

# 数 学

注

意

- 1 問題は [1] から [4] までで、4 ページにわたって印刷してあります。
- 2 検査時間は50分で、終わりは午前11時00分です。
- 3 声を出して読むではいけません。
- 4 解答はすべて解答用紙に明確に記入し、解答用紙だけを提出しなさい。
- 5 答えに根号が含まれるときは、根号をつけたままで表しなさい。
- 6 解答を直すときは、きれいに消してから、新しい解答を書きなさい。
- 7 受検番号を解答用紙の決められた欄に記入しなさい。

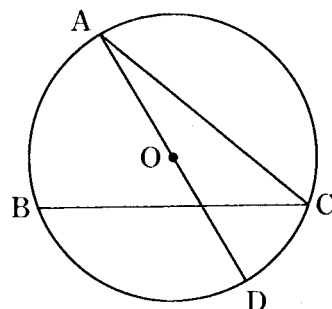
1 次の各問に答えよ。

〔問1〕  $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2} + 3\sqrt{5})^2$  を計算せよ。

〔問2〕 右の図1で、円Oは、線分ADを直径とする円 図1

である。点B、点Cは、円Oの周上の点で、点Aと点C、点Bと点Cをそれぞれ結ぶ。

$CA = CB$ ,  $\angle ACB = 40^\circ$  のとき、 $\angle CAD$  の大きさは何度か。

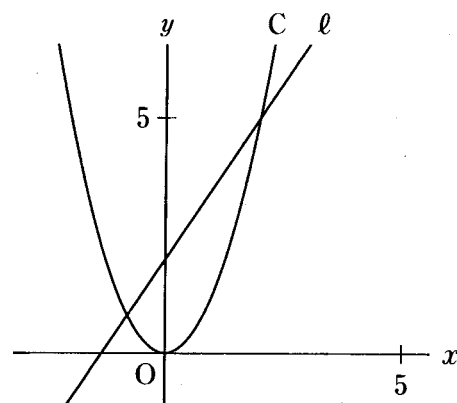


〔問3〕 右の図2で、点Oは原点、曲線Cは関数 図2

$y = ax^2$  ( $a > 0$ ) のグラフ、直線 $\ell$ は関数

$y = -\frac{3}{2}x + 2$  のグラフをそれぞれ表している。

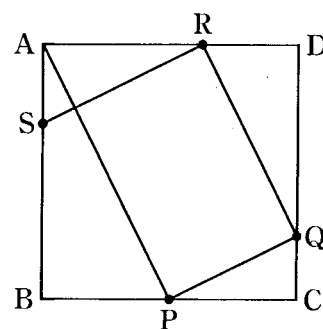
曲線Cと直線 $\ell$ との交点のうち、1つの点のy座標が5であるとき、 $a$ の値を求めよ。



〔問4〕 右の図3で、四角形ABCDは1辺の長さが 図3

16 cm の正方形である。点Pは辺BCの中点で、点Qは辺CD上に、点Rは辺DA上に、点Sは辺AB上にある。点Aと点P、点Pと点Q、点Qと点R、点Rと点Sをそれぞれ結ぶ。

$AP \perp PQ$ ,  $PQ \perp QR$ ,  $QR \perp RS$  のとき、線分SBの長さは何 cm か。



〔問5〕 大、小1つずつのさいころを同時に投げる。大きいさいころの出た目の数を $a$ 、小さいさいころの出た目の数を $b$ とすると、 $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$ , 2が直角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ。

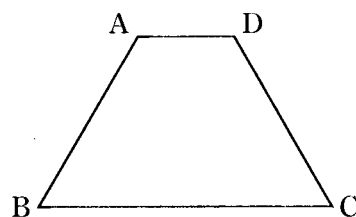
ただし、さいころの1から6までの目が出る確率はすべて等しいものとする。

2 右の図1で、四角形ABCDは、 $AB=DC$ 、 $\angle ABC=\angle DCB$

で、辺ADの長さが辺BCの長さより短い四角形である。

次の各問に答えよ。

図1

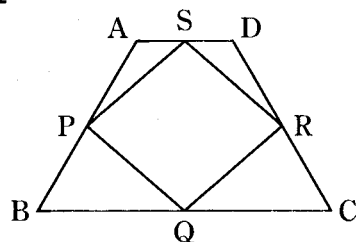


〔問1〕 図1において、辺AB上に点F、辺DC上に点Gをとり、点Fと点Gを結んだ線分FGを引いたとき、 $FG \parallel BC$ 、 $FG = \frac{1}{2} BC$ となるように、解答欄に示した四角形ABCDをもとにして、定規とコンパスを用いて、線分FGを作図せよ。ただし、作図に用いた線は消さないでおくこと。

