

ミクロ理論講義ノート

第1部：数学的準備とミクロ経済理論の基礎

第1章. 基本的な数学の概念

§ 1.1. 定義：Set

A set (集合) とは『もの』の集まり。

例:たとえば、正の整数の集まりは1つの集合である。これは通常 \mathbb{I} と表記。

すべての実数の集まりも集合で、これは \mathbb{R} と表記する。

x が S のメンバーであれば、 $x \in S$ と表記する。

メンバー でなければ、 $x \notin S$ と表記。

集合は波カッコによって表記されることが多い。

例：列挙する方法

$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

集合メンバー の性質を述べる方法 (axiom of specification)

$I = \{n : n \text{ is a positive integer}\}$

$J = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$

集合のメンバーは点 point と呼ばれる。

§ 1.2. 定義：

A のすべてのメンバー が B のメンバー であれば、集合 A は B の部分集合と言い、 $A \subset B$ と表記。A と B がまったく同じメンバー をもてば集合 A と B は等しいと言われ、 $A = B$ と表記。

§ 1.3. 定義：

集合 A と B の交差する部分は $A \cap B$ と表記され、 $\{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$ で、共集合 intersection と言われる。

和集合 Union は $A \cup B$ と表記され、 $\{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$ のこと。

A と B の差 $\{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$ は $A - B$ 。

空集合 \emptyset とは、メンバー が存在しない集合。

$A \cap B = \emptyset$ であれば、A と B は non-intersecting もしくは disjoint と言われる。

和集合も共集合も無限個についても定義できる：

例： $\bigcup_{i=1}^n S_i$ $\bigcap_{i=1}^n S_i$ $\bigcup_{t \in T} S_t$
 $\bigcap_{i=1}^n S_i$ $\bigcup_{i=1}^n S_i$ $\bigcap_{t \in T} S_t$

集合 S が集合 X の部分集合であれば、S の補集合は $S^c = \{x : x \in X, x \notin S\}$

§ 1.4. 定義：

X と Y の2つの集合を考える。 $x \in X$ 、 $y \in Y$ のとき、順番が決められた2変数の組み合わせは、 x と y の Cartesian product と呼ばれ、 $X \times Y$ と表記される (X を使うこともある)。

例：

実数の2次元空間は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, あるいは \mathbb{R}^2 と表記される。

無限個の Cartesian product は $\bigcup_{i=1}^n X_i$ もしくは $\bigcap_{t \in T} X_t$ と表記される。

もし $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ $\bigcap_{i=1}^n X_i$ であれば、 x_i は x の i 番目の座標と言われる。

§ 1.5. 定義：Function

X と Y の2つの集合を考える。 $x \in X$ と $y \in Y$ を関連づけることができれば、 f は X から Y への関数と言い、

$$f : X \rightarrow Y$$

と表記する。

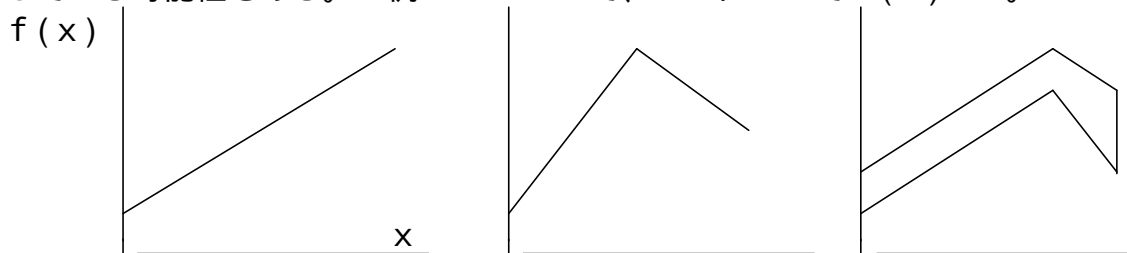
§ 1.6.定義：

このとき X は domain (領域) で $Y = \{y = f(x) : x \in X\}$ は f の range (値域??) と言われる。

$f(x)$ は x の値 value あるいは写像 image 言われる。

map (写像)、mapping、transformation (変換)、operator (作用素)、single-valued function と function (関数) はすべて同一の概念を示す。

ある $y \in Y$ が X の複数のメンバー と関連付けられている場合には、a set-valued function と呼ばれる。これは correspondence あるいは multivalued function とも呼ばれる。a single-valued function であっても、 X の複数のメンバー が Y の単一のメンバー と関連している可能性もある。例： $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で、 x について $f(x) = a$ 。



§ 1.7.定義：

$A = f(x)$ とする。このとき $\{x: x \in X, f(x) \in A\}$ は A の逆写像と言われて、 $f^{-1}(A)$ と表記される。

逆関数 f^{-1} は either singlevalued or multivalued.

f と f^{-1} が single-valued であれば、 f は one to one もしくは one-to-one mapping と言われる。更に $f(x) = Y$ であれば『onto or onto mapping』と言われる。

§ 1.8.定義：Maximum and minimum

$S \subset \mathbb{R}$ とする。 S が bounded from above と言われるのは、 $\exists M \in \mathbb{R} : x \in S \Rightarrow x \leq M$ のとき M は S の **upper bound** と呼ばれる。同様に S の **lower bound** も定義できる。 S が bounded from above であれば、upper bound の中に最も小さいものが存在する。これは **supremum** or the **least upper bound**, と呼ばれ、 $\sup S = a_0$ or $\sup_{x \in S} x = a_0$ と表記される。

S が bounded from below であれば、lower bounds に最大の値が存在する。これは **infimum** or the **greatest lower bound** と呼ばれ、 $\inf S = b_0$ or $\inf_{x \in S} x = b_0$ と表記する。 $S \subset \mathbb{R}$ が bounded above であっても、 S はその **supremum** を含んでいない可能性もある。例： $S = \{1/q : q=1,2,3,\dots\}$ では、infimum は 0 で $0 \notin S$ 。 $\sup S$ が S に存在すれば $\sup S$ は **maximum** と呼ばれる。 $\inf S$ が S に存在すれば、 $\inf S$ は **minimum** と言われる。

§ 1.9.必要条件 Necessary and 十分条件 sufficient conditions

$A \Rightarrow B$ であれば、 B は A の a **necessary condition** 必要条件

$A \Leftarrow B$ は B の **sufficient condition** 十分条件

If $A \Rightarrow B$ かつ $B \Rightarrow A$ であれば、 A は a **necessary and sufficient condition** for B , A は B の必要十分条件と言われ、 A と B は logically equivalent.

$A \Rightarrow B$ であれば、not $B \Rightarrow$ not A .

第2章. 線形空間と \mathbb{R}^n

§ 2.1. real space の定義:

$$R^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in R, i=1, 2, 3, \dots, n\}$$

Let $x \in R^n$ and $y \in R^n$, and

define the **addition** $z=x+y$ by $z_i = x_i + y_i, i=1, \dots, n$.

clearly, $z \in R^n$. This means **R^n is closed under addition.**

Let α be a scalar ($\alpha \in R$), and

define **scalar multiplication** by $z = \alpha x$ by $z_i = \alpha x_i, i=1, \dots, n$.

R^n is closed under scalar multiplication, i.e. $x \in R^n$ & $\alpha \in R$, then $\alpha x \in R^n$.

§ 2.2. linear space の定義 (もしくは vector space)

任意の集合 X に対して

addition and scalar multiplication が定義されている,

X is closed under these two operations,

the following 8 properties are satisfied:

L1 Associative law $x+(y+z)=(x+y)+z$

L2 an element 0 exists such that $x+0=0+x=x$

L3 an element $-x$ exists such that $x+(-x)=0$

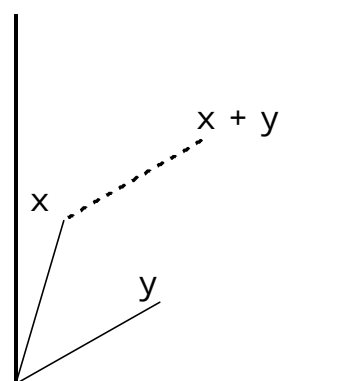
L4 Commutative law $x+y=y+x$

L5 Associative law $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

L6 $1x=x$

L7 Distributive law $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

L8 Distributive law $(\alpha x + \beta x) = (\alpha + \beta)x$



linear space の点は a **vector ベクター**と呼ばれる.

linear space の例 :

R^n で、通常の + とスカラー かけ算の定義

The set F of real-valued function defined on the interval $[a,b]$.

Given $f, g \in F$, addition $(f+g)$ is defined by $f(x)+g(x)$ for each $x \in [a,b]$.

Scalar multiplication defined by $\alpha f(x)$ for each $x \in [a,b]$.

§ 2.3.定義 : subspace 線形空間

A subset S of a linear space X is called **linear subspace** if

$$x, y \in S \implies x+y \in S$$

$$x \in S \text{ \& \> } \alpha \in R \implies \alpha x \in S$$

A linear subspace is a linear space (L1 ~ L8 is satisfied)

If $S_i, i=1, \dots, n$, is linear subspaces

intersection $\bigcap_{i=1}^n S_i$ is a linear subspace

例 : R^3 is a linear space and its subsets

$$S_1 = \{(x_1, 0, 0) \in R^3 : x_1 \in R\} \text{ and }$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2, 0) \in R^3 : x_1 \in R, x_2 \in R\}$$

are linear subspaces.

But $S_1 \cup S_2 = \{(1, 1, 1)\}$ is not a linear subspace.

Because $(1, 1, 1) \in S_1 \cup S_2$ but $2(1, 1, 1) \notin S_1 \cup S_2$

§ 2.4.定義 : linear sum $S = S_1 + S_2$:

Linear sum is defined by $S = \{X+Y : X \in S_1, Y \in S_2, \text{ and } X, Y \in R\}$

同様に、linear space X の中にある m 個の subsets $S_i, i=1, \dots, m$ より

linear sum $S = \sum_{i=1}^m S_i$ が定義できる。

§ 2.5. Euclidian Distance

R^n の任意の2点 $x=(x_1, \dots, x_n)$ と $y=(y_1, \dots, y_n)$ の **Euclidian distance** は

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

これは以下の **4条件**を満たす：

- (M 1) $d(x,y)=0 \iff x=y$
- (M 2) Triangle inequality : $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$
- (M 3) 全ての x,y について $d(x,y) \geq 0$
- (M 4) Symmetry : $d(x,y)=d(y,x)$

§ 2.6. Metric space

X を任意の集合とする。もし function $d: X \times X \rightarrow R$ が定義されて、

M 1 ~ M 4 の条件を満たせば、 X は **metric space** (距離空間) と呼ばれる。

$d(x,y)$ は x と y の distance 距離と呼ばれる。

Metric space は (X, d) と表記される。

例 Euclidian distance を R^n で定義したもの

X を任意の空でない集合とし、distance を以下のように定義

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

も M 1 ~ M 4 を満たす。

§ 2.7. Euclidian Norm

$d(x,0)$ は **Euclidian Norm** と呼ばれ $\|x\|$ と表わされる。

Euclidian norm は以下の **3条件**を満たす。

- (N 1) $\|x\| \geq 0$ かつ $\|x\| = 0$ only if $x = 0$
- (N 2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (N 3) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

§ 2.8. 定義：

この3条件を満たす real-valued 関数を任意の linear (vector) space 上に定義できれば、この集合は **normed linear (vector) space** と呼ばれる。

注意：

normed linear space は $d(x,y) = \|x-y\|$ とすれば metric space となる。

例：

R^n は Euclidian norm で normed linear space となる

R^n は以下の norm でも normed linear space となる。

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

R^n は以下の norm でも normed linear space となる。

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

第3章. Linear Functions 線形関数

§ 3.1. 定義： Linear Combination 線形結合

X を任意の linear space とし、 x_1, x_2, \dots, x_m を m 個の vector とすると

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \quad \alpha_i \in R, i=1, \dots, m$$

を **linear combination** 線形結合と呼ぶ。

このとき、 x は X の中にある (X は linear space)。

§ 3.2.定義：線形独立

x_1, x_2, \dots, x_m が以下の条件を満たすときには **linearly independent** と呼ぶ：

$$\sum_i x_i = 0 \quad \text{implies} \quad x_i = 0 \quad \text{for all } i$$

§ 3.3.定義：線形従属

全てがゼロでない x_i 、 $x_i \in R$ 、 $i=1, \dots, m$ に対して、 $\sum_i x_i = 0$ となれば、また、そうなるときのみ、 x_1, x_2, \dots, x_m が **linearly dependent** と呼ぶ。

例： R^3 で考える。 $x_1 = (1, 3, 4)$ と $x_2 = (2, 6, 0)$ と $x_3 = (0, 0, 2)$ は線形従属となる。

なぜなら、 $x_1 - 0.5 x_2 - 2 x_3 = 0$ 。

§ 3.4.系：非ゼロベクター、 x_1, x_2, \dots, x_m が linear dependent であるのは、ベクターの1つが、他のベクターの linear combination として表わされる

例： $x_1 = \sum_{i=2}^n x_i$

§ 3.5.定義：Basis 基底？

X を任意の linear space とする。linear Independent な $S \subset X$ が、以下の条件を満たすときには **Basis 基底** と呼ぶ：

X の全てのベクターが、 S の subset である vectors の linear combination の形で表示できる。

S は有限でも無限でもよい。有限（無限）のときには finite(infinite) dimensional と呼ぶ。

例： R^n の場合には、 $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ が 1 つの basis となる。当然他にも basis となるものはある。

§ 3.6.定理(Basis 関連)

Basis の存在：全ての linear space は basis を持つ。

Basis のメンバー数：ある linear space のどんな 2 組の basis も同数のメンバーを持つ。

linear space の dimension とは basis のメンバー数

以下では function 関数は全て single-valued とする。

§ 3.7.定義：linear function 線形関数

X, Y を linear space とする。ある function $f: X \rightarrow Y$ は以下の条件を満たすときに **linear function と呼ばれる**：

(I) $x, x' \in X$ 、 $\alpha \in R$: $f(x + x') = f(x) + f(x')$

(II) $x \in X$ 、 $\alpha \in R$: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

例 $f: R^n \rightarrow R$ で、 $f(x) = a \cdot x$ 。ただし、 $x \in R^n$ で、 $a \in R^n$ 。

$C[a, b]$ を閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数の集合とし、

$f: C[a, b] \rightarrow R$ で、 $f(x) = \int_a^b x(t) dt$ と定義する。ただし、 $x(t) \in C[a, b]$ 。

linear function でない例： $f: R^n \rightarrow R^n$ で、 $f(x) = a x^2$ 。

§ 3.8.定義： $L[X, Y]$

linear space X から linear space Y への **linear function の集合** を $L[X, Y]$ と表記する。

0 の定義 : $x \in X$ を $0 \in Y$ に移す linear function を $0(x)=0$ と表記する。
 addition 定義 : $f, g \in L[X, Y]$ の addition を $[f+g](x)=f(x)+g(x)$ で定義する。
 $-f$ の定義 : $[-f](x)=-f(x)$ for $x \in X, f \in L[X, Y]$
 乗法定義 : $[f](x)=f(x)$

