 2$  (63 千葉大)  
(3)  $y'' - 2ay' + a^2 = 0$  :  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  (63 東大)  
(4)  $y'' + 3y' + 2y = 0$  :  $y(0) = 1, y'(0) = 1$  (2 千葉大)

## 2.3 次の微分方程式について、次の間に答えよ。

- (1)  $y'' + k^2y = 0$  を解け。  
(2) 3つの条件  $x = 0$  のとき  $y = 0, y' = k$  で、 $x = 1$  のとき値  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$  が与えられている。  
この場合に (1) の与式が恒等的に 0 でない  $k$  の値を求めよ。 T-56

## 2.4 微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を初期条件 $y(0) = \sqrt{3}, y'(0) = -\sqrt{3} - 2$ のもとで解き、解曲線の概形を描け。

(60 電通大)

## 2.5 $y'' + y = 0$ と条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ のときの $y(\pi/2)$ を求めよ。

T-63

## 8.3 定係数の線形微分方程式 (2)

### 3.1 次の微分方程式の特殊解を求めよ。

- (1)  $y'' - 3y' + 2y = x$  (57 千葉大)

### 3.2 次の微分方程式の一般解を求めよ。

- (1)  $y'' + y' - y = xe^{2x}$  (54 都立大) (2)  $(D^2 - 2D + 2)y = x^2 + 1$  N-55  
(3)  $y'' + y = e^x$  (57 理科大 (II) 数) (4)  $y'' + 2y' + 3y = x$  (57 徳島大)  
(5)  $2y'' + 4y' + y = e^{-2x}$  (58 徳島大) (6)  $y'' + y' + y = e^x$  (59 千葉大)  
(7)  $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$  (59 佐賀大) (8)  $y'' + 4y' + 13y = 9e^{4x}$  (60 東農工大)  
(9)  $y'' - 6y' + 8y = e^x$  (62 徳島大) (10)  $y'' - y' - 2y = x + 1$  N-62  
(11)  $y'' - y' - 2y = x^2 + x$  (2 熊本大) (12)  $y'' + y = e^x + 1$  (2 佐賀大)

### 3.3 次の微分方程式の一般解を求めよ。

- (1)  $y'' + y' - 6y = \sin x$  (50 電通大) (2)  $y'' + y' + 2y = \sin x$  N-54  
(3)  $y'' - 2y' + 5y = \sin x$  (55 東工大) (4)  $y'' - 2y' + y = 4 \sin x$  (57 埼玉大)  
(5)  $y'' - 5y' + 4y = \frac{\cos nx}{n^2}$  (60 東工大) (6)  $y'' + 2y' + 5y = \sin x$  (60 電通大)  
(7)  $y'' + 3y' + 2y = \cos x$  (61 徳島大)

### 3.4 次の微分方程式の一般解を求めよ。

- (1)  $y'' - 2y' + 2y = e^{-x} \cos x$  N-58

### 3.5 次の微分方程式の一般解を求めよ。

- (1)  $y'' - 3y' + 2y = e^x$  (56 東工大) (2)  $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$  (59 東工大)  
(3)  $y'' + y' - 2y = e^x$  (61 佐賀大) (4)  $y'' - 5y' + 6y = e^x$  (61 大分大)  
(5)  $y'' + 2y' - 3y = e^x$  N-62 (6)  $y'' + 2y' - 8y = e^{2x}$  (62 東農工大)  
(7)  $y'' - 2y' - 8y = e^{-2x}$  (62 東農工大)

### 3.6 次の微分方程式の一般解を求めよ。

- (1)  $y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x} \cos x$  (56 千葉大) (2)  $y'' - 3y' + 2y = x^2 + e^x \sin x$  (59 東工大)  
(3)  $y'' - 2y' + 2y = 3 \sin x - \cos x$  (60 東工大) (4)  $x'' - x' - 2x = e^{2t} + \sin t$  (1 東工大)

### 3.7 次の微分方程式の一般解を求めよ。

- (1)  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 3e^{2x}$  (52 東工大) (2)  $y''' + 2y'' - 3y' = x^2 e^{-x} + e^x \sin 2x$  (56 東工大)  
(3)  $y''' - 4y'' + 4y' = e^{2x}$  (56 東工大) (4)  $y''' - 2y'' + y' - 2y = 3e^{2x}$  (63 東工大)