〔問2〕 右の図2は、図1において、四角形ABCDの辺AB、辺BC、辺CD、辺DAの中点をそれぞれP、Q、R、Sとし、点Pと点Q、点Qと点R、点Rと点S、点Sと点Pをそれぞれ結んだ場合を表している。

四角形PQRSはひし形であることを証明せよ。

図2

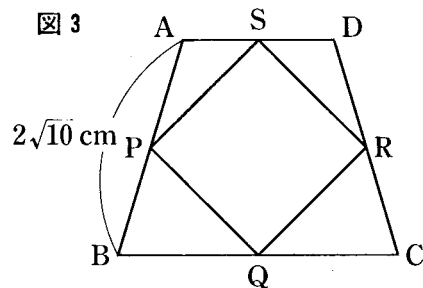


〔問3〕 右の図3は、図2において、 $AB = 2\sqrt{10}$  cm とし、四角形PQRSが正方形になった場合を表している。

正方形PQRSの面積が $18 \text{ cm}^2$ のとき、辺ADの長さ、辺BCの長さはそれぞれ何 cm か。

解答欄には、答えだけではなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。

図3



- 3 図1は、1辺の長さが1の正方形OABCを、頂点Oが原点、頂点Aが点(1, 0)、頂点Bが点(1, 1)、頂点Cが点(0, 1)になるように置いたものを表している。

正方形の内部及び周上の点をPとする。この正方形に対して以下の操作を行う。

『 操作 (①⇒②)

- ・正方形を辺CBの中点Sと辺OAの中点Tを結んだ線分STを折り目として、辺BA側から折り返して辺COに重ねる。

操作 (②⇒③)

- ・次に辺COの中点Uと辺STの中点Vを結んだ線分UVを折り目として、辺CS側から折り返して辺OTに重ねる。

操作 (③⇒④)

- ・このようにしてできた1辺の長さ $\frac{1}{2}$ の正方形OTVUを1辺の長さが1になるように2倍に拡大する。

図2は、操作後、図1の正方形と同じ大きさに拡大した正方形OTVUを、頂点Oが原点、頂点Tが点(1, 0)、頂点Vが点(1, 1)、頂点Uが点(0, 1)になるように置いたものを表している。

次の各問に答えよ。

〔問1〕 図1での点Pの座標が $(-\frac{3}{4}, -\frac{4}{5})$ のとき、操作を行った後の図2の点Pの座標を求めよ。

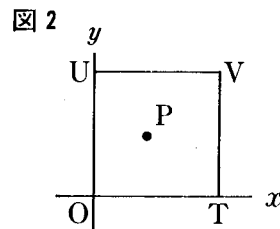
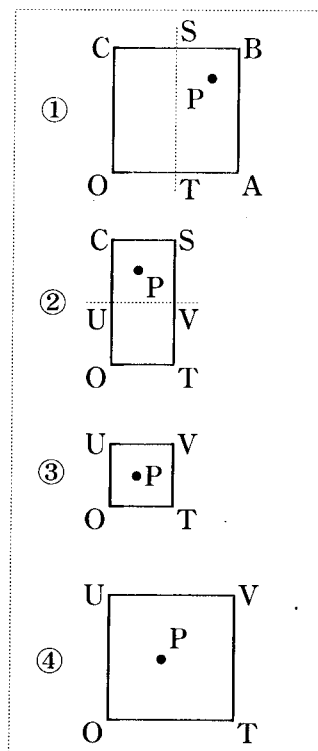
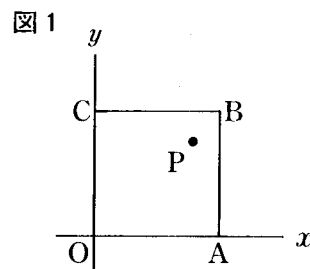
〔問2〕 図1での点Pと、操作を行った後の図2の点Pの座標が変わらない点Pの座標をすべて求めよ。

〔問3〕 図1において、点 $(-\frac{5}{6}, -\frac{5}{6})$ を通り、正方形OABCの辺上の異なる2点を結んだ線分を $\ell$ とする

操作の後、線分 $\ell$ が、図2において正方形OTVUの辺上の異なる2点を結んだ線分 $\ell$ と傾きが等しい線分になるときの線分 $\ell$ の傾き $m$ を考える。