これらの定義により、(L 1) ~ (L 8) を満たすから $L[X, Y]$ は *linear space*

$L[X, X]$ で $f(x) = x$ (on to) を、単に、 L と表記する。

1 の定義 : X すべての点をそれ自身に移す linear function を 1 と表記 : $1 \in L, 1(x) = x$
 linear function の乗法定義 : $f, g \in L$ 。 $f \cdot g = f[g(x)]$

§ 3.9. 定義 : invertible or nonsingular

$f \in L$ は以下の条件を満たすとき **invertible (nonsingular)** と呼ばれる

- (i) $x, x' \in X$ で $x \neq x'$ のとき、 $f(x) \neq f(x')$
- (ii) $(y \in X) \rightarrow (x \in X) : f(x)=y$

§ 3.10. 定義 : inverse f^{-1}

$f \in L$ を invertible とする。 f の inverse を以下のように定義する :

x_0 の存在 : (ii) により、 $y_0 \in X \rightarrow x_0 \in X : f(x_0)=y_0$

ユニーク性 : (i) により、この x_0 はユニーク。

f の inverse を $f^{-1}(y_0) = x_0$ と定義する。

注意 : $f \cdot f^{-1} = 1$ となる ($1(x) = x$)。

例 : 0 (関数 $0(x)=0$) は invertible でない (条件(i)を満たさない) から、inverse の存在が保証されない。

§ 3.11. 定理 ($f(x) = 0 \iff x=0$) :

X が有限な linear space とする。 $f \in L$ が invertible となるのは以下の条件が満たされる時のみである (if and only if のことで iff とも \iff と表記する):

$$f(x) = 0 \iff x = 0$$

§ 3.12. 注意 : invertible でない f は singular と呼ばれる。このときには

$$(x \in X, x \neq 0) : f(x) = 0$$

§ 3.13. 定理 (linear function と行列の one-to-one 対応)

特定の basis 基底を用いると、 n -次元の linear function は、 $n \times n$ 行列

$A = [a_{ij}]$ によって表わされ、この表記は one-to-one となる。

また、すべての行列は linear function の行列表示となる。

この行列と linear function の関連は、addition, multiplication, 0, 1 を維持する。

§ 3.14. 定義 : 行列計算とゼロ行列、単位行列

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$[a_{ij}] = [-a_{ij}]$$

$$[a_{ij}][b_{ij}] = [\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}]$$

$$0 = [0_{ij}] \text{ ただし、すべての } i, j \text{ に対して } 0_{ij} = 0$$

$$I = [e_{ij}] \text{ ただし、} i \neq j \text{ なら } e_{ij} = 0 \text{ で、} i = j \text{ なら } e_{ij} = 1$$

§ 3.15.注意：

basis(座標系) が変われば、linear function の行列表示も変化する。この basis は coordinate system と呼ばれる。

行列 A の inverse は逆行列 A^{-1} と呼ばれる。行列 A が nonsingular になり、逆行列 A^{-1} が存在するためには、§ 3.11.と § 3.2.より、行列式 $|A| \neq 0$ のとき(行/列ベクトルが線形従属だと行列式は 0 となるため)。

第 4 章. 凸集合

§ 4.1.定義：2 変数の convex combination (凸結合)

X は 任意の linear space とする。 $x, y \in X$ のとき、 $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ を、 x と y の convex combination (凸結合) と呼ぶ。ただし、 $\alpha \in \mathbb{R}$ 、 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。

§ 4.2.定義：convex set 凸集合

X は 任意の linear space とする。 $S \subset X$ とする。もし、 $x, y \in S$ なら、 $\alpha x + (1-\alpha)y \in S$ 、 $\alpha \in \mathbb{R}$ 、 $0 \leq \alpha \leq 1$ のときには、 S は Convex set と呼ばれる。

§ 4.3.定義：m 変数の凸結合

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \in S$ 、 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 、 $0 \leq \alpha_i \leq 1$ 、 $i=1, \dots, m$ 、 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ とするとき

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$$

をこれらの m 個の点の convex combination (凸結合) と呼ぶ。

§ 4.4.定理 (凸集合)：

X は 任意の linear space とする。

$S \subset X$ とする。 S が凸集合となるのは、 S のすべての『2 あるいは 3 以上の点の凸結合も S に含まれる』ときである。

凸集合の intersection は凸集合である。

注意：空集合と 1 要素の集合 も凸集合 と見なされる。

§ 4.5.定義 (nonnegative linear combination)

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \in S$ 、 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 、 $0 \leq \alpha_i$ 、 $i=1, \dots, m$ とするとき

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$$

をこれらの m 点の nonnegative linear combination (非負線形結合) と呼ぶ。

§ 4.6.定理：

X は 任意の linear space とする。 $S_i \subset X$ 、 $i=1, \dots, m$ を凸集合 とすると

これらの 線形結合 Linear sum $\sum_{i=1}^m \alpha_i S_i$ は凸集合

これらの Cartesian product $S = \prod_{i=1}^m S_i$ ($= (x^1, \dots, x^m)$ 、 $x^i \in S_i$) も凸集合

§ 4.7.定義：Cone

X は 任意の linear space とする。 $K \subset X$ 。もし、 $(\alpha \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}, x \in K) : \alpha x \in K$ なら、原点を頂点とする Cone(錐)と呼ぶ。

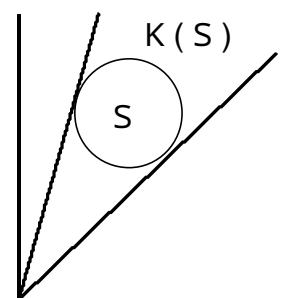
§ 4.8.定義：Convex Cone 凸錐

原点を頂点とする Cone が以下の条件を満たせば、Convex cone と呼ぶ：

$$x, y \in K \implies x + y \in K$$

§ 4.9.注意：

すべての convex cone は convex set
 すべての convex cone は原点を含む
 原点を通る 2 本の線は cone であるが、convex cone でない
 点を通る 2 本の線で囲まれた領域は convex cone
 空集合 は convex cone



§ 4.10.定理：

convex cone の intersection は convex cone
 convex cone の union は convex cone とはかぎらない

§ 4.11.定義：convex cone spanned by S

X は 任意の linear space、S \subset X とする。S を含むすべての convex cone の intersection を convex cone spanned by S もしくは convex cone generated by S と呼ぶ。K(S) と表記。これは

$K(S) = \{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i : x^i \in S, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0, i=1, \dots, m \}$
 と表わすことができる。

§ 4.12.定義：convex polyhedral cone 多角錐？

S を有限個な点とすると、K(S) は convex polyhedral cone と呼ばれる。

例：2 点(1,0),(0,1)は \mathbb{R}^2 の第 1 象限を convex polyhedral cone にする。

§ 4.13.定理(convex subset の image)

X も Y も linear space とし、 $f: X \rightarrow Y$ は linear function とすると、
 S \subset X が convex image of f (S) \subset Y も convex

例：X = \mathbb{R}^n 、S \subset X で考える。

$f: S \rightarrow X$ を、 $f(x) = x$ で定義。ただし、

\mathbb{R} 。このときには、S が convex subset であれば、

f(S) は convex subset となる。

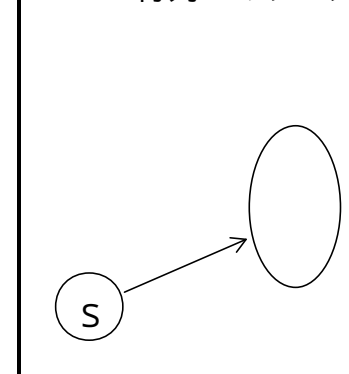
$f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ を、 $f(x) = Ax$ で定義。ただし、

A は、実数の要素よりなる $m \times n$ 行列。このときには、

集合 S がコンヴェックスであれば、

集合 $\{y: y = Ax, x \in S\}$ もコンヴェックス。

2 × 2 行列 A のケース



§ 4.14.定義：Hyperplane

$x \in \mathbb{R}^n$ の集合は、以下の条件を満たすとき **Hyperplane** H(p, M) と呼ぶ：

$$H(p, M) = \{ x \in \mathbb{R}^n : p \cdot x = M, M \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n \}$$

例：予算線は hyperplane

§ 4.15.定理：ミンコフスキーの分離定理

S \subset X と T \subset X を convex な集合で、S と T は離れているか、接触しているとする。このときには、S と T を分離する hyperplane が存在する。

第 5 章.Topology:トポロジー

§ 5.1.定義：open ball(開球)

X (たとえば、 \mathbb{R}^n) を metric space (X, d) とする。

ただし、 d は Euclidian distance。また、 $r > 0$ 、 $r \in \mathbb{R}$ とする。このとき

$$B_r(x_0) = \{x : x \in X, d(x, x_0) < r\}$$

を open ball **開球** と呼ぶ。

§ 5.2.定義：open set 開集合

$S \subset \text{metric space}(X, d)$ 。

もし、 $(x \in S) \rightarrow (r > 0, r \in \mathbb{R}) : B_r(x) \subset S$

であれば、 S は**開集合**と呼ばれる。

注意：**開球**は開集合。

空集合は開集合であると同時に閉集合とする。

X 自身は開集合であると同時に閉集合とする。

§ 5.3.定義：topological space with topology

集合 X に含まれる部分開集合の集合 \mathcal{T} を考える。このとき \mathcal{T} が以下の条件

(T 1) $X \in \mathcal{T}$ 、

(T 2) $V_i \in \mathcal{T}$ 、 $i=1, \dots, m \rightarrow \bigcap_{i=1}^m V_i \in \mathcal{T}$

(T 3) $V_i \in \mathcal{T}$ 、 A (index set) $\rightarrow \bigcup_{i \in A} V_i \in \mathcal{T}$

を満たせば、これを **topological space with topology** と呼び、 (X, \mathcal{T}) と表記。

§ 5.4.定理：開集合の和集合と共集合

無限個でも有限個でも、開集合の和集合は開集合。

有限個の開集合の共集合は開集合。無限個では不成立。

§ 5.5.topology の例

X の 2 つの部分集合 **空集合**と **X 自身**を とすると 3 条件が満たされる。

X を開集合 とし、 X に含まれるすべての開集合を とすると、これも topological space となる。

§ 5.6.注意：topological space を作る方法

metric space を topological space にする方法：

普通は metric distance で定義した開球の集合で、topological space を定義する。

これを普通の (usual) topology と呼ぶ。

\mathbb{R}^n は Euclidian distance で定義した開球集合で topological space となる。

linear space は norm で定義した開球集合で topological space となる。

§ 5.7.定義：閉集合

(X, \mathcal{T}) を topological space とする。 $S \subset X$ は、その complement 補集合が開集合 となるときに、**閉集合**と呼ぶ： $S^c \in \mathcal{T}$ 。

例 \mathbb{R} の開区間 $(a, b), (-\infty, a), (b, \infty)$ は開集合。 $[a, b]$ は閉集合。

$(-\infty, b], [a, \infty)$ は閉集合。

$(a, b]$ は閉集合でも開集合でもない。

§ 5.8.定理：閉集合の共集合と和集合

無限個でも有限個でも、閉集合の共集合は閉集合。

有限個の閉集合の和集合は閉集合。無限個では不成立。

§ 5.9.定義：limit point or accumulation point 極限点 or 集積点

topological space (X, τ) を考える。 $x_0 \in X$ 、 $S \subset X$ は以下の条件が満たされるとき S の limit point or accumulation point 極限点 or 集積点と呼ぶ：

『 x_0 を含むすべての開集合 U が x_0 以外の点 S を含む 』

§ 5.10.定義：derived set of S 導集合と Closure

集合 S のすべての集積点の集合を derived set(導集合?) と呼ぶ。

『集合 S と導集合の和集合』を S の closure と呼び \overline{S} と表記(ほんとは字上に線)。

注意： S 集積点 S かも (S の集積点が S に含まれるとはかぎらない)

0 と 1 は区間 $(0,1)$ の集積点であるが、区間にふくまれない。区間 $(0,1)$ の導集合は $[0,1]$ 。

§ 5.11.定義：sequence(列,点列,数列)の収束と極限值

metric space (X, d) 、 $x_0 \in X$ と $S \subset X$ とする。

sequence $\{x_q\}$ 、 $x_q \in S$ 、 $q = 1, 2, 3, \dots$ が与えられたとき、

$(\forall \epsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) : \{q > N \implies d(x_0, x_q) < \epsilon\}$

であれば、sequence は x_0 に convergent(収束)すると言い、

$x_q \rightarrow x_0$ あるいは $\lim_{q \rightarrow \infty} x_q = x_0$ あるいは $\lim_{q \rightarrow \infty} x_q = x_0$

と表記する。 x_0 は極限值と呼び、sequence $\{x_q\}$ は convergent sequence と言う。

§ 5.12.定理：

metric space では、極限值はユニークである。

ある点列が極限值をもてば、その点列の subset も同一の極限值を持つ。

注意： $x_0 \in S$ かも。

極限值は S に含まれるとはかぎらない。

たとえば、 $S = (0, 1]$ とし、数列を $\{1/q\}$ と定義すれば、0 が極限值。

ある点列が極限値を持たない場合でも、その subset の点列が極限値をもつことはある。例： $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ では、 $\{0, 0, 0, 0, \dots\}$ は 0 という極限値を持つ。

§ 5.13.注意：limit point と limit は異なる。

例：集合 S をただ 1 つの N を除く \mathbb{R} からなる集合とする。数列 $\{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$ の極限値は 1 で、これは集合 S に含まれる。しかし、点 1 は集合 S の limit point 集積点でない。

§ 5.14.定理：極限值と集積点

$S \subset \mathbb{R}^n$ とする。ある点列の極限值 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ が S の集積点となるのは、以下の条件が満たされるときのみである：

$(\{x_q\} \subset S \setminus \{x_0\}) : \lim_{q \rightarrow \infty} x_q = x_0$

§ 5.15.注意：

点列の収束は metric に依存する。ある metric で収束しても、他の metric では収束しないこともある。たとえば、

\mathbb{R} の点列 $\{1/q\}$ は metric $d(x, y) = 0$ if $x = y$
 $= 1$ if $x \neq y$

では収束しない。

§ 5.16.定理：閉集合と集積点

S を topological space (X, τ) の subset とすると、
『 S が閉集合となるのは、そのすべての集積点を含んでいるときのみ』である。

注意：集合 S が、集積点を持たない場合にも、 S は閉集合となる。たとえば、ただ1つのメンバーよりなる集合は閉集合。**有限個のメンバーよりなる集合も閉集合。**

§ 5.17.定義：interior 内点

S を topological space (X, τ) の subset とする。点 $x_0 \in S$ は、 x_0 を含む開集合が S に存在するとき、interior point **内点** と呼ぶ。

S のすべての interior point の集合を S の interior **内部** もしくは open kernel (**開核**) と呼び、 S° と表記する。

S の closure に存在して、interior に存在しない点は boundary point (**境界点**)、すべての boundary point の集合を S の boundary (**境界**) と呼ぶ。