3.8 次の微分方程式を初期条件のもとで解け。

- (1)  $y''' - y = 0 : y(\infty) = 0$  (55 千葉大)  
(2)  $x'' + 3x' + 2x = 1 : x(0) = 0, x'(0) = 0$  (62 九州大)  
(3)  $y'' + 3y' + 2y = 2 : y(0) = 0, y'(0) = 0$  (63 千葉大)  
(4)  $u'' - u = e^{2t} : u(0) = a, u'(0) = b$  (1 都立科技大)

3.9  $(D - \alpha)(D^2 + 2\xi D + 1)y = e^{\beta x}$  ( $\alpha, \beta, \xi$  は実数,  $0 < \xi < 1$ ) を解け。ただし,  $D$  は  $x$  の微分演算子である。 (51 東大)

3.10 微分方程式  $y'' + (\alpha - 2)y' + \alpha y = 0$  について

- (1)  $\alpha$  にかかわらず  $x \rightarrow \infty$  のとき,  $y \rightarrow 0$  となる  $\alpha$  の範囲を求めよ。  
(2)  $\alpha = 2$  のとき,  $x = 0$  で  $y = 1, y' = \sqrt{2}$  となる解の概形を求めよ。 (56 東大)

3.11  $y'' + y = \sin ax$  について

- (1) 一般解を求めよ。  
(2)  $a = 1$  のときの特殊解を求めよ。 (60 千葉大)

3.12 微分方程式  $y'' - y = -2\sin x, y(0) = 0, y'(0) = 2$  において  $y = e^x u + \sin x$  とおいて,  $u$  の満たす方程式を求め, 微分方程式を解け。 (62 横浜国大)

3.13 微分方程式  $y'' - 4y' + y = e^{-x} \log x$  がある。

- (1)  $y = e^{-x} \cdot z$  とおいて,  $z$  の微分方程式を求めよ。  
(2) (1) の微分方程式の解  $z$  を求めよ。  
(3) 与式の解を求めよ。 N-63

## 8.4 2階微分方程式

4.1 次の微分方程式の一般解を求めよ。

- (1)  $(1 - x^2)y'' + xy' = ax$  (61 東工大)

4.2 微分方程式  $x^2 y'' + Pxy' + Qy = 0$  において,  $x = e^t$  とおくと,  $y'' + (P - 1)y' + Qy = 0$  と直せることを示せ。さらに次の微分方程式を解け。

- (1)  $x^2 y'' + 3xy' - 3y = 3 \log x - 2$  (50 岡大)  
(2)  $x^2 y'' + xy' + y = 0$  (57 大阪府大)  
(3)  $x^2 y'' + xy' + y = \log x$  N-57  
(4)  $x^2 y'' + 3xy' + y = x$  T-61  
(5)  $x^2 y'' + xy' + y = x$  (1 徳島大)  
(6)  $xy'' + y' = 0$  N-1

4.3 次の微分方程式を解け。

- (1)  $yy'' + (y')^2 = a^2, y(0) = y_0, y'(0) = 0$  (54 東大)  
(2)  $yy'' + 2(y')^2 - 2yy' = 0$  (63 京大 1 東大)  
(3)  $yy'' + (y')^2 = 0$  (1 佐賀大)

4.4 次の微分方程式について、下の問いに答えよ。

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 0 \quad (x > 0)$$

- (1)  $f(x) = x^{-2}$  のとき,  $y = f(x)$  は解となることを示せ。  
(2)  $g(x) = 4x^{-2} \int x^4 \cdot e^{-\log x} dx$  を解いて,  $y = g(x)$  は解となることを示せ。  
(3) (1)(2) の結果から  $f(x), g(x)$  が一次独立であることを証明せよ。 (59 九州工大)

#### 4.5 微分方程式

$$(a) \quad x^2(x+1)y'' - 2x^2y' + x(x-1)y = 0$$

について、次の問いに答えよ。

(1)  $y = x^n$  が微分方程式 (a) の解になるように、 $n$  の値を定めよ。

(2)(1) で定めた  $n$  に対して、 $y = x^n u(x)$  とおく、 $y$  が微分方程式 (a) を満たすためには、関数  $u = u(x)$  はどんな微分方程式を満たさなければならないか。その微分方程式を求めよ。