次の〔ア〕, 〔イ〕, 〔ウ〕に当てはまる数をそれぞれ求めよ。ただし、正方形の辺に平行な線分は除いて考えることとする。

全く同じ線分になるときの線分 $\ell$ の傾き $m$ の値は、〔ア〕である。平行になるときの線分 $\ell$ の傾き $m$ の最大値は、〔イ〕であり、平行になるときの線分 $\ell$ の傾き $m$ の最小値は、〔ウ〕である。



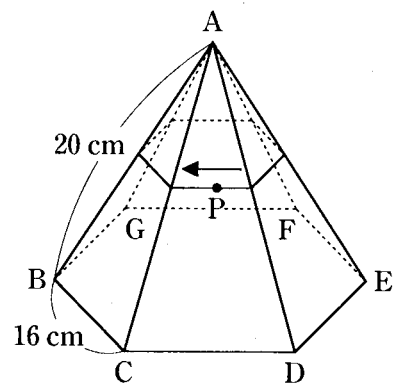
- 4 右の図で、立体A-BCDEFGは、1辺の長さ16 cmの正六角形BCDEFGを底面とし、辺ABの長さが20 cmの正六角すいである。

点Pは、頂点Aを出発したあと、辺AB上を頂点Bに向かって動き、辺AB上を動いているときにブザーが鳴ると、そのときの点Pの位置から、正六角すいの側面上を底面に平行な正六角形を描きながら、時計回りに動く点である。

点Pは、辺AB上を6 cm/秒の速さで動き、側面上の正六角形の周上を16 cm/秒の速さで動く。

ただし、ブザーが鳴っている時間の長さは、考えないものとする。

次の各問に答えよ。



- 〔問1〕 点Pが、頂点Aを出発してから $\frac{5}{4}$ 秒後にブザーが鳴った。このとき、点Pが、側面を1周

してできる正六角形を底面とし、頂点Aを含む正六角すいの体積は何  $\text{cm}^3$  か。

- 〔問2〕 点Qは、頂点Aを出発したあと、辺AB上を頂点Bまで動き、その後、底面の正六角形BCDEFGの周上を反時計回りに1周して、頂点Bから頂点Aに向かって、辺AB上を頂点Aまで動く点である。

点Qは、辺AB上を10 cm/秒の速さで動き、底面の正六角形BCDEFGの周上を32 cm/秒の速さで動く。

点Pと点Qが、頂点Aを同時に出発し、点Pが辺AB上にあるとき、ブザーが鳴った。その後、点Pが、正六角すいの側面上を動き、初めて辺AB上に戻ったときに、辺AB上を頂点Aに向かって動いている点Qと出会った。

ブザーが鳴ったのは、点Pと点Qが、頂点Aを同時に出発してから何秒後か。

ただし、解答欄には、答えだけではなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。

- 〔問3〕 点Rは、頂点Aを出発したあと、辺AB上を頂点Bまで動き、その後、底面の正六角形BCDEFGの周上を反時計回りに動く点である。

点Rは、辺AB上を10 cm/秒の速さで動き、底面の正六角形BCDEFGの周上を32 cm/秒の速さで動く。

点Pと点Rが、頂点Aを同時に出発し、点Rが頂点Bに到達したとき、ブザーが鳴った。2点P, Rを結ぶ線分PRの長さが、最初に最も長くなるのは、ブザーが鳴ってから何秒後か。