§ 5.18.定理：

開核 S° は、集合 S に含まれる **最大の開集合**。

集合 S は開核と等しい ($S = S^\circ$) ときのみ、開集合。

S の closure は、 S と S の boundary の和集合

§ 5.19.例：

metric space (X, d) の open ball $B_r(x_0) = \{x : x \in X, d(x, x_0) < r\}$ の **開核** は $B_r(x_0)$ そのものである。よって、 $B_r(x_0)$ は開集合

closed ball $\{x : x \in X, d(x, x_0) \leq r\}$ は閉集合。

closed ball は、open ball $B_r(x_0)$ の closure $\overline{B_r(x_0)}$

open ball $B_r(x_0)$ の closure の interior = open ball $B_r(x_0)$

open ball $B_r(x_0)$ の境界は $\{x : x \in X, d(x, x_0) = r\}$

境界点は open ball の集積点であるが、open ball にはない。

§ 5.20.定義：連続関数

f を metric space (X, d_1) から metric space (Y, d_2) への関数 $f : X \rightarrow Y$ とする。関数 f は以下のとき $x_0 \in X$ で continuous **連続的** と言う：

$(\epsilon > 0) (\delta > 0) (\epsilon > 0) :$

$\{x \in X \mid d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon\}$

X のすべて点で連続であれば、関数 f は X で連続的と呼ばれる。

§ 5.21.定理：上記の連続関数の定義は以下の定義と同じである。

$x_q \rightarrow x_0 \implies f(x_q) \rightarrow f(x_0)$

$[B(y_0) \subset Y] [B(x_0) \subset X] : f(B(x_0)) \subset B(y_0)$

ただし、 $y_0 = f(x_0)$ 。

§ 5.22.定理：逆写像による連続関数の定義

(X, d^1) も (Y, d^2) も metric space とし

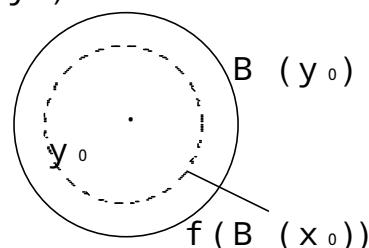
関数 $f : X \rightarrow Y$ を考える。

関数 f が X で連続的である

V が Y の開集合であれば、その逆写像 $f^{-1}(V)$ は X で開集合となる。

もしくは

V が Y の閉集合であれば、その逆写像 $f^{-1}(V)$ は X で閉集合となる。



注意：『関数 f が上から連続』の定義は、 $q : \{x : f(x) \leq q\}$ が閉集合。したがって $f(x) < q$ が閉集合であれば、 f が連続的であれば、逆写像は閉集合となる。

§ 5.23.注意：

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ であっても、 $f(a) = b$ とはかぎらない。
また、 $f(a)$ が定義されていないケースもある。例： $f(x) = 1/x$ の $f(0)$ 。

§ 5.24.定理：関数が連続的な場合には $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となる。

§ 5.25.定理：

連続関数の連続関数による**合成関数**も連続的である。

metric space (X, d) から R への関数 $f_i, i=1, \dots, m$ が連続的とすると、

$\sum_i f_i$ も連続的、 $\prod_i f_i$ も連続的。

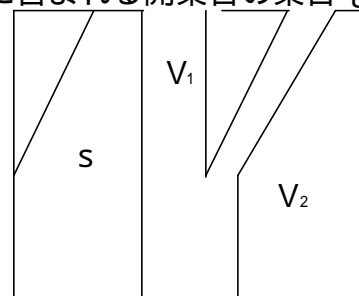
注意：これより Cobb-Douglas function $= \prod_i x_i^{\alpha_i}$ は連続関数。

$\max_i \{f_i\}$ も $\min_i \{f_i\}$ も連続的。

§ 5.26.定義：**開被覆**

topological space (X, τ) の部分集合 S を考える。 (X, τ) に含まれる開集合の集合 $\{V_i\}_{i \in A}$ 、 $V_i \subset X, A$ (A は index set) は、
以下のときに S の open cover と呼ぶ（開被覆？）：

『 S のどの点も、少なくとも1つの V_i に含まれる』



§ 5.27.定義：**subcover**

open cover の subset が、open cover となれば、これは subcover と呼ばれる。

§ 5.28.定義：**コンパクト**

topological space (X, τ) の部分集合 S は、以下のときに compact と呼ばれる：

『 S のすべての open cover がメンバー数が有限な subcover を持つ』

§ 5.29.定理：

普通の topology (ユークリッド距離の開球で定義) を持つ metric space (X, d) を考える。

Bolzano-Weierstrass 定理

部分集合 $S \subset X$ が compact になるのは以下のときのみである：

『すべての「メンバー数が無限な S の部分集合」は集積点を持つ』

Sequential Compactness

部分集合 $S \subset X$ が compact になるのは以下のときのみである：

S のすべての点列は、(a) 収束する部分点列を持ち、(b) その極限值は S に存在する。

例： $S = \{0, 1\}$ は compact (以下の § 5.30. Heine-Borel を参照) である。このとき、数列 $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ は収束しないが部分数列 $\{0, 0, 0, 0, \dots\}$ と $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$ は収束する。

§ 5.30.定理：Heine-Borel 定理

R^n のすべての部分集合は、閉集合で有界であるとき、またそのときのみ compact となる。

§ 5.31.定理：

topological space (X, τ) を考える。

X の compact な集合の**部分集合**はすべて compact

X の compact な集合の**連続関数**による写像は compact

X の compact な集合の**有限数の和集合**は compact

§ 5.32.定理 : Weierstrass

topological space (X, τ) と連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。

$S \subset X$ がコンパクトとすると、 f は S で maximum と minimum を持つ。

Proof: $f(S)$ は compact (§ 5.31. の (ii))。 $f(S) \subset \mathbb{R}$ より、有界にして閉集合 (§ 5.30.)。したがって、 $f(S)$ は maximum と minimum を持つ。

例 : $(0,1)$ は compact でないから連続関数は maximum も minimum も持たない可能性がある。
 $[0,1]$ は compact であるから連続関数は maximum も minimum を持つ。

§ 5.33.定義 : Cauchy sequence

点列 $\{x_n\}$ は以下の条件を満たすとき Cauchy sequence コーシー列という :

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) [n, m \geq N] : d(x_n, x_m) < \epsilon$$

§ 5.34.定理 : \mathbb{R}^n では、Cauchy 列は収束する。

§ 5.35.定義 : 完備

metric space (X, d) は、以下の条件を満たすとき完備 complete と言われる。

$$(\text{Cauchy sequence } \{x_n\} \subset X) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X$$

例 : \mathbb{R}^n は完備距離空間である。

§ 5.36.定義 : 可算集合

集合は、自然数と one-to-one に対応できるとき可算 countable 集合という。

§ 5.37.定義 : upper hemi-continuous or upper semi-continuous

$X \subset \mathbb{R}^m$ 。 $Y \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトとする。 (Y, τ) を topological space とし、 set-valued function (以下では correspondence という) $f : X \rightarrow Y$ を考える。このとき、以下の条件を満たせば、 f は $x^* \in X$ で、upper hemi-continuous と言われる :

$$[\text{点列 } x_n \rightarrow x^*, \text{点列 } y_n \in f(x_n)] : y^* \in f(x^*)$$

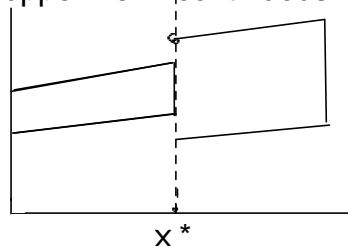
§ 5.38. 定義 : lower hemi-continuous or lower semi-continuous

correspondence f は、以下の条件を満たせば、 f は $x^* \in X$ で lower hemi-continuous と言われる :

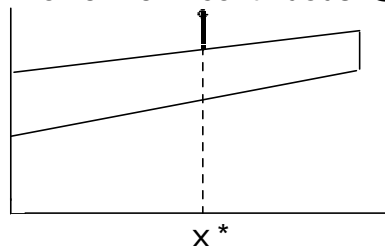
$$[\text{点列 } x_n \rightarrow x^*, y^* \in f(x^*)] : [\text{点列 } y_n \rightarrow y^*] \text{ となる } q : y_q \in f(x_q)$$

§ 5.39.説明 : upper & lower hemi-continuous でないケースの図解

upper hemi-continuous でない



lower hemi-continuous でない



§ 5.40.定義 : 連続的な correspondence

correspondence f は upper hemi-continuous かつ lower hemi-continuous であれば、

continuous と言われる。

§ 5.41.定義：グラフ

$Y \subset \mathbb{R}^n$ 、topological space (X, τ) を考える。correspondence $g : X \rightarrow Y$ とするとき、以下の条件を満たすものを graph と呼ぶ。

$$G(g) = \{(x, y) : x \in X, y \in g(x)\}$$

§ 5.42.定義：closed correspondence

correspondence は以下の条件を満たすとき closed という：

$$[\text{点列}\{x_q, y_q\} \in G(g) : (x_q, y_q) \rightarrow (x_0, y_0)] : (x_0, y_0) \in G(g)$$

あるいは、graph が閉集合

§ 5.43.定理：Berge

correspondence が upper hemi-continuous かつ graph が閉集合

§ 5.44.定理：Maximum Theorem

(X, τ) を topological space とする。また、 $Y \subset \mathbb{R}^n$ 、関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ とし、correspondence $g : X \rightarrow Y$ を連続かつ graph がコンパクトな correspondence とする。このときには、correspondence

$$g(y) = \{x \in g(y) : x' \in g(y), f(x) \geq f(x')\}$$

は upper hemi-continuous で、graph はコンパクトとなる。また、maximum value function $F(y) = f^*(y)$ は連続関数となる。

注意：g を予算制約、f を効用関数と考える。F は間接効用関数。

§ 5.45.定義：不動点

$X, Y \subset \mathbb{R}^n$ で、 $X \subset Y$ とする。関数 $f : X \rightarrow Y$ の fixed point とは以下の条件を満たすもの： $x^* = f(x^*)$

§ 5.46.定理：Brower fixed point theorem

$X \subset \mathbb{R}^n$ で、X はコンパクトかつ convex とする。また、関数 $f : X \rightarrow X$ が連続関数であれば、fixed point が存在する。

注意：供給関数 $S(p)$ と需要関数 $D(p)$ を考え、 $H(p) = D^{-1}(S(p))$ と定義する。このときに、不動点 $p^* : H(p^*) = p^*$ が存在すれば、均衡の存在が証明できる。

§ 5.47.定義：

Complete metric space (X, d) を考える。関数 $f : X \rightarrow X$ は以下の条件を満たすとき contraction 縮小写像と言う：

$$(x, y \in X) \rightarrow (d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y))$$

§ 5.48.定理：Complete metric space の縮小写像には unique な fixed point が存在する。

§ 5.49.定義：correspondence $f : X \rightarrow Y$ の fixed point とは、 $x^* \in f(x^*)$

§ 5.50.定理：Kakutani's fixed point theorem

$X \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクトで convex な topological space (X, τ) とする。correspondence $f : X \rightarrow Y$ が closed で、 $(x \in X) : f(x)$ が convex とすると、fixed point が存在する。

第6章 微分 differentiation

§ 6.1. 定義：微分可能

$X \subset \mathbb{R}$ とする。関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は、 X の interior point 内点 x_0 で、以下の条件を満たすとき、 x_0 で微分可能 differentiable と言う：

x_0 に依存する実数 a が存在し、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{ [f(x_0+h) - f(x_0)] / h \} = a$$

このとき、 a は f の x_0 における derivative 微分係数と呼ばれ、 $f'(x_0)$ と表記。微分係数は存在していれば、ユニークである。

§ 6.2. 定義：right-hand derivative $f^+(x_0)$ & left-hand derivative $f^-(x_0)$

f が $[a, b]$ で定義されている場合、 $x_0 = a$ でも $x_0 = b$ でも、通常の設定では微分可能ではなくなる。そこで、以下のように定義する：

right-hand derivative

$$f^+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \{ [f(x_0+h) - f(x_0)] / h \} = a$$

left-hand derivative

$$f^-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \{ [f(x_0+h) - f(x_0)] / h \} = b$$

注意： $f'(x_0)$ が存在するのは、 $f^+(x_0)$ も $f^-(x_0)$ も存在して、等しいとき。

§ 6.3. 定義： \mathbb{R}^n 空間で微分可能な関数

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は、 X の interior point 内点 x_0 で、以下の条件を満たすとき、 x_0 で微分可能 differentiable と言う：

x_0 に依存する n -ベクトル a が存在し、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{ [f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h] / \|h\| \} = 0$$

ただし、 h は n -ベクトル、 $\|h\|$ は norm (たとえば、ユークリッド norm)。

n -ベクトル a は、 f の x_0 における derivative 微分係数と呼ばれ、 $f'(x_0)$ と表記。

$a \cdot h$ は、differential 微分と呼ばれ、 x_0 に依存する。

f が X のすべての内点で微分可能であれば、 f は differentiable function 微分可能な関数と呼ばれる。

\mathbb{R}^n では、ある norm で微分可能となれば、その他すべての norm で微分可能となる。

§ 6.4. 定義：ベクトルのための不等号(不等号 $<$, $>$, も同じ)

$x \leq y$ は $i: x_i \leq y_i$

$x \leq y$ は $i: x_i \leq y_i$ かつ $j: x_j > y_j$

$x > y$ は $i: x_i > y_i$

§ 6.5. 注意：

X が閉集合で、境界点の微分を行うときには、right-hand derivative と left-hand derivative を定義できる。たとえば、

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \{ [f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h] / \|h\| \} = 0$$

§ 6.6. 定義：ランダウの o -記号を使ったときの微分可能

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は、 X の interior point 内点 x_0 で、以下の条件を満たすとき、 x_0 で微分可能 differentiable と言う：

a $\in \mathbb{R}^n$ が存在して、

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = a \cdot h + o(\|h\|)$$

ただし、 $o(\|h\|)$ は Landau's o-symbol と呼ばれ、以下の条件を満たす：

$$\lim_{h \rightarrow 0} o(\|h\|) / \|h\| = 0$$

§ 6.7. 定義：偏微分

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は、 X の interior point 内点 x_0 で、

以下の条件を満たすとき、 x_0 で x_i の偏微分係数 partial derivative を持つと言う：

$e_i \in \mathbb{R}^n$ 、 i 番目メンバー が 1 で、その他メンバー は 0 とする。

ある $a_i \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h} = a_i$$

ただし、 $h \in \mathbb{R}$ 。 a_i は f の x_0 における partial derivative 偏微分係数と呼ばれ、

$$f(x_0) / x_i \quad \text{あるいは} \quad f_{x_i}^0 \quad \text{あるいは} \quad f / x_i \big|_{x=x_0} \quad \text{と表記。}$$

§ 6.8. 定理：微分可能と偏微分係数

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 $Y \subset \mathbb{R}$ とする。関数 $f: X \rightarrow Y$ を考える。

f が x_0 で微分可能 $\iff f$ は x_0 で連続。

f が x_0 で微分可能 $\iff f$ は x_0 で、 x のすべてのメンバーの偏微分係数を持ち、以下の条件を満たす：

$$a = (a_1, \dots, a_n) \quad \text{もしくは} \quad f'(x_0) = (f_{x_1}^0, \dots, f_{x_n}^0)$$