(3) 微分方程式 (a) の一般解を求めよ。 N-59

4.6 2階常微分方程式  $y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$  において独立変数  $x$  を  $t = \phi(x) = \int_0^x \left[ \exp \left( - \int_0^x P(x) dx \right) \right] dx$  に変換すれば  $t$  に関する1階微分を含まない2階常微分方程式が得られる。このことを利用して次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$y''(x) + (\tan x)y'(x) + (\cos^2 x)y(x) = 0 \quad (1 \text{ 千葉大})$$

#### 8.5 微分方程式の応用 (図形)

5.1  $xy$  平面上に方程式  $y = f(x)$  で表わされる曲線がある。この曲線上の任意の点  $P$  における接線が  $y$  軸と交わる点を  $Q$  とすると、 $P$  と  $Q$  の中点は常に  $x$  軸上にある。このとき、次の問いに答えよ。

(1)  $y = f(x)$  の満足する微分方程式を導け。

(2) この曲線が点  $(2, 1)$  を通るものとして、曲線の方程式を求めよ。 (53 東北大)

5.2  $xy$  平面で曲線  $y = y(x) \geq 0$  上の任意の弧と縦線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積がつねにその弧長に比例しているとき、その曲線の方程式を求めよ。ただし、比例定数を  $k > 0$  とし、 $y(0) = k$  とする。 (55 東北大)

5.3  $xy$  平面上に曲線がある。この曲線上の任意の点  $P(x, y)$  について、次の条件 (c) が成立するとき、この曲線の方程式を求めよ。ただし、 $x > 0$  とする。

(c) 点  $P(x, y)$  におけるこの接線が  $y$  軸と交わる点の  $y$  座標の値が、点  $P$  の  $x$  座標に等しい。

T-59

5.4  $xy$  平面上の直線  $y = ax + b$  は、2点  $(1, 0)$  および  $(-1, 0)$  から下ろした垂線の長さの積が  $k(k > 0)$  に等しい直線である。次の問に答えよ。

(1)  $b$  を  $a$  と  $k$  で表せ。

(2)  $k = 1$  のとき、 $a$  を変えて得られるすべての直線に接する曲線、すなわち、この直線群の包絡線は2次曲線である。この2次曲線の式を求めよ。 (58 東北大)

5.5 法線が点  $(a, b)$  を通る平面上の曲線を求めよ。 (58 徳島大)

5.6 ある関数  $y = f(x)$  があって、この曲線上の点  $P$  での接線が、 $x$  軸、 $y$  軸と交わる点を  $Q$ 、 $R$  とするとき、 $P$  は  $QR$  の中点とする。

(1)  $y = f(x)$  が満たす微分方程式を求めよ。

(2)  $y = f(x)$  が  $(\sqrt{3}, \sqrt{7})$  を通るものとして、この微分方程式を解け。

(3)  $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{10}$  の範囲で、この曲線が  $x$  軸を軸として回転してできる立体の表面積を求めよ。 (59 東北大)

5.7  $y^2 = 4Cx$  について、次の問に答えよ。

(1)  $C = \pm 1$ 、 $C = \pm 2$ 、 $C = \pm 3$  のグラフを描け。

(2)  $C$  を消去して微分方程式を作れ。

(3)(1) のグラフに直交する曲線の式を求め、グラフを描け。 (59 山口大)

5.8 曲線群  $y^2 = cx$  の直交截線を求めよ。 (60 東大)