ただし、解答欄には、答えだけではなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。

平成 16 年度 東京都立日比谷高等学校入学者選抜学力検査問題  
出題の基本方針等について

数 学

1 出題の方針

数量，図形などに関する基礎的・基本的な事項についての知識・理解をみるとともに，数学的な見方や考え方及び，数学的な表現・処理に関する能力をみる。

2 問題の構成と各問のねらい

( 1 ) 問題の構成

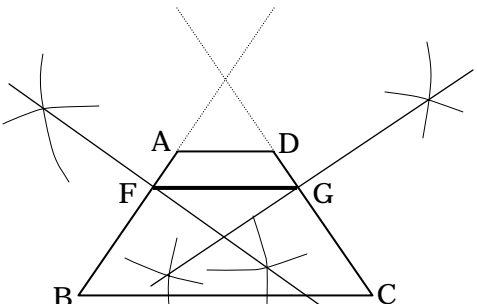
大問は 4 問構成とし，それらの中の小問は全部で 14 問とした。

答えだけでなく，答えを求める途中の式や計算を書くことにより，思考過程を大切に，推論の過程をみることを重視した小問構成とした。

( 2 ) 各問のねらい

- ① 数と式，図形，数量関係の各領域の基礎的・基本的な事項についての知識・理解及び計算処理の能力をみる。
- ② 図形の性質の理解をみるとともに，正しく作図する能力や中点連結定理，三角形と比，三平方の定理などを用いて，見通しをもって論理的に考察し処理する能力，推論の過程を的確に表現する能力をみる。
- ③ 図形の相似拡大・縮小とそれに伴う点や線分の位置を的確にとらえ，点の座標や線分の傾きを考えることを通して，点や線分の移動について論理的に考察し，問題を解決する能力をみる。
- ④ 立体図形上の点の運動を捉えることを通して，点の移動した距離と時間の関係や点の位置と点の移動した距離の関係を方程式で表すことにより，関数についての理解をみるとともに，図形の計量についての能力，見通しをもって論理的に考察し処理する能力，推論の過程を的確に表現する能力をみる。

問題番号	正	答	配点
1	[問 1]	$-24\sqrt{10}$	5
	[問 2]	20 度	5
	[問 3]	$\frac{5}{4}$	5
	[問 4]	11 cm	5
	[問 5]	$\frac{7}{36}$	5

問題番号	正	答	配点
2	[問 1] 正答例		5

問題番号	正	答	配点
2	[問 2] 正答例	<p>【証明】頂点 B と頂点 D,頂点 A と頂点 C をそれぞれ結ぶ。 ABD において,  点 P は辺 AB の中点,点 S は辺 AD の中点だから,中点連結定理より, <math>PS=\frac{1}{2}BD</math></p> <p>CBD において同様に, <math>QR=\frac{1}{2}BD</math> よって, <math>PS=QR</math> .....</p> <p>BAC において,点 P は辺 AB の中点,点 Q は辺 BC の中点だから,中点連結定理より, <math>PQ=\frac{1}{2}AC</math></p> <p>DCA において,同様に, <math>SR=\frac{1}{2}AC</math> よって, <math>PQ=SR</math> .....</p> <p>また, ABC と DCB において,仮定から <math>AB=DC</math>, <math>\angle ABC = \angle DCB</math> また,BC 共通より, 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので, <math>\triangle ABC \cong \triangle DCB</math> したがって, <math>AC=BD</math> .....</p> <p>よって , , より <math>PQ=QR, QR=SR, SR=PS</math> したがって,四角形 PQRS は, 4 つの辺の長さがすべて等しいので, ひし形である。</p>	10
	[問 3] 正答例	<p>頂点 A から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を H とし,頂点 D から辺 BC に引いた垂線と辺 BC との交点を K とする。 四角形 PQRS は正方形であるから,対角線の長さは等しく,</p> <p>また,垂直に交わるから,その長さを <math>y\text{ cm}</math> とすると,正方形の面積は, <math>\frac{1}{2}y^2=18</math> <math>y=6\text{ cm}</math></p> <p>よって, <math>PR=QS=6\text{ cm}</math> ここで,辺 BA を A の方向に延長した直線と辺 CD を D の方向に延長した直線の交点を E とすると, <math>\angle ABC = \angle DCB</math> より,  2 つの角が等しいので, <math>\triangle EBC</math> は二等辺三角形 よって, <math>EB=EC</math> また, <math>AB=DC</math> したがって, <math>EA:AB=ED:DC</math> により, <math>AD \parallel BC</math></p> <p>また,点 P は辺 AB の中点,点 R は辺 DC の中点であるから, <math>PB=RC</math> よって , <math>EP=ER</math> したがって, <math>EP:PB=ER:RC</math> により, <math>PR \parallel BC</math></p> <p>ここで <math>PR \perp QS</math> より, <math>BC \perp QS</math> したがって, <math>AH=DK=6\text{ cm}</math></p> <p>ABH において,三平方の定理により, <math>BH^2 = (2\sqrt{10})^2 - 6^2 = 4</math> よって, <math>BH=2\text{ cm}</math></p> <p>DCK においても同様に, <math>CK=2\text{ cm}</math> また,頂点 A と頂点 C を結び,線分 AC と線分 PR の交点を F とすると,</p> <p><math>PF \parallel BC</math> より,点 F は,線分 AC の中点 よって, <math>PF=\frac{1}{2}BC</math>, <math>FR=\frac{1}{2}AD</math>, <math>PF+FR = \frac{1}{2}(AD+BC)</math> より,</p> <p><math>AD+BC=2PR=12</math> ここで, <math>AD=x\text{ cm}</math> とすると, <math>2x+2\times 2=12</math> よって, <math>x=4</math> すなわち <math>AD=4\text{ cm}</math></p> <p><math>BC=12-AD</math> より, <math>BC=8\text{ cm}</math></p>	10