注意： の反対は成り立たない。たとえば、 $f(x) = |x|$ 、 $x \in \mathbb{R}$ は、 $x = 0$ で連続的であるが、微分可能でない。

§ 6.9. 定理：微分可能と偏導関数の関係

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 $Y \subset \mathbb{R}$ とし、 X は開集合とする。関数 $f: X \rightarrow Y$ を考える。このときには以下の命題が成立する：

f が X で微分可能で、微分係数 (= 導関数) が連続的となる

f は、すべての x について、 X で、連続的な偏導関数を持つ

§ 6.10. 定義：連続微分可能

f が x_0 で微分可能で、しかも、 $f'(x_0)$ が連続的であれば、連続微分可能 continuously differentiable と言う。

注意：関数が連続微分可能なときには、§ 6.9.により、偏微分係数が存在し連続的である。

§ 6.11. 定義：表記方法

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 $Y \subset \mathbb{R}$ とし、関数 $f: X \rightarrow Y$ を考える。 n 次元ベクトル $f'(x^*)$ は f の x^* における gradient vector と呼ばれる。以下では f_{x^*} と表記。 $f'(x_0)$ であれば f_0' と表記。

§ 6.12. 定義：第 2 次偏導関数

f / x_i は、the first-order partial derivative 第 1 次偏微分係数・偏導関数と呼ばれることがある。 $f(x) / x_i$ は、 x の関数であるから、これの偏導関数を定義できる。これは the second-order partial derivative 第 2 次偏導関数と呼び、 $f^2(x) / x_i^2$ あるいは $f^2(x) / x_i x_j$ と表記。

同様に、the third-order 第 3 次偏導関数なども定義できる。

§ 6.13. 定義

関数 f の domain で、第 q 次偏導関数が存在して連続的であれば、『 f は a function of class $C^{(q)}$ あるいは C^q 』と表記し、 q 階連続微分可能と言う。ただし、 C^0 は単なる連続関数のことである。

したがって、§ 6.8. は『 $f \in C^{(1)}$ f が連続的に微分可能』と表わせるし、 $f \in C^{(1)}$ $f \in C^{(0)}$ 』と表わせる。

$f \in C^{(2)}$ は twice continuously differentiable 2 階連続微分可能と言う。

§ 6.14.定理：Young の定理

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X は開集合、 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 f を 2 階連続微分可能とすると、

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

§ 6.15.定義：m個の関数の微分可能

$X \subset \mathbb{R}^n$ 。関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ は、 X の interior point 内点 x_0 で、以下の条件を満たすとき、 x_0 で微分可能 differentiable と言う：

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ 、 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 、 $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$ が存在し、

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{式 6.1}$$

ただし、 $f(\cdot)$ 、 $o(\cdot)$ は m 次元ベクター、 h は n 次元ベクター（式 6.1 は m 行の式を表示している）。

§ 6.16.定理：

もし存在すれば、 A はユニークである。

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ であるから、
 $f(x)$ が x_0 で微分可能 $\iff i : f_i$ が x_0 で微分可能

§ 6.17.定義：ヤコビアン

行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x)/x_1 & \dots & f_1(x)/x_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_m(x)/x_1 & \dots & f_m(x)/x_n \end{pmatrix}$$

となり、これは f の x_0 における Jacobian matrix ヤコビアン行列と呼ばれる。

§ 6.18.定義：

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X は convex set とする。関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は、以下の条件を満たすとき concave function 凹関数と呼ばれる：

$(x, y \in X \text{ \& } \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1)$
 $f[\lambda x + (1-\lambda)y] \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

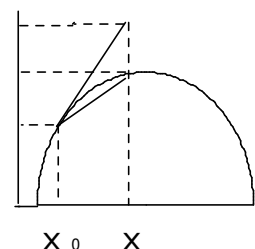
また、以下の条件を満たすとき strictly concave function 狭義凹関数と呼ばれる：

$(x, y \in X \text{ \& } \lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1)$
 $f[\lambda x + (1-\lambda)y] > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

§ 6.19.注意：

不等号が反対の場合には、concave が convex 凸となる。

$X \subset \mathbb{R}$ の場合には、strictly concave function は上に丸い曲線 concave function の場合には直線部分があっても OK となる



§ 6.20.定理：凹関数と gradient vector の関係

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X は開集合とする。関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は微分可能とする。このときには
 f が concave $\iff f_{x_0}'(x - x_0) \geq f(x) - f(x_0)$

f が strictly concave $f_{x^0}(x - x_0) > f(x) - f(x_0)$
 ただし、 f_{x^0} は f の x_0 における gradient vector。
 また、convex の場合には、符号が反対になる。

§ 6.21.定理：陰関数の定理

$f_i(x, y), i=1, \dots, n$ を連続微分可能で $f_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ なる関数とし、ある点 (x^*, y^*) で、条件 $f_i(x^*, y^*)=0, i=1, \dots, n$ を満たすものとする。ただし、 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ である。このときには、以下の命題が満たされる
 ヤコビアン行列 $[f_i / x_j]$ が nonsingular
 ユニークな連続微分可能な n 次元ベクター関数 h が存在し、 $x^* = h(y^*)$ 、かつ、
 $[i: i=1, \dots, n]: f_i(h(y), y)=0$
 ただし、 $V(y^*)$ は y^* のある近傍（たとえば open ball $B_r(y^*)$ ）を考える。

注意：これは local な関係で、たとえば、 $(x, y)=0$ から、 $y = y(x)$ を global に定義することはできない。

§ 6.22.定理：Taylor expansion

$X \subset \mathbb{R}^n, X$ は開集合とする。関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は、 $x \in X$ で k 階連続微分可能とする（このときには k 次偏微分係数を持つ）。このときには、 $x \in X$ について、ある $x_0 \in X$ において以下のように展開することができる：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + (1/2)f''(x_0)h^2 + \dots + (1/(k-1)!)f^{(k-1)}(x_0)h^{k-1} + o(h^k)$$

ただし、 $h = x - x_0$ 。また、この展開は $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の関数にも拡張できる。

§ 6.23.定義：マクロ - リン展開？

Taylor expansion で、 $x^0 = 0$ であれば

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + (1/2)f''(0)x^2 + \dots + (1/(k-1)!)f^{(k-1)}(0)x^{k-1} + o(x^k)$$

となり、マクロ - リン展開と言う。たとえば、 e^x のケースで 2 次導関数まで展開すると

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^3)$$

となる。 $x = 0.1$ の場合には e^x は 1.10517 で、2 次近似すると 1.105 となる。

§ 6.24.注意：

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 $f(x)$ が x^* で local maximum(minimum)と達成すれば、§ 7.6. より、 $f'(x^*)=0$ となる。関数 f を 2 階微分可能として、 x^* で Taylor 展開すると

$$f(x) = f(x^*) + (1/2)f''(x^*)h^2 + o(h^3)$$

したがって、 $f''(x^*) > 0$ が最大のために必要条件となるし、 $f''(x^*) < 0$ は十分条件となる(minimum のときには $f''(x^*) < 0$ と $f''(x^*) > 0$ となる)。これらを the second order condition 2 階の条件と言う。

第 7 章制約なし最大化問題 maximum problem の解法

§ 7.1.注意：最大化と最小化

ここでは、最大化問題を分析するが、最小化問題も基本的には同じである。

たとえば、関数 f の最大化は、関数 $-f$ の最小化である。

maximum と minimum をまとめて extremum(極値)と言う。

§ 7.2.定義：local maximum

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は、以下の条件を満たすとき、 $x^* \in X$ で local

maximum を達成すると言う：

$$[\text{open ball } B(x^*)] \cap [x \in B(x^*) \cap X] : f(x^*) \geq f(x)$$

もし、

$$[\text{open ball } B(x^*)] \cap [x \in B(x^*) \cap X] : f(x^*) > f(x)$$

であれば、unique local maximum を達成すると言う。

注意：open ball が定義されるためには、metric space でなければならないが、open set とすれば、topological space でも定義できる。

§ 7.3.定義： global maximum

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は、以下の条件を満たすとき、 $x^* \in X$ で global maximum を達成すると言う：

$$(x \in X) : f(x^*) \geq f(x)$$

もし、不等号が $>$ であれば、unique global maximum を達成すると言う。

§ 7.4.定理：凹関数と global maximum

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が concave function であれば、 X にある f の local maximum は、 X における f の global maximum となる。

§ 7.5.定理：maximum 集合の convexity

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は concave とする。 f が、集合 $S \subset X$ で global maximum を達成するとすれば、 S は convex set となる。

集合 S が global minimum を達成する場合でも同様である。

§ 7.6.定理：

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 、微分可能とする。 f が x^* で local maximum を達成するとすれば、 $f'(x^*) = 0$ 。

例： $f(x) = ax - bx^2$ の場合には、 $f'(x) = a - 2bx = 0$ となる。したがって、この関数が concave であれば $x = a/2b$ で最大値をとる。

§ 7.7.注意：

$f'(x^*) = 0$ は、local maximum(もしくは local minimum) のための 必要条件で、the first-order condition 第1階の条件と言われる。

これは十分条件ではない。たとえば、 $f = x^3$ は $x=0$ で $f'=0$ となるが、extremum を達成しない。

§ 7.8.定理：

$X \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は 微分可能で concave とする。このときには以下の命題が成立する：

$$f_{x^*} = 0 \quad f \text{ が } x = x^* \text{ で global maximum を達成する}$$

ただし、 f_{x^*} は f の x^* における gradient vector。

更に、 f が strictly concave function であれば、以下の命題が成立する：

$$f_{x^*} = 0 \quad f \text{ が } x = x^* \text{ で unique global maximum を達成する}$$

例： $f(x, y) = ax - bx^2 - cy^2$ の場合には、 $f_x(x, y) = a - 2bx = 0$ 、また、 $f_y(x, y) = -2cy = 0$ となる。したがって、この関数が concave であれば、 $(x, y) = (a/2b, 0)$ で最大値をとる。

第8章.Quadratic Forms 2次形式、 Hessian、 Second-order condition

§ 8.1.定義

$A = [a_{ij}]$ を $n \times n$ 行列 (n 次行列と呼ぶ) とする。この行列から i 行と j 列を取り除くと、minor 小行列? と呼ばれる $n - 1$ 次行列となる。これを A_{ij} と表記する。

§ 8.2.定義:

行列の要素 a_{ij} の余因子 cofactor A_{ij} を以下のように定義する:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

§ 8.3.定理: ラプラス Laplace 展開

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

$$= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

例:
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

§ 8.4.定理: 行列 A が nonsingular $\det A \neq 0$

§ 8.5.定義:

行列 a_{ij} の位置に余因子 A_{ij} を置き、転置するとできる行列 $[A_{ji}]$ を行列 A の Adjoint Matrix 随伴行列と呼ぶ:

§ 8.6.定理: 逆行列

$$A^{-1} = [A_{ji}] / \det A$$

$$A A^{-1} = I$$

例: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の場合、

余因子は $A_{11}=1, A_{12}=-1, A_{21}=0, A_{22}=2$ 、また、 $\det A = 2$ で、逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 2/2 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

§ 8.7.定理: クラメル Cramer's rule

A を $n \times n$ 行列、 x と b を n 次ベクトルとする。このとき $Ax = b$ とすると、 A が nonsingular であれば $x = A^{-1}b$ となる。これは以下のようになる:

$$x_j = D_j / \det A$$

ただし、 D_j は行列式 $\det A$ の j 列目を b で置き換えた行列式

たとえば、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ の場合は } x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{21} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\det A}$$

例: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ なら $x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{1}$

§ 8.8.定義:

$n \times n$ 対称行列 $A = [a_{ij}]$ 、 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 、と n 次ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ を考える。このとき、以下の式は (real) quadratic form 2 次形式と呼ばれる：

$$Q(x) = f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^T A x$$

この関数は $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ である。

例：A が 2×2 行列であれば

$$Q(x) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1$$

対称行列であれば、 $a_{12} = a_{21}$ で

$$Q(x) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{12} x_1 x_2$$

§ 8.9. 定義：

$Q(x)$ を linear space X における quadratic form とする。このとき、 Q は

$(x \in X, x \neq 0) : Q(x) < 0$ であれば negative definite (負の定符号)

$(x \in X, x \neq 0) : Q(x) > 0$ であれば positive definite (正の定符号)

$(x \in X) : Q(x) \leq 0$ であれば negative semidefinite (負の半定符号)

$(x \in X) : Q(x) \geq 0$ であれば positive semidefinite (正の半定符号)

と呼ばれる。

$Q(x) = x^T A x$ であれば、行列 A 自身がそのように呼ばれる。

例：A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $x = (x_1, x_2)$

であれば $Q = x^T A x = x_1^2 + x_2^2$ 。よって、 $x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 : Q > 0$ となって positive definite。

§ 8.10. 定義：

$n \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ とし、以下の determinant 行列式を定義する：

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

このとき、 $D_1, D_2, D_3, D_4, \dots$ を A の successive principal minors 連続的な主 (首座) 小行列式と呼ぶ。同様に、 $k \times k$ 行列

$$D_{-k} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \dots & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & \dots & a_{jk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ki} & a_{kj} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

を定義する。ただし、 (i, j, \dots, k) は $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ からの任意に取り出した k 個の順列 (順序も考慮にいた k 個の数字の組合せ)。このときには、この行列は A の principal minor 主 (首座) 小行列式と呼ぶ。

注意：すべての D_{-n} は $\det A$ と同じ符号を持つ。

§ 8.11. 例：

A $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ であれば、 D_{-1} は a_{11} と a_{22} 、 D_{-2} は A と $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}$

§ 8.12. 定理：

$Q(x) = x^T A x$ 、 $x \in \mathbb{R}^n$ を実数値 2 次形式 real quadratic form とする。

$Q(x)$ が positive definite $D_k > 0$ 、 $k = 1, 2, \dots, n$ 。

$Q(x)$ が negative definite $(-1)^k D_k > 0$ 、 $k = 1, 2, \dots, n$ 。

$Q(x)$ が positive semidefinite すべての $D_k \geq 0$ 、 $k = 1, 2, \dots, n$ 。

$Q(x)$ が negative semidefinite すべての $(-1)^k D_k \geq 0$ 、 $k = 1, 2, \dots, n$ 。

注意：

positive semidefinite $Q(x)$ が positive definite A が nonsingular

negative semidefinite $Q(x)$ が negative definite A が nonsingular

§ 8.13.定義：

開集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ とする。微分可能な関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は、以下の条件を満たすとき、 $x_0 \in X$ で 2 階微分可能と言う： n -ベクター a と $n \times n$ 行列 A が存在し

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = a^T h + (1/2) h^T A h + o(\|h\|^2) \quad \text{式 8.1}$$