- 5.9 ある曲線上の点 P における接線が  $x$  軸と交わる点を Q とすると、PQ がつねに長さ  $a$  であるような曲線を求めよ。 (61 東農工大)
- 5.10 平面での曲線上の任意の点 P における接線が直線 OP (O:原点) を原点を中心として  $30^\circ$  回転したものに平行である。次の問に答えよ。  
 (1) 曲線 C 上の点を直交座標  $(x, y)$  で表すとき、曲線 C の満たす微分方程式を求めよ。  
 (2)(1) の微分方程式を極座標  $(r, \theta)$  で表せ。  
 (3) 曲線 C が直交座標の点  $(0, 1)$  を通るとき、曲線 C の方程式を求めよ。 (61 九州大)
- 5.11 (1)  $f(x)$  がある。ある点 P を  $f(x)$  上にとる。そこから  $x$  軸へ下ろした垂線が  $x$  軸と交わる点を H とする。また、点 P を通る  $f(x)$  の法線が  $x$  軸と交わる点を Q とする。QH =  $a$  で一定のとき、 $f(x)$  を求めよ。  
 (2)  $(1, 0)$  を通るとき、 $f(x)$  を求めよ。 (61 東北大)
- 5.12  $c$  をパラメータとして  $x^2 + y^2 = cx$  で与えられる曲線族を考える。  
 (1) この曲線族を一般解としてもつ微分方程式を作れ。  
 (2) この曲線族に直交する曲線を求めよ。 (63 名工大)
- 5.13 (1) ある曲線 C 上の点  $(x_0, y_0)$  における接線の傾きを  $a$  とする。そのときの法線の方程式を求めよ。  
 (2) 曲線 C の任意の点における法線は必ず  $(1, 2)$  を通るといふ。曲線 C の微分方程式を求めよ。  
 (3) 曲線 C は  $y = 3x$  に接するといふ。曲線 C の方程式を求めよ。 (1 九大)

## 8.6 微分方程式の応用 (現象)

- 6.1 半径  $R_0$  のある原子が燃えるとき、球状を保ったまま小さくなる。このとき、体積の減少速度は比例する。時刻  $t$  における原子の半径  $R$  を  $R_0$  と燃え尽きるのに必要な時間  $T$  で表せ。 (53 東大)
- 6.2 ある町の時刻  $t$  における人口を  $y(t)$  とするとき、 $y'/y$  は  $a - y(t)$  に比例する ( $a$  は飽和人口)。このとき、 $y(t)$  を求めよ。ただし、 $t = 0$  のとき、 $y(0) = N$  で比例定数は  $k$  とする。 (55 電通大)
- 6.3  $m\ddot{x} = -k\dot{x} - Rx$  を解け。また減衰振動となる条件を求めよ。 (56 山口大)

## 8.7 級数による解法

- 7.1 微分方程式  $y'' - y = 0$  のべき級数解を  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$  とするとき、以下の問に答えよ。  
 (1) 係数  $a_n$  が満たす漸化式を求めよ。  
 (2)  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$  であるとき、 $a_n$  を求めよ。 T-57
- 7.2 微分方程式
- $$x(x-1)y'' + \{(\alpha + \beta + 1)x - \gamma\}y' + \alpha\beta\gamma = 0$$
- がある。但し、 $\alpha, \beta, \gamma$  は定数である。  
 (1)  $y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n + \cdots$  が上式を満たすように係数を求めよ。  
 (2) この級数の収束半径を求めよ。 (60 東工大)

7.3  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$  の解は  $y = e^x$  であることを用いて、次の問に答えよ。

(1)  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$  を  $y' = y$  に代入して係数  $a_n$  の漸化式を求めよ。

(2) 与えられた関係式  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$  を用いて指数法則  $e^ae^b = e^{a+b}$  を証明せよ。

(60 山口大)

## 8.8 連立微分方程式

8.1 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x' - 3y' = -2y \\ x' - 5y' = -4x \end{cases} \quad (56 \text{ 名工大}) \quad (2) \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 4y \end{cases} \quad (46 \text{ 信州大})$$

$$(3) \begin{cases} y' = 6y + 2z \\ z' = -y + 4z \end{cases} \quad (62 \text{ 横浜国大})$$

8.2 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0 \quad (2 \text{ 徳島大})$$

8.3  $xy$  平面上の動点  $P$  の  $x, y$  座標と時刻  $t$  の間に、次の関係が成立するものとする。

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$$

$t = 0$  において、動点  $P$  が  $A(1, 1)$  に一致するものとして、次の問に答えよ。

(1)  $xy$  平面上を動点  $P$  が動くとき、 $uv$  平面上を動点  $P$  が次の関係に従って動くものとする。

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = -2x + 2y \end{cases}$$

このとき、動点  $P$  の  $u, v$  座標と  $t$  との間には、次の関係が成立することを示せ。

$$\begin{cases} u' = -4v \\ v' = 4u \end{cases}$$

(2)  $x, y$  を  $t$  の関数として求めよ。

T-58

8.4  $a_0 = 1, b_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + b_{n-1}, b_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1}$  として