問題番号		正					
------	--	---	--	--	--	--	--

問題番号		正 答					配点
4	[問 1]	$81\sqrt{3} \text{ cm}^3$					7
	[問 2] 正答例	<p>2 点 P,Q が同時に頂点 A を出発してから,ブザーが鳴るまでの時間を <math>s</math> 秒, 点 P,点 Q が出会うまでの時間を <math>t</math> 秒とすると,</p> <p>点 Q が,頂点 A から頂点 B まで動き,頂点 B から 1 周して,頂点 B に戻るまでに要する時間は, <math>\frac{20}{10} + \frac{16 \times 6}{32} = 5</math> よって,</p> <p><math>20 - 10(t - 5) = 6s</math> より <math>70 - 10t = 6s \dots\dots</math> また, 点 P が正六角すいの側面上を動く速さは, <math>16 \text{ cm/秒}</math> であるから,</p> <p><math>16(t - s) = 6s \times \frac{4}{5} \times 6</math> より <math>20(t - s) = 36s \quad 5t = 14s \dots\dots</math> , より <math>70 - 28s = 6s \quad 34s = 70</math></p> <p>よって, <math>s = \frac{35}{17}</math> すなわち, <math>\frac{35}{17}</math> 秒後</p>					8
	[問 3] 正答例	<p>ブザーが鳴ってからの時間を <math>t</math> 秒とする。</p> <p>点 R が頂点 B に到達したとき,点 P は, <math>AP = 12 \text{ cm}</math> のところにいる。したがって,点 P は, <math>16 \text{ cm/秒}</math> の速さで,</p> <p>1 辺 <math>12 \times \frac{4}{5} = \frac{48}{5} \text{ cm}</math> の正六角形の周上を時計回りに動く。</p> <p>点 R は, <math>32 \text{ cm/秒}</math> の速さで,底面の正六角形の周上を反時計回りに動く。</p> <p>右の図において,頂点 A から底面の正六角形に引いた垂線と底面の正六角形との交点を O とし,点 P から底面の正六角形に引いた垂線と底面の正六角形との交点を P' とする。</p> <p>点 P' が底面上で動く正六角形と,点 O と点 R を結んだ線分との交点を R' とすると,</p> <p>点 P' は, <math>t</math> 秒間に <math>16t \text{ cm}</math>, 点 R' は, <math>t</math> 秒間に <math>32t \times \frac{3}{5} \text{ cm}</math> 動く。</p> <p>ここで, 2 点 P',R' が <math>t</math> 秒間に動いた道のりの和を <math>\ell</math> とすると, <math>\ell = 16t + 32 \times \frac{3}{5} t = \frac{176}{5} t</math></p> <p>PR の長さが最も大きくなるのは, 線分 PP' の長さが一定であるから,</p> <p>直角三角形 PRP' において, 線分 P'R の長さが最も大きくなるときである。</p> <p>よって,点 P',点 R' がともに, 点 P が動く側面上の正六角形を底面に写してできる正六角形の頂点に達していて, <math>\ell</math> が正六角形の半周の長さの奇数倍のときである。</p> <p>点 P' が底面上で動く正六角形の 1 辺の長さを進むのに要する時間は, <math>\frac{48}{5} \div 16 = \frac{3}{5} \text{ 秒}</math></p> <p>したがって, <math>t = \frac{3}{5} n</math> (<math>n</math> は自然数) と表せる。</p> <p>また, <math>\ell = \frac{48}{5} \times 3 \times (2k - 1)</math> (<math>k</math> は自然数) <math>\ell = \frac{176}{5} t</math> より, <math>\frac{176}{5} t = \frac{48}{5} \times 3 \times (2k - 1)</math></p> <p>したがって, <math>t = \frac{144}{176} (2k - 1) = \frac{9}{11} (2k - 1)</math> よって, <math>\frac{3}{5} n = \frac{9}{11} (2k - 1)</math> すなわち <math>n = \frac{15}{11} (2k - 1)</math> が最初に成り立つのは,</p> <p><math>2k - 1 = 11</math> のときである。したがって,最初に PR の長さが最大になるのは, <math>2k - 1 = 11</math> のときで, <math>t = 9</math> すなわち 9 秒後</p>					10