となる。ただし、 h は n -ベクター、 $o(\|h\|^2)$ は Landau's o-symbol で

$$\lim_{h \rightarrow 0} o(\|h\|^2) / \|h\|^2 = 0$$

ここで、 n -ベクター a は、 f の x_0 における the first derivative 第 1 階の微分係数。行列 A は、 f の x_0 における the second derivative 第 2 階の微分係数。 $a^T h \in \mathbb{R}$ は、 f の x_0 における the first differential 第 1 階の微分で、 df あるいは $d f$ と表記。 $h^T A h \in \mathbb{R}$ は、 f の x_0 における the second differential 第 2 階の微分で、 $d^2 f$ あるいは $d^2 f$ と表記。

注意：式 8.1 は、関数 f を 2 次微分までテーラー展開したもの。

§ 8.14.定義：ヘシアン行列

開集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ とする。 $x^* \in X$ で関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が 2 階微分可能であれば、 x^* で第 2 階の偏微分係数 $\partial^2 f(x) / \partial x_i \partial x_j$ が存在する。第 2 階の微分係数 $A = (f''(x^*))$ あるいは f'' と表記) は以下ようになる：

$$A = \begin{pmatrix} \partial^2 f(x) / \partial x_1^2 & \dots & \partial^2 f(x) / \partial x_1 \partial x_n \\ \partial^2 f(x) / \partial x_2 \partial x_1 & \dots & \partial^2 f(x) / \partial x_2 \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f(x) / \partial x_n \partial x_1 & \dots & \partial^2 f(x) / \partial x_n^2 \end{pmatrix}$$

これは、 f の x^* における Hessian matrix と呼ばれる。

§ 8.15.注意：ヘシアンは対称行列

第 2 階偏微分が x^* で連続的であれば、ヘシアン f'' も x^* で連続的となり、

$$\partial^2 f(x) / \partial x_i \partial x_j = \partial^2 f(x) / \partial x_j \partial x_i$$

となるため、Hessian matrix は対称行列となる。

§ 8.16.定理：

convex な開集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ を考える。 X 全体で、関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が 2 階連続微分可能とし、 $f''(x)$ を Hessian matrix とする。

$x \in X$: $f''(x)$ が negative semidefinite

関数 f が X で concave

$x \in X$: $f''(x)$ が negative definite

関数 f が X で strictly concave

$x \in X$: $f''(x)$ が positive semidefinite

関数 f が X で convex

$x \in X$: $f''(x)$ が positive definite

関数 f が X で strictly convex

§ 8.17.注意：

上記の 1 と 2 の反対は成立しない。たとえば、

$$f(x) = -(x-1)^4 \quad x \in \mathbb{R}$$

は、strictly concave だが、 $f''(1) = 0$ となる。

§ 8.18.定理：

convex な開集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ を考える。 X で全体で、関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が 2 階連続微分可能とし、 $f''(x) = [a_{ij}]$ を Hessian matrix とする (ただし、 $x \in X$)。

また、 f'' の successive principal minors を D_k 、principal minors を \tilde{D}_k とする。

すべての $(-1)^k \tilde{D}_k \leq 0$ 、 $k = 1, 2, \dots, n$ 関数 f が X で concave。

$(-1)^k \tilde{D}_k < 0$ 、 $k = 1, 2, \dots, n$ 関数 f が X で strictly concave。

すべての $\tilde{D}_k \geq 0$ 、 $k = 1, 2, \dots, n$ 関数 f が X で convex。

$\tilde{D}_k > 0$ 、 $k = 1, 2, \dots, n$ 関数 f が X で strictly convex。

§ 8.19.定理：最大化 2 階条件と negative definite

開集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ を考える。 $x_0 \in X$ で、関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が 2 階連続微分可能、 $f''(x_0)$ を x_0 における Hessian matrix とする。

The second-order necessary condition 第 2 階の必要条件

f が x^* で local maximum $f'(x^*) = 0$ & $f''(x^*)$ は negative semidefinite

The second-order sufficient condition 第 2 階の十分条件

$f'(x^*) = 0$ & $f''(x^*)$ は negative definite

(open ball $B(x^*) \cap \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$) $(x \in B(x^*))$
 $: f(x^*) - f(x) \geq \frac{1}{2} (x - x^*)^T f''(x^*) (x - x^*)$

第 9 章. concave programming 凹計画法：コンケーヴプログラミング

§ 9.1.定義 (§ 6.18.再掲)：

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X は convex set。以下のとき、関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は concave function と呼ばれる：

$(x, y \in X \text{ \& } \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1)$
 $: f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

また、以下の条件を満たすとき strictly concave function と呼ばれる：

$(x, y \in X \text{ \& } \lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1)$
 $: f[\lambda x + (1 - \lambda)y] > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

§ 9.2.定理：

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X は convex set とする。関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は concave function とする。

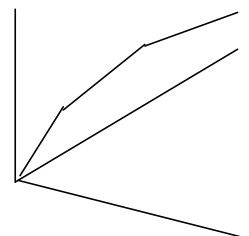
集合 $S = \{x : x \in X, \lambda \in \mathbb{R}, f(x) \geq \lambda\}$ は convex set

concave function の非負線形結合 $\sum \lambda_i f_i$ 、 \mathbb{R} も concave function となる。

すべての concave function は X の interior で連続的である。

f が concave

集合 $\{(x, \lambda) : x \in X, \lambda \in \mathbb{R}, f(x) \geq \lambda\}$ が convex



§ 9.3.注意：

集合 $S = \{x : x \in X, \lambda \in \mathbb{R}, f(x) \geq \lambda\}$ は upper contour set と呼ばれる。

§ 9.2. の反対は成立しない upper contour set が convex でも concave function とはかぎらない。

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $i = 1, 2, \dots, m$ 、が concave function とすると、

集合 $C = \{x : x \in X, g_j(x) \geq 0, j=1, 2, \dots, m\}$ は convex set。

その理由は、 C は convex set の共通集合であるから。

§ 9.4.定義：

条件(CNV) $X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X はconvex setとする。関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と関数 $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $i=1, \dots, m$ 、はすべてconcave functionとする。

条件(MAX) x^* は、制約条件 $g_i(x) \leq 0$ 、 $i=1, \dots, m$ 、のもとで、 X での、 $f(x)$ の最大値を達成するとする。

条件(SLT) $[x' \in X] : g_i(x') > 0$ 、 $i=1, \dots, m$

これはスレーターの条件 Slater condition と呼ばれる。

\mathbb{R}^m を \mathbb{R}^m の非負空間とし、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ を \mathbb{R}^m の点とし、Lagrangian ラグランジュ関数 $L: X \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定義する：

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

条件(SDL) $(x \in X \text{ \& } \lambda \in \mathbb{R}^m) : (x, \lambda^*) \geq (x^*, \lambda^*) \geq (x^*, \lambda)$

すなわち、

点 (x^*, λ^*) は、 $X \times \mathbb{R}^m$ 空間上の、関数 $L(x, \lambda)$ の鞍点 saddle point となっている。

§ 9.5. 定理：Kuhn-Tucker-Uzawa

条件(CNV)、(MAX)、(SLT)

$\lambda_i^* \geq 0$ 、 $i=1, \dots, m$ 、が存在し、条件(SDL)が成立する

§ 9.6.注意：

Slater 条件がないと上記の定理は成立しない。たとえば、

$$\begin{aligned} \max_x f(x) &= x \\ \text{sub. to } g(x) &= -x^2 \leq 0 \text{ \& } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

を考える。この例では(SLT)は満たされないが、 $x=0$ で最大値をとる。しかし点 $(0, \lambda)$ では、 $g(x) = 0$ となるため、関数 $L = f(x) + \lambda g(x)$ の鞍点とならない。

§ 9.7.定理：Kuhn-Tucker-Uzawa の反対方向

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と関数 $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $i=1, \dots, m$ 、とする。

(SDL) $[(x^*, \lambda^*) \in X \times \mathbb{R}^m] : (x \in X \text{ \& } \lambda \in \mathbb{R}^m) : (x, \lambda^*) \geq (x^*, \lambda^*) \geq (x^*, \lambda)$

(MAX) x^* は、制約条件 $g_i(x) \leq 0$ のもとで、 X での $f(x)$ の最大値を達成。

また、条件 $\lambda^* g(x^*) = 0$ ($\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad i: \lambda_i^* g_i(x^*) = 0$) が満たされる。

注意： X がconvex setの必要はない。また、 f 、 g_i がconcave functionである必要もない。

§ 9.8.定理：Kuhn-Tucker-Uzawa のまとめ

§ 9.5.と § 9.7.の2定理より以下の定理を得る：

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X はconvex setとする。関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $i=1, \dots, m$ 、はすべてconcave functionとする。また、以下のSlaterの条件を満たすものとする：

(SLT) $x' \in X : g_i(x') > 0$ 、 $i=1, \dots, m$

このときには

(MAX) { 制約条件 $g_i(x) \leq 0$ 、 $i=1, \dots, m$ のもとで、 X における、 $f(x)$ の最大値を達成する x^* が存在する }

(SDL) { $(\lambda^* \geq 0) : (x \in X \text{ \& } \lambda \in \mathbb{R}^m) : (x, \lambda^*) \geq (x^*, \lambda^*) \geq (x^*, \lambda)$ }

第10章. 非線形計画法:

§ 10.1. 定義: FOC = First-order condition

条件(DIF) $X \subset \mathbb{R}^n$, X は開集合とする。 f と $g_i, i=1, \dots, m$ を微分可能な関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ とする。

条件(FOC) $[(x^*, \lambda^*) \in X \times \mathbb{R}^m] : f_{x^*} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_{x^*} = 0 \quad \& \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g(x^*) = 0$
ただし、

$$f_{x^*} = f'(x^*), \quad g_{x^*} = g'(x^*).$$

注意:

条件 $f_{x^*} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_{x^*} = 0$ は、

$$L(x) = L(x, \lambda^*) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x)$$

とすると、

$$L(x)/x_i|_{x=x^*} = 0, \quad i=1, \dots, n$$

のことである。

§ 10.2. 定理: SDL \iff FOC

$X \subset \mathbb{R}^n$, X は開集合とする。 f と $g_i, i=1, \dots, m$ を微分可能な関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ とする(これはDIFのこと)。このときには以下の命題が満たされる:

(SDL) \iff (FOC)

(CNV)が成立すれば、(FOC) \implies (SDL)

§ 10.3. 定理: MAX \iff FOC

$X \subset \mathbb{R}^n$, X はconvexな開集合とする。 f と $g_i, i=1, \dots, m$ を微分可能でconcaveな関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ とする(これはDIF + CNV)。また、Slater条件 = (SLT)が成立するものとする。このときには、

(MAX) \iff (FOC)

§ 10.4. まとめ:



第11章. Arrow-Hurwicz-Uzawa 定理と非線形計画法のまとめ

§ 11.1. 定義: LMAX

(LMAX) $(x^* \in X) : f(x)$ は、制約条件 $g_i(x) \leq 0$ のもとで、 x^* において local maximum を達成する。すなわち

$[\text{open ball } B(x^*)] \cap [x \in A, A = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m\}]$

C は the constraint set $= \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m\} : f(x^*) \geq f(x)$

§ 11.2. 定理: **Arrow-Hurwicz-Uzawa** (Local な必要条件)

$X \subset \mathbb{R}^n$, X はconvexな開集合。条件DIFと下記の ~ のいずれかの条件が満たされるときには (LMAX) \iff (FOC) が成立する。

条件(AHU)

関数 $g_i(x), i=1, \dots, m$, がconvex function

関数 $g_i(x), i=1, \dots, m$, が線形関数

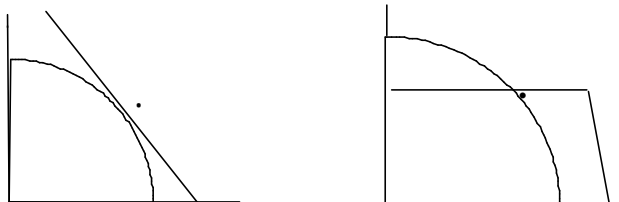
関数 $g_i(x), i=1, \dots, m$, がconcave functionで、最適点 x^* で制約が有効になる i について(すなわち、 $g_i(x^*) = 0$ となる i について)

g_i が線形の場合は、 $g_i(x') \leq 0$

g_i が非線形のときには、 $g_i(x') > 0$ となるような x' が存在する (条件 S L T の一般化)。

the constraint set $C = \{x : x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m\}$ が convex で、interior point を持ち、最適点 x^* で制約が有効になる (すなわち、 $g_i(x^*) = 0$ となる) g_i については、 $g_i'(x^*) \neq 0$ 。すなわち、 $(g_i'/x_1, \dots, g_i'/x_n) \neq 0_n$ 。

Rank condition : 最適点 x^* で制約が有効になる g_i による行列 $[g_i'(x^*)]$ の rank が、制約が有効となる g_i の数に等しい。ただし、 $n \times k$ 行列の rank とは、linearly independent な列の最大値 (これは linearly independent な行の最大値に等しくなる)。



§ 11.3.注意 :

concavity: 上記の と では関数 g の concavity や convexity を仮定していない。

内点問題 : 条件 $f_x^* + \lambda^* g_x^* = 0$ が成立するためには、 x^* は X の interior point でなければならない。たとえば、

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) &= 1 - x^2 \\ \text{sub. to } x &\leq 1, \quad 0 \end{aligned}$$

では、 $f(x)$ の domain X は $[-1, 1]$ となる。したがって、 $C = \{1\}$ で、この最大化問題の解は $x^* = 1$ となるが、 $f'(x)$ は $x = 1$ では、1 が境界であるため定義されていない。

§ 11.4.定理 : L M A X M A X S D L F O C

$X = \mathbb{R}^n$ で、関数 $f(x)$ も $g_i(x)$ 、 $i=1, \dots, m$ も微分可能な concave function で、Slater 条件が満たされれば、

$$\text{L M A X M A X S D L F O C}$$

となる。ただし、関数 $g_i(x)$ 、 $i=1, \dots, m$ がすべて線形であれば、S L T 条件は不必要になる。

§ 11.5.定理 : 非負条件

制約付き最大化問題 : $\max_x f(x)$ subject to $g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m, x \geq 0$ 、を考える。このとき

条件 (M A X +) $x^* \in \mathbb{R}^n$ は、制約条件 $g_i(x) \leq 0$ と非負条件 $x \geq 0$ のもとで、 X で $f(x)$ の最大値を達成する

が成立するときには、F O C 条件は以下ようになる :

$$\begin{aligned} \text{条件 (F O C +)} \quad & \left[(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \right] : \\ & f_x^* + \sum \lambda_i^* g_{x_i}^* = 0, \quad (f_x^* + \sum \lambda_i^* g_{x_i}^*) x^* = 0, \quad \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad g_i(x^*) \leq 0 \end{aligned}$$

注意 : これは $f + \sum \lambda_i g_i + \mu x$ と定義すれば、条件 F O C

$$f_x^* + \sum \lambda_i^* g_{x_i}^* + \mu^* = 0, \quad \lambda_i^* g_i^* = 0, \quad \mu^* x^* = 0, \quad \mu^* \geq 0, \quad \mu^* = 0$$