(1)  $y'' - y' - 6y = a_n - b_n$  を解け。

(2) これと等価な 1 階連立方程式を立てよ。

(3)  $t = 0$  のとき、 $y = 0, y' = 1$  である解を求めよ。

(63 東大)

8.5 2 つの関数  $f(x), g(x)$  に

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = f(x)$$

と初期条件  $f(0) = 1, g(0) = 0$  なる関係がある。次の問に答えよ。

(1)  $f(x), g(x)$  を求めよ。

(2)  $f(x), g(x)$  の  $n$  次導関数を求めよ。

(3)  $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$  を証明せよ。

T-63

## 8.9 行列微分方程式

9.1 行列  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$  がある。

(1)  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$  とするとき、 $AX_1 = X_1$  を満たす  $a$  の値を求めよ。

(2)  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$  とするとき、 $AX_2 = 2X_2$  を満たす  $b$  の値を求めよ。

(3)  $T = (X_1, X_2)$  としたとき、 $T^{-1}AT$  はどうなるか。ただし、 $T^{-1}$  は  $T$  の逆行列である。

(4)  $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$ ,  $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  がある。ただし、 $\vec{y}(t)$  は 2 次元のベクトルである。この微分方程式を (3) の解を用いて解け。 (63 九州大)

9.2 微分方程式  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ x + 4y \end{pmatrix}$  を解く問題がある。

(1)  $\begin{pmatrix} x - 2y \\ x + 4y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  のときの行列  $A$  を求めよ。

(2) 行列  $A$  の固有値  $\lambda$  とそのときの単位固有ベクトルを求めよ。

(3)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  なる変数変換行列  $P$  が  $P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  であるとき、次式を証明せよ。

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(4)  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  のとき、微分方程式を求め、その方程式を解け。

(5) (4) を用いて一般解  $x, y$  を求めよ。(別な方法でも良い)

T-1

## 8.10 積分方程式

10.1  $f(x) = (ax + b)e^{x/2}$  がすべての  $x$  に対して

$$f(x) = e^{x/2} - 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f(t) dt$$

を満たすように定数  $a, b$  を定めよ。

(52 千葉大)

10.2  $y(t) + \int_0^t (t - \tau + 2)y(\tau) d\tau = t + 1$  について

(1)  $y(t)$  を満たす微分方程式を作れ。

(2)  $y(t)$  を求めよ。

(59 東大)

10.3  $f(x, y) = 2xy$  のとき、

$$y_0 = 1, y_n = 1 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

で定義する関数  $y_n(x)$  を非積分形で求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$  を求めよ。

(1 金沢大)

## 8.11 差分方程式

11.1  $n$  についての関数  $f(n)$  が

$$f(0) = 5, f(1) = 11, f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 0$$

を満たすとき、 $f(n)$  を求めよ。

(2 北大)

## 8.12 偏微分方程式

- 12.1  $0 < t < +\infty$  のとき、 $f(t)$  は永久に微分できる関数で、 $z = f(x^2 + y^2)$  とおく、 $z_{xx} + z_{yy} = 0$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = -1$  を満たす関数  $z = f(t)$  を求めよ。 N-1

## 8.13 総合問題

- 13.1  $y'' + 2y' + 5y = 0$  という微分方程式がある。  
(1)  $y_1(x) = e^{ax} \sin bx$  が上の微分方程式を満たす  $a, b$  (定数) を求めよ。  
(2)  $y_2(x) = e^{ax} \cos bx$  の  $a, b$  についても上と同じ  $a, b$  が当てはまることを示せ。  
(3)  $y_3(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ,  $y_3(0) = 1$ ,  $y_3'(0) = 0$  であるとき、定数  $c_1, c_2$  を求めよ。  
(4)  $y_3(x)$  の極値 ( $0 \leq x < \infty$ ) を求め、グラフの概形を描け。 (2 九州大)
- 13.2 連立方程式  $\frac{dx}{dt} = -ax$ ,  $\frac{dy}{dt} = ax + by$  がある。条件  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$  であるとき、上の方程式の解を求めよ。また、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{e^{bt}}$  を求めよ。 (2 山口大)