より導出できる。

§ 11.6.注意 : 上記の F O C + は、ラグランジュ関数を $f + \sum \lambda_i g_i$ とし、 $\lambda^* = f_x(x^*) + \sum \lambda_i^* g_{x_i}(x^*)$

$\lambda^* = f_x(x^*) + \sum \lambda_i^* g_{x_i}(x^*)$ と定義すると、
(F O C +) $\lambda_i^* \geq 0, \mu^* \geq 0, \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, g_i(x^*) \leq 0$ と表わされる。

§ 11.7.比較 :

(F O C +) で、 $x^* > 0$ かつ $\mu^* > 0$ であれば、§ 17.2. で定義される F O C_{old} となる。

f も g_i もすべて concave であれば、 $\mu^* = 0$ であれば、 $\mu^* = 0$ も concave となり、 $\mu^* = 0$ のへ

シアンはXのすべてで、negative semidefinite となる。

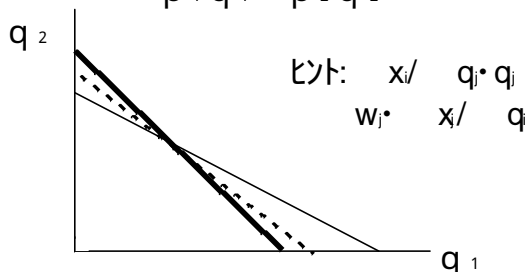
§ 11.8.応用：L P

非線形計画法の応用例として、線形計画法 L P (linear programming) を分析する。

$$\begin{aligned} \max \text{ 問題: } & \max_{q} : p \cdot q & a_{11}q_1 + a_{12}q_2 &= x_1 \text{ ———} \\ & \text{subject to : } Aq \leq x, & a_{21}q_1 + a_{22}q_2 &= x_2 \text{ ———} \\ & q \geq 0, q \in \mathbb{R}^n & p_1q_1 + p_2q_2 &= \text{.....} \end{aligned}$$

ただし、 $p \in \mathbb{R}^n$ 、 $w \in \mathbb{R}^m$ 、 A は $n \times m$ 行列。
この最大化問題に対する双対問題として

$$\begin{aligned} \min \text{ 問題: } & \min_w : w \cdot x \\ & \text{subject to : } A^T w \leq p, \\ & w \geq 0, w \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$



§ 11.9.定理：L P 双対定理

max 問題の最適解 q^* が存在する min 問題の最適解 w^* が存在する
max 問題の最適解が q^* で、min 問題の最適解が w^*

$$w^*(x - Aq^*) = 0, \quad q^*(p - A^T w^*) = 0, \quad p \cdot q^* = x \cdot w^*.$$

§ 11.10.説明：

min 問題を最大化問題にして、2つの最大化問題のラグランジュ関数を定義する：

$$\begin{aligned} (q, w) & \quad p \cdot q + w \cdot (x - Aq) \\ (w, q) & \quad -w \cdot x + q \cdot (A^T w - p) \end{aligned}$$

§ 11.2. によって、A H W 定理が適用できる。したがって、以下の条件を満たす w^*, q^* が存在する：

$$(q, w^*) \quad (q^*, w^*) \quad (q^*, w)$$

ところが、 $w \cdot Aq = q \cdot A^T w$ より、 $-$ であるから、このときには

$$(w, q^*) \quad (w^*, q^*) \quad (w^*, q)$$

となる。したがって が成立する。

また、§ 11.5. の (F O C +) の $g(w^*) = 0$ という条件は、この問題の場合には

$$w^*(x - Aq^*) = q^*(A^T w^* - p) = 0 \quad \text{式 11.1}$$

となる。更に、 $-$ と式 11.1 より、 $p \cdot q^* = x \cdot w^*$ となる。

第 12 章. Quasi-concave programming 擬凹関数の最大化問題

§ 12.1.定義：

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X は convex set.

関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の条件を満たすとき quasi-concave と呼ばれる：

$$(x, x' \in X, 0 \leq t \leq 1) : f(x) \geq f(x') \implies f(tx + (1-t)x') \geq f(x')$$

以下のとき、strictly quasi-concave と呼ばれる。

$$(x, x' \in X, 0 \leq t \leq 1) : f(x) \geq f(x') \implies f(tx + (1-t)x') > f(x')$$

以下のとき、 f は quasi-convex と呼ばれる。

$$(x, x' \in X, 0 \leq t \leq 1) : f(x) \leq f(x') \implies f(tx + (1-t)x') \leq f(x')$$

以下のとき、 f は strictly quasi-convex

$$(x, x' \in X, 0 \leq t \leq 1) : f(x) \leq f(x') \implies f(tx + (1-t)x') < f(x')$$

以下のとき、explicitly quasi-concave と呼ばれる。

関数 f は quasi-concave で、かつ以下の条件を満たす：

$$(x, x' \in X, x \neq x', 0 < t < 1) : f(x) > f(x') \implies f(tx + (1-t)x') > f(x')$$

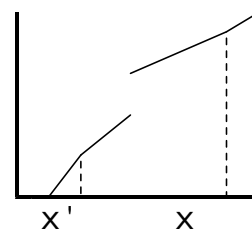
- f が explicitly quasi-concave であれば、explicitly quasi-convex.

§ 12.2.注意

quasi-concave 関数は連続的とはかぎらない。

f が連続関数であれば、explicitly quasi-concave の 2 番目の条件 quasi-concave。連続関数でない場合には、不成立：

例： $x < 0$ のとき $f(x)=0$ ， $x=0$ のとき $f(x)=-1$ は quasi-concave でないが、explicitly quasi-concave の 2 番目の条件を満たす。



§ 12.3.定理

f が quasi-concave $\{x : x \in X, f(x) \geq \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ が convex

f が concave function $\Rightarrow f$ は quasi-concave function

f が concave function $\Rightarrow f$ は explicitly quasi-concave function

f が strictly concave function $\Rightarrow f$ は strictly quasi-concave function

$X \subseteq \mathbb{R}$ のときには、すべての単調増加関数も単調減少関数も strictly quasi-concave。

quasi-concave function の単調非減少関数は quasi-concave。

quasi-concave function が 1 次以下の同次関数 (§ 16.2.参照) なら、concave function。

f が quasi-concave なら $C = \{x : x \in X, f_j(x) \geq 0, j=1,2,\dots,m\}$ は convex

quasi-concave の非負結合は quasi-concave とは限らない (§ 9.2. により concave のときは concave となる)。

例：quasi-concave であるが、concave function でない関数

$Y = L^a K^b$ 、 $a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $a + b > 1$ 、 $L \geq 0$ 、 $K \geq 0$ 。

§ 12.4.注意：

strictly concave \Rightarrow concave

strictly quasi-concave \Rightarrow explicitly quasi-concave \Rightarrow quasi-concave

§ 12.5.注意：無差別曲線の場合には、

strictly quasi-concave \Rightarrow 原点に丸い線、explicitly quasi-concave \Rightarrow 直線部分があっても OK、quasi-concave \Rightarrow 原点に丸い帯状の領域でも OK

§ 12.6.定義：relevant variable 関連変数

制約集合 $C = \{x : x \in \mathbb{R}^n, g_j(x) \leq 0, j=1,\dots,m\}$ において、 $x_i^* > 0$ となるような点 x^* が C に存在するとき、 x_i を relevant variable 関連(使用可能)変数と呼ぶ。

§ 12.7.定理：Arrow-Enthoven (Global な十分条件)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $j=1,\dots,m$ を微分可能な quasi-concave function とする。このときには、以下の条件のどれか 1 つを満たすとき、 $(F \circ C) \Rightarrow (MAX)$

少なくとも 1 つの x_i について $f_{x_i}^* < 0$ となる。ただし、 $f_{x_i}^*$ は $f(x)$ の x_i に関する偏微分係数で、 $x = x^*$ での値。

ある関連変数 x_i に対して、 $f_{x_i}^* > 0$ となる。

x^* の近傍で、関数 f が twice differentiable 2 階微分可能であって、 $f_{x_i}^* = 0$

関数 f が concave function

§ 12.8.注意：

convex set：関数 g_j 、 $j=1,\dots,m$ が quasi-concave でなくても、制約集合 C が convex であれば、上の定理が成立する。

すべての変数が関連変数であれば § 12.7. より、 $f_{x_i}^* = 0$ が条件となる。

§ 12.9.定理：MAX + FOC +

関数 $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $j=1, \dots, m$ を quasi-concave で微分可能とする。また、非負条件を満たす点で Slater condition (S L T) が満たされるとする。このとき、制約が有効なすべての j について $g_j'(x^*) = 0$ となるか、すべての j について関数 $g_j(x)$ が concave であれば、(MAX +) (FOC +) となる。

§ 12.10.定理：global maximum とそのユニーク性

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X は凸集合とする。 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ とする。制約集合 C は凸集合とする。

C の local maximum & f が explicitly quasi-concave global maximum

C の local maximum & f が strictly quasi-concave ユニークな global maximum

したがって、§ 12.4.より

C の local maximum & f が concave global maximum

C の local maximum & f が strictly concave ユニークな global maximum

注意：concave を convex とすると、minimum になる。

§ 12.11.定義：bordered Hessian determinant ヘッセ縁付き行列式

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X は開集合とする。 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ で、ある点 $x_0 \in X$ で 2 階微分可能とする。このときには以下の行列は bordered Hessian matrix ヘッセ縁付き行列と言われる：

$$B = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

ただし、 $f_i = f / x_i$ 、 $f_{ij} = f^2 / x_i x_j$ 、 $i, j=1, \dots, n$ で、 x_0 での値。

$k+1$ 番目の successive principal minor 連続的主小行列式を B_k と表記すると、 B_k は k 番目の bordered Hessian determinant ヘッセ縁付き行列式と言われる：

$$B_k = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1k} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2k} \\ f_k & f_{k1} & f_{k2} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix}$$

ただし、 $k = 1, \dots, n$ である。

§ 12.12.定理：

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ で、2 階連続微分可能とする。

f が quasi-concave $(x = 0) : B_2 = 0, B_3 = 0, \dots, (-1)^n B_n = 0$

$(x \in \mathbb{R}^n) : B_1 < 0, B_2 > 0, B_3 < 0, \dots, (-1)^n B_n > 0$

f は \mathbb{R}^n で strictly quasi-concave

注意：ともに ではない。特に、 で、strictly quasi-concave でも B の nonsingularity は保証できない。

§ 12.13.定理：擬凹関数制約付き凹関数最大化問題の十分条件

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $j=1, \dots, m$ 、を2階微分可能な関数とする。

このとき、 f が concave であれば、(F O C+)と以下の g_j のヘッセ縁付き行列式に関する2階の条件は、(M A X+)のための十分条件となる：

すべての j について

$$\begin{vmatrix} 0 & g_{j1} & g_{j2} \\ g_{j1} & g_{j11} & g_{j12} \\ g_{j2} & g_{j21} & g_{j22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & g_{j1} & g_{j2} & g_{j3} \\ g_{j1} & g_{j11} & g_{j12} & g_{j13} \\ g_{j2} & g_{j21} & g_{j22} & g_{j23} \\ g_{j3} & g_{j31} & g_{j32} & g_{j33} \end{vmatrix} < 0, \dots$$

が成立する(定理 12.7 と定理 12.12)。

第13章. The second-order conditions

§ 13.1.定義：等号・不等号制約付き最大化問題

以下の最大化問題を考える：

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 X は開集合。 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $g_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $h_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ はすべて2階連続微分可能。

Maximize: $f(x)$

Subject to: $g_j(x) = 0$ 、 $j=1, \dots, m$

$h_k(x) = 0$ 、 $k=1, \dots, r$

§ 13.2.定義：rank condition

(R N K)制約が有効となる関数 $g_j(x)$ の指数 j の集合を E とし、そのメンバー数を m_e とする。このときには、以下の $(m_e + r) \times n$ 行列

$$G = [g_j / x_i \quad h_k / x_i]$$

の $x = x^*$ におけるrank階数は $m_e + r$ に等しい。ただし、 $n > m_e + r$ とする。

§ 13.3.定義：Lagrangian

Lagrangianを以下のように定義する：

$$L(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(x) + \sum_{k=1}^r \mu_k^* h_k(x)$$

ただし、 $\lambda_j^* \in \mathbb{R}$ 、 $\mu_k^* \in \mathbb{R}$

(F O C =) $[(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in X \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r]$ ：

$$L_x(x^*) = f_x(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_{jx}(x^*) + \sum_{k=1}^r \mu_k^* h_{kx}(x^*) = 0,$$

$$\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, \quad g_j(x^*) = 0, \quad \mu_k^* h_k(x^*) = 0, \quad h_k(x^*) = 0$$

(L M A X =) $[x^* \in X]$ ： $f(x)$ は、制約 $g_j(x) = 0$ 、 $j=1, \dots, m$ 、と $h_k(x) = 0$ 、 $k=1, \dots, r$ のもとで、 $x = x^*$ で local maximum を達成する。

§ 13.4.定理：the second-order necessary condition

条件(L M A X =)と(R N K)が満たされる 条件(F O C =)が満たされる。また、 $z = x - x^*$ とすると、 $g_j'(x^*)z = 0$ 、 $j \in E$ 、かつ、 $h_k'(x^*)z = 0$ 、 $k=1, \dots, r$ 、となるような z に対して、

$$z^T H z \leq 0$$

ただし、 H はLagrangian L の、 x^* におけるHessian matrix $L''(x^*)$ 。

注意： $L(x) = L(x^*) + L'(x^*)z + \frac{1}{2} z^T L''(x^*)z + \dots$

§ 13.5.定理：the second-order sufficient condition

条件(F O C =)が満たされ、かつ、

$g_j'(x^*)z=0, j \in E$ 、かつ、 $h_k'(x^*)z=0, k=1, \dots, r$ 、となるような z に対して

$$z^T H z < 0$$

となれば、 $[\text{open ball } B(x^*) \cap R, \delta > 0] \cap B(x^*) :$
 $f(x^*) - f(x) \leq -\frac{\delta}{2} \|x - x^*\|^2$

§ 13.6.注意：

f, g_i, h_k がすべて concave function で、かつ、すべての λ^*, μ^* が非負であれば、ラグランジュ関数は、nonnegative linear combination となって、concave となる。したがって、そのヘシアン H は、 $[x - x^*]^T H [x - x^*] : \text{negative semidefinite}$ となり、すべての z に対して、 $z^T H z \leq 0$ となる。実際には μ^* が非負とはかぎらない。

f が concave で制約集合が convex なら、§ 12.7.Arrow-Enthoven 定理 が利用できる。

§ 13.7.定義：

2つの行列を定義する：

$n \times n$ 行列の $A = [a_{ij}]$ と $m \times n$ 行列の $B = [b_{ij}]$ (注意：行列 A はヘシアンで、行列 B はヤコビアン)。これらより、以下の小行列を定義：

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

および

$$B_{mr} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mr} \end{pmatrix}$$

ただし、 $m < n$ とする。

更に、以下の $(m+r) \times (m+r)$ 行列式を定義：

$$C_r = \det \begin{pmatrix} 0 & B_{mr} \\ B'_{mr} & A_r \end{pmatrix}$$

ただし、 $r = m+1, m+2, \dots, n$ で、

0 は $m \times r$ 行列、 B'_{mr} は $b_{ij} = b_{ji}$ とした $r \times m$ 行列 (transpose=転値)。

§ 13.8.定理：2 階の条件と C_r

A を $n \times n$ 対称行列、 B_{mm} を nonsingular 行列とする。このときには

最大化 2 階条件：

$$[x : x^T 0 \text{ \& } Bx=0] : x^T A x < 0 \quad (-1)^r |C_r| > 0, r = m+1, m+2, \dots, n$$

最小化 2 階条件：

$$[x : x^T 0 \text{ \& } Bx=0] : x^T A x > 0 \quad (-1)^m |C_r| > 0, r = m+1, m+2, \dots, n$$

注意：§ 13.4.と § 13.5.の定理の $g_j'(x^*)z=0, j \in E$ と $h_k'(x^*)z=0, k=1, \dots, r$ を行列 B と考えると、the second-order condition と関係付けられる。

§ 13.9.例：

Maximize: $u(x)$

Subject to: $M - p x = 0$

ただし、 $M > 0, p \geq 0$ 。

このケースでは、等号制約条件が1つで $r = 1$ となる。ラグランジュ関数は

$$L = u(x) + \mu^*(M - p \cdot x)$$

ラグランジュ関数 L のヘシアンを $A = L''(x^*)$ 、すなわち $a_{ij} = \partial^2 L / \partial x_i \partial x_j$ とおけば、 x^* が local maximum を達成するためには、 $L'(x^*) = 0$ が成立し、かつ $r = 1$ であるから

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & a_{11} & a_{12} \\ -p_2 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 = \text{sgn}(-1)^{m+1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ -p_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -p_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -p_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 = \text{sgn}(-1)^{m+2}$$

などを満たす。

第14章.ミクロ経済理論の基礎 : 費用最小化と効用最大化

§ 14.1.定義: 費用最小化問題

(CM) Minimize x : $w \cdot x$

Subject to: $f(x) \geq Q, x \geq 0$

ただし、 Q は生産量ベクター、 w は賃金率ベクターで、ともにプラスで一定。

§ 14.2.定義: CMのFOC +

$f_i = f / x_i$ とすると、§ 11.2.のFOC + は

$$-w_i + \lambda^* f_i(x^*) = 0, \quad [-w_i + \lambda^* f_i(x^*)] x_i^* = 0,$$

$$\lambda^* [f(x^*) - Q] = 0, \quad f(x^*) - Q \leq 0, \quad x_i^* \geq 0, \quad w_i \geq 0 \quad \text{式 14.1}$$

となる。これから、要素需要関数 $x = x(w, Q)$ を得る。

§ 14.3.注意:

concave ケース:

Slater 条件: $x' \geq 0: f(x') > Q$ が成立するとする。このときには、生産関数 f が concave であれば、式 14.1 は、§ 11.2.のAHU定理 (Slater 条件)によって、maximumのための必要条件となる。また、関数 $-w \cdot x$ は concave であるから、AE定理 (目的関数が concave) で十分条件にもなる。

quasi-concave ケース: 十分条件

生産関数 f が quasi-concave であれば、制約集合 $S = \{x: x \geq 0, f(x) \geq Q\}$ は convex で、AE定理 (目的関数 $-w \cdot x$ は concave) で、式 14.1 は global maximum の十分条件となる。

quasi-concave ケース: 必要条件

生産関数 f が quasi-concave (制約集合 convex) で、ある i について $f_i(x^*) > 0$ (すなわち限界生産がプラス 制約が有効となる場合)、かつ制約集合 S が内点を持てば、AHU定理で式 14.1 は global maximum の必要条件となる。

コーナー解

ある i について、 $\lambda^* f_i(x^*) < w_i$ となると、式 14.1 の1番目の式で等号が成立せず、 $x_i = 0$ となる。これは corner 解と呼ばれる。

interior 解

すべての x_i について $x_i > 0$ であれば、interior 解で、この場合には、

$$\lambda^* f_i(x^*) = w_i$$

となって、これが要素需要関数 $x_i^* = x_i(w, Q)$ を決定する。

§ 14.4.定理：

すべての i について $x_i > 0$ であれば、interior 解となって費用最小化条件より

$$(i, j, i, j=1, \dots, n) : f_i(x^*) / f_j(x^*) = w_i / w_j$$

を得る。

注意：この条件は限界生産価値均等化条件であり、また、限界費用均等化条件でもある。

§ 14.5.定義：効用最大化問題

(UM) Maximize $x : u(x)$

Subject to: $p \cdot x \leq M, x \geq 0, x \in R^n$

を考える。 $u_i = u / x_i$ とすると、条件 FOC + は

$$u_i(x^*) - p_i = 0, [u_i(x^*) - p_i] x_i^* = 0, (M - p \cdot x^*) = 0, p \cdot x^* - M = 0, x_i^* \geq 0, p_i \geq 0 \quad \text{式 14.2}$$

これらが、需要関数 $x^* = x(p, M)$ を決める。

§ 14.6.注意：ユニーク global maximum

制約条件が線形であるから、A H U 定理の (制約条件が線形) によって、式 14.2 は maximum の必要条件となる。これには効用関数 u が quasi-concave である必要はない。

$u(x)$ が quasi-concave とする。ある i について $u_i(x^*) > 0$ (限界効用がプラス) と仮定すれば、§ 12.7. の Arrow-Enthoven 定理 (関連変数) によって、式 14.2 は global maximum の十分条件となる。したがって、より、式 14.2 は global maximum の必要十分条件となる。

$u(x)$ が strictly quasi-concave であれば、§ 12.10. により、global maximum はユニークとなる。

$u(x)$ が strictly quasi-concave で、ある i について $u_i(x^*) > 0$ となれば、式 14.2 はユニークな global maximum の必要十分条件となる。

§ 14.7.注意：

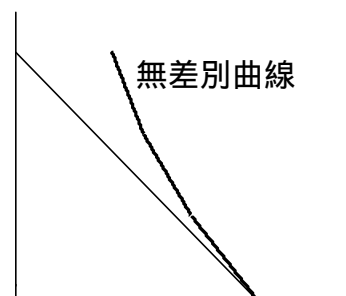
ある 1 つの i について $u_i(x^*) > 0$ であれば、

$p_i > 0, p \cdot x^* = M$ となって全所得を支出する。

$u_i(x^*) > 0$ でも コーナー解

ある i について $x_i^* = 0$ となりえる。

$p_i < 0$ でも分析可能。財の処分費用のこと。



§ 14.8.定理：

すべての x_i について $x_i > 0$ であれば、interior 解で、この場合には、

$$i, j, i, j=1, \dots, n : u_i(x^*) / u_j(x^*) = p_i / p_j$$

注意：加重限界効用均等化条件あるいは限界代替率・価格比率均等化条件。

第 15 章. ミクロ経済理論の基礎 : Envelop 定理、その他

§ 15.1.定義：

関数 $f(x, y), g_j(x, y), j=1, \dots, m$ は、 $R^n \times R^r \rightarrow R$ で連続微分可能とする。ただし、 $x \in R^n$ で、 $y \in R^r$ である。以下の最大化問題を考える：

Maximize: $f(x, y)$

Subject to: $g_j(x, y) \leq 0, j=1, \dots, m$ & $x \geq 0$

この問題のラグランジュ関数を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x, y)$$

とし、 $i : x_i^* > 0$ と $i : x_i^* = 0$ と仮定すると、FOC + は

$$f_x(x^*, \lambda) + \lambda g_x(x^*, \lambda) = 0 \quad \text{式 15.1}$$

$$g(x^*, \lambda) = 0 \quad \text{式 15.2}$$

となる。n+m 個の式があり、n 個の x_i と m 個の λ_i について解くと、

$$x_i^* = x_i(\lambda), \quad \lambda_i^* = \lambda_i \quad \text{式 15.3}$$

を得る。これらを連続微分可能とする。

§ 15.2.定義：

maximum value function として、 $F(\lambda) = f[x(\lambda), \lambda]$ を定義する。

また、ラグランジュ関数に式 15.3 を代入すると

$$L(x, \lambda) = f[x(\lambda), \lambda] + \lambda g[x(\lambda), \lambda]$$

を得る。

例：§ 14.5.の(UM)の場合

(UM)問題の解を $x(p, M)$ 、 $\lambda(p, M)$ とする。明らかに、 $\lambda(p, M)$ 。

$F(\lambda) = u(x(p, M))$ 間接効用関数

$$u(x, \lambda) = u(x) + \lambda(M - px) \quad \text{式 15.4}$$

$$L(x, \lambda) = u[x(p, M)] + \lambda(p, M)[M - px(p, M)]$$

となる。

§ 15.3.定理：Envelope 定理

$\lambda_i : x_i^* > 0$ と $\lambda_i^* > 0$ とする。また、 f 、 g 、 F が連続微分可能とすると

$$F(\lambda)/\lambda_k = L(\lambda)/\lambda_k = g_{\lambda_k}$$

すなわち、

F が目的関数に与える影響 = L がラグランジュ関数に与える全体的影響

= L がラグランジュ関数に与える部分的影響 (x と λ が一定)。

証明： $F = f_x \cdot x + \lambda \cdot g_x \cdot x = f_x \cdot x + g \cdot \lambda +$

= 式 15.1 と式 15.2 による

$$F = f_x \cdot x + f$$

$$= -\lambda \cdot g_x \cdot x + f \quad \text{式 15.1 による}$$

$$= -\lambda \cdot g + f \quad \text{式 15.2 と陰関数定理 } x = -g_x/g \text{ による}$$

$$= \quad \text{Q E D}$$

例：(UM)の場合には、たとえば、 M で微分すると

$$F(\lambda)/\lambda_k = L(\lambda)/\lambda_k = g_{\lambda_k}$$

は $u_M = u'_x M + \lambda \cdot (p x - M) + (p x_M - 1) =$

となる。すなわち、 λ は貨幣の限界効用に等しい。

§ 15.4.定義：

以下では、(UM)問題を経済学的に分析する。

ただし、 $p > 0$ 、 λ_i ：最適点で限界効用がプラス ($u_{\lambda_i}(x) > 0$)。この場合の maximum value function は indirect utility function 間接効用関数と呼ばれる：

$$U(p, M) = u[x(p, M)]$$

§ 15.5.定理：

$u(x) + \lambda(M - px)$ であるから

Envelope 定理を使うと $F =$ より

$$U/M = \lambda(p, M) \quad \text{式 15.5}$$

すなわち、ラグランジュ乗数は貨幣の限界効用。

同様にして $F_{p_j} = -x_j$ より

$$U/p_j = -x_j < 0$$

式 15.6

よって、価格上昇は効用を低下する。

これら2式(式 15.5 と式 15.6)より を消去すると、以下の Roy's Identity を得る：

$$U/p_j = -x_j \quad U/M$$

あるいは

$$x_j = -(U/p_j) / (U/M)$$

これは需要関数そのものである。

§ 15.6.応用例：Shadow price

Maximize: $f(x)$

Subject to: $g_j(x) \leq 0, j=1, \dots, m$ & $x \in R^n$

を考え、 x^* を解、 λ_j をラグランジュ乗数とすると、Envelope 定理により

$$F'(x^*)/p_j = -x_j^*, j=1, \dots, m$$

したがって、 λ_j は、 g_j が1単位減少したときの maximum value function の減少分であり、これは shadow price と呼ばれる。

§ 15.7.応用例：費用最小化問題

§ 14.1.の(CM)問題を考える。ただし $w > 0$ 、 i ：最適点で限界生産性は正、すなわち $f_i(x) > 0$ と仮定し、このときの解を $x = x(w, Q)$ 、 $C = C(w, Q)$ とする(以下では、最適値を示す*印を省略する)。また、maximum value function を定義すると、以下の最小費用関数を得る：

$$C(w, Q) = \min_x \{w \cdot x \mid f(x) \geq Q\}$$

また、ラグランジュ関数は

$$L(x, \lambda, w, Q) = w \cdot x + \lambda [f(x) - Q]$$

§ 15.8.定理：Shephard-Mckenzie lemma

Envelope 定理を使うと

$$C/Q = C(w, Q)/Q > 0$$

$$C/w_i = x_i(w, Q) > 0$$

式 15.7

1 番目は、shadow price は Q の限界費用に等しいことを示す。

2 番目の関係を Shephard lemma あるいは Shephard-Mckenzie lemma と呼ぶ。この式の右辺は生産者の要素需要関数で、賃金率の上昇は、要素投入量に等しい費用増加をもたらすことを示す。

第16章.ミクロ経済理論の基礎：いろいろな定理

§ 16.1.Young's Theorem ヤングの定理(再掲)

$X \subset R^n$ 、 X は開集合、 $f : X \rightarrow R$ とする。 f を2階連続微分可能とすると、

$$i \neq j \text{ \& } x \in X : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

§ 16.2.定義：同次関数

$X \subset R^n$ 、 X は開集合、 $f : X \rightarrow R$ とする。以下の条件を満たすとき、 m 次同次関数と言う：

$$(t \in R \text{ \& } x \in X) : f(tx) = t^m f(x)$$

§ 16.3.定理：同次関数の性質

関数 $f : X \rightarrow R$ が、連続微分可能で、 m 次同次ならば

$f_{x_i} = f(x)/x_i$ は $m-1$ 次同次関数

Euler's Theorem オイラーの定理: $x_i f_{x_i} = m f(x)$

例: 0 次同次関数: $x_i f_{x_i} = 0$, 1 次同次関数: $x_i f_{x_i} = f$

§ 16.4.定義: Samuelson's reciprocity relations

式 15.7 の上で定義されている関数 C を 2 階連続微分可能とすると、ヤングの定理により

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial w_i \partial w_j} &= \frac{\partial^2 C}{\partial w_j \partial w_i} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial Q \partial w_j} &= \frac{\partial^2 C}{\partial w_j \partial Q} \end{aligned} \quad \text{式 16.1}$$

これより、以下のような Samuelson's reciprocity relations を得る: i と j について

$$\begin{aligned} x_j / w_i &= x_i / w_j \\ x_i / Q &= x_j / w_j \end{aligned} \quad \text{式 16.2}$$

この 1 番目の関係は、要素価格が他の生産要素に与える影響は対称的であることを示す。

§ 16.5.定義: substitution matrix

$n \times n$ 行列 $S = [x_i / w_j]$ 、あるいは $S = [\partial^2 C / \partial w_i \partial w_j]$ すなわち

$$S = \begin{bmatrix} x_1 / w_1 & x_1 / w_2 & \dots & x_1 / w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n / w_1 & x_n / w_2 & \dots & x_n / w_n \end{bmatrix}$$

を考えると、これは式 16.1 より対称行列で、 w の関数: $S(w)$ 。

§ 16.6.定理:

式 16.1 より、行列 S は対称行列である。

要素需要関数 $x(w, Q)$ は、明らかに w に関して 0 次同次であるから、オイラー定理によって、 $\sum_j (x_j / w_j) \cdot w_j = 0$ すなわち $S(w)w = 0$ 。また、対称行列のため、 $w S(w) = 0$ すなわち $\sum_j w_j \cdot (x_i / w_j) = 0$ 。

費用関数 $C(w, Q) = w x(w, Q)$ は、明らかに w に関して 1 次同次である。また、 w に関して concave となる(証明略: 高山[1984], 2nd, p.141)。よって行列 S は negative semidefinite で、 $x_i / w_i \geq 0$ 。また、 $z : z S z \leq 0$ となる。

$$[z \in \mathbb{R}^n : z \geq 0 \text{ \& \& } (R : z = w)] : z S(w) z < 0$$

$\text{rank } S = n-1$, & $i : x_{ii} < 0$, & $n-1$ 次の S の首座小行列は negative definite (この前提条件は Samuelson の regularity condition と言われる)。

§ 16.7.定理: Shepherd-Samuelson

$f(x)$ が 1 次同次 $C = w x = \sum_i f_i x_i = Q$ $w_i = f_i$ とオイラー定理

$$= C/Q = C / Q = \text{Shephard-McKenzie lemma}$$

このときには $\partial / \partial Q = (C/Q) / Q = (C / Q - C/Q) / Q = 0$ $AC = C/Q = \text{一定}$

§ 16.8.定義: 利潤最大化

(PM) Maximize: $p x - w x$

Subject to: $f(x) \leq Q$, $x \geq 0$ & $Q \geq 0$

を考える。ただし、 $x \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^m$ を選択して π を最大化する。

§ 16.9.定理: Hotelling's Lemma

(PM) の解を $x(p, w)$ 、 $Q(p, w)$ とし、

$$\pi(p, w) = p x(p, w) - w x(p, w)$$

を定義 (これが maximum value function) し、

$$\begin{aligned} &+ (f(x) - Q), \\ &(\pi(p, w) - w x(p, w)) + (f(x(p, w)) - Q(p, w)) \end{aligned}$$

とすると、Envelope 定理より、

$$\begin{aligned} / \quad p_i &= Q_i \\ / \quad w_i &= -x_i \end{aligned} \quad \text{式 16.3}$$

となる。これはホテリングの補題と呼ばれる。

1 番目の式は、 i 財の価格上昇は、 i 財の生産量に等しい利潤増加をもたらすことを示す。

2 番目の式は、 i 要素の価格上昇は、 i 要素の投入量に等しい利潤減少をもたらすことを示す。また、この式は、 i 要素への需要関数は利潤関数を i 要素価格で微分することで得られることを示す。

§ 16.10.定理：Hotelling's symmetry relations

(p, w) が 2 階連続微分可能であれば、ヤングの定理により、ヘシアンは対称行列で、

$$\begin{aligned} x_j / w_i &= x_i / w_j \\ x_j / p_i &= -Q_i / w_j \end{aligned}$$

を得る。これは Hotelling's symmetry relations と呼ばれる (式 16.2 と同じである)。

§ 16.11.定義：支出最小化問題

(EM) Minimize: $p \cdot x$

Subject to: $u(x) \geq u, x \geq 0, x \in R^n$

を考える。この問題の解を $x^*(p, u)$ とする。これは compensated demand function 補償需要関数と呼ばれる。

§ 16.12.定義：Expenditure function

支出関数 (maximum value function) を以下のように定義する：

$$E(p, u) = p \cdot x^*(p, u)$$

§ 16.13.定理：

Envelope 定理を使うと

$$\begin{aligned} E / u &= (p, u) > 0 \\ E / p_i &= x_i^*(p, u) > 0 \end{aligned} \quad \text{式 16.4}$$

これは、Shephard (-McKenzie) lemma の消費者版である。2 番目の関係は、支出関数を j 財価格で偏微分すると、その財に対する補償需要関数となることを示す。

§ 16.14.定理：

式 16.4 をさらに微分すると

$$^2 E / p_i p_j = ^2 E / p_j p_i$$

あるいは

$$x_j / p_i = x_i / p_j$$

となって、価格変化の需要への影響は対称的であることが分かる。

注意：以下の議論は § 16.5. と基本的に同じであるので説明は簡単にする。

§ 16.15.定義：matrix of net substitution term

$n \times n$ 行列 $S^* [x_i^* / p_j]$ 、すなわち $S^* [^2 E / p_i p_j]$

$$S^* = \begin{bmatrix} x_1^* / p_1 & x_1^* / p_2 & \dots & x_1^* / p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^* / p_1 & x_n^* / p_2 & \dots & x_n^* / p_n \end{bmatrix}$$

を考えると、これは対称行列で、 p の関数： $S^*(p)$ 。

注意： $x_i^* / p_j = ^2 E / p_i p_j$ は net substitution term あるいは Slutsky coefficient

と呼ばれる。

§ 16.16.定理：

行列 S^* は対称行列である。

補償需要関数 $x^*(w, Q)$ は、明らかに p に関して 0 次同次であるから、オイラー定理によって、 $S^*(p)p = 0$ 。また、対称行列のため、 $p S^*(p) = 0$ 。

支出関数 $E(w, Q) = p x^*(p, u)$ は、明らかに p に関して 1 次同次である。また、 p に関して concave となる。よって行列 S^* は negative semidefinite で、 $x_i^*/p_i \geq 0$ 。また、 $z : z S z \leq 0$ となる (§ 16.6. は省略する)。

§ 16.17.定義：Hicks-Slutsky equation

(UM)問題を考える。ただし、 $p > 0$ 、 i : 最適点で $u_i(x) > 0$ 。

このときの解を $x(p, M)$ とする。更に、 $U = u[x(p, M)]$ を定義。このときには

$$E(p, u) = M \quad \text{かつ} \quad x(p, M) = x^*(p, u)$$

となる。前者を後者に代入すると

$$x[p, E(p, u)] = x^*(p, u)$$

を得る。これを p_j で微分し、関係 $E/p_j = x_j^*$ と $x = x^*$ を使うと

$$x_i/p_j = x_i/p_j^{u=\text{constant}} - x_j x_i/M, \quad i, j = 1, \dots, n$$

となる。これが Hicks-Slutsky equation。

第 17 章. 古典的な最適化の解法

§ 17.1.定義：最大化問題

$X \subset \mathbb{R}^n$ 、 $A \subset \mathbb{R}^q$ 、 A 、 X は開集合とする。 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $g_j(x): X \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $j=1, \dots, m$ とし、2 階連続微分可能とし、以下の問題を考える：

Maximize: $f(x, \lambda)$

Subject to: $g(x, \lambda) = 0$ 、 $j=1, \dots, m$

§ 17.2.定義：F O C o l d

関数の定義： $(x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda) + g(x, \lambda)$

ただし、 $g(x, \lambda) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_q(x)]$ 。また、

の x に関する gradient ベクトルを ∇_x と表記。

以下の 2 条件を定義：

(L M A X) $x^* \in X$: x^* は、制約条件のもとに f の local maximum を達成する。

(F O C o l d) $x^* \in X$ & $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$: $\nabla_x(x^*, \lambda^*) = 0$ & $g(x^*, \lambda^*) = 0$

§ 17.3.定義：S O N C と S O S C

$n \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$

$$A \text{ は } x \times (x^*, \lambda^*) \text{ or } a_{ij} = \frac{\partial^2 (x^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j}$$

と $m \times n$ 行列 $B = [b_{ij}]$

$$B \text{ は } g \times (x^*, \lambda^*) \text{ or } b_{ij} = \frac{\partial g_i(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j}$$

を定義する。

更に、以下の 3 条件を定義する：

(S O N C) $B z \geq 0 : z A z \geq 0$

(S O S C) $B z \geq 0$ & $z \neq 0 : z A z < 0$

(R N K) Rank $B = m$

ただし、 $m < n$ を仮定。

§ 17.4.定理：

$$\begin{array}{cc} \text{LMAX} \& \text{RNK} & \text{FOC}_{old} \& \text{SONC} \\ \text{FOC}_{old} \& \text{SOSC} & \text{LMAX} \end{array}$$

§ 17.5.定理：§ 13.8.の定理より、縁付きヘシアンを使うと条件(SOSC)

$$(BHC) \quad (-1)^r \begin{vmatrix} 0 & B_{mr} \\ B'_{mr} & A_r \end{vmatrix} > 0,$$

ただし、 $r = m+1, m+2, \dots, n$ で、

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

$$B_{mr} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mr} \end{pmatrix}$$

§ 17.6.定理：

仮定 f と g_i の 2 階偏微分が存在し、連続的

FOC_{old} と SOSC が成立

$$\text{行列 } H^* = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B' & A \end{pmatrix}$$

とすると、 $|H^*| \neq 0$ 。

このときには、陰関数の定理により、連続微分可能な関数 $x^* = x(\cdot)$ と $\lambda^* = (\cdot)$ が存在し、

$$\begin{aligned} x(x(\cdot), (\cdot), \cdot) &= 0, \\ g(x(\cdot), \cdot) &= 0 \end{aligned}$$

式 17.1

が、 $V(\lambda^*)$ で成立。

§ 17.7.定義：

式 17.1 を使って、 λ の変化が x や λ の与える影響を分析することを、比較静学 comparative statics という。

注意：これは、変数の微少な変化に対する local な影響の分析である。

§ 17.8.定理：

式 17.1 を λ_j で偏微分すると $V(\lambda^*) : \{ \lambda_j : V(\lambda^*) \}$

$$\begin{pmatrix} x_{xx} & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/\lambda_j \\ / \lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\lambda_j} \\ \lambda_j \end{pmatrix} = 0$$

ただし、すべての偏微分は λ^* で評価されている。

注意： $x_{\lambda_j} = \frac{\partial x}{\partial \lambda_j} = g_{x\lambda_j}[x(\lambda^*), \lambda^*]$

行列

$$H = \begin{pmatrix} x & x & x \\ & & \\ & x & 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると、 H を $*$ で評価したものが H^* であるから、ある近傍 $V(*)$ で、 H も nonsingular となる

$$\begin{pmatrix} x_1 / & j \\ & j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x & x & x \\ & & \\ & x & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & j \\ & j \end{pmatrix}$$

を得る。

これは、比較静学の基本方程式と呼ばれる。

§ 17.9.定理：

§ 17.6.の仮定 と が成り立つときは BHC が成立する。よって、§ 17.5.の定理より、行列 H の小行列は符号を変えるから、 h_{ii} を行列 H の i - i 要素の余因子とすると

$$i : \text{sign}(|H|) = \text{sign}(h_{ii})$$

となる。

したがって、 H^{-1} の対角要素 $= h_{ii} / |H|$ はすべてマイナスとなる。

§ 17.10.例：

Maximize: $u(x_1, x_2)$

Subject to: $P_1 x_1 + p_2 x_2 = M$

式 17.1 は

$$M - P_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

$$u_1(x_1(P, M), x_2(P, M)) - (P, M) p_1 = 0$$

$$u_2(x_1(P, M), x_2(P, M)) - (P, M) p_2 = 0$$

式 17.2

で、 p_1 で偏微分すると

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & u_{11} & u_{12} \\ -p_2 & u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

で、SOSC は $\det H > 0$ となる。

式 17.2 を p_1 で微分すると

$$H \begin{pmatrix} x_1 / & p_1 \\ x_2 / & p_1 \\ & p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} x_1 / & p_1 \\ x_2 / & p_1 \\ & p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} H^{-1}$$

第2部：経済主体の行動

第1章. 消費者行動：消費者と選好順序

§ 1.1. 定義：

消費集合 Consumption set $X \subset \mathbb{R}^n$ は コンパクト、 $X \neq \emptyset$ とする。
初期資産もしくは初期所得を $M \in \mathbb{R}^n$ とする。

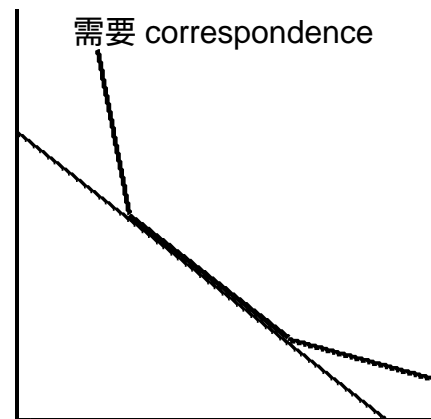
§ 1.2. 定義： 予算集合

予算集合 $g(p, M) = \{x \in X : p \cdot x \leq p \cdot M\}$ と定義される。 $g(p, M)$ とする。
 $p \in \mathbb{R}^n$ 、かつ、 $M \in \mathbb{R}^n$ であるから、 $B \subset \mathbb{R}^n$ とし、 (X, τ) を topological space とすると、関数 $g(p, M) = \{x \in X : p \cdot x \leq p \cdot M\}$ は、 set-valued function (あるいは correspondence) $g : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を表わす。

§ 1.3. 定義

消費者の選好関係は
2 項関係 Binary relation
によって示される。

$x, y \in X$ について、 $x \succsim y$ は、
『 x が、少なくとも y と同じか、
それ以上に良い』ことを示す。



§ 1.4. 定義

$X \subset \mathbb{R}^n$ で、 (X, τ) を topological space とする。前と同様に、 $p \in \mathbb{R}^n$ 、 $M \in \mathbb{R}^n$ 、 $B \subset \mathbb{R}^n$ とすると、消費者の需要 correspondence $F : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$ は以下のように定義される：

$$F(p, M) = \{x \in g(p, M) : [y \in g(p, M) : x \succsim y]\} \quad \text{式 1.1}$$

§ 1.5. 定義： 選好関係 が満たすと思われる性質

- Axiom 1 reflexivity 反射 $x \in X : x \succsim x$
Axiom 2 transitivity 推移 $x, y, z \in X : x \succsim y \text{ \& } y \succsim z \implies x \succsim z$
Axiom 3 completeness 完備 $x, y \in X : x \succsim y \text{ or } y \succsim x$

3 性質を満たす選好は、 X での complete(total) quasi(pre)-ordering (あるいは単に preference ordering 選好順序) と呼ばれる。Axiom 3 を満たさない場合には、(partial) quasi-ordering と言う。もし $x \succsim y \text{ \& } y \succ x \implies x = y$ を満たせば、quasi-(pre-)が消える。

§ 1.6. 定義

$x \succ y$ 、かつ $y \not\succ x$ でない場合には、strictly preferred と呼ばれ、 $x \succ y$ と表記する。

§ 1.7. 定義

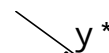
$x \succsim y$ かつ $y \succsim x$ のときには、indifferent と言われ、 $x \sim y$ と表記。

§ 1.8. 定義：

Axiom 4 continuity

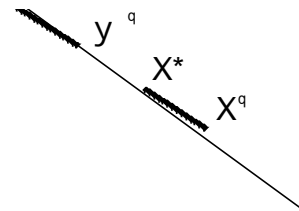
$x \in X$: upper contour set 集合 $\{y \in X : y \succsim x\}$ も、lower contour set 集合 $\{y \in X : x \succsim y\}$ も、 X で closed 閉じている(閉集合となる)ときには選好順序は連続的と言う。

§ 1.9. 定理：



選好順序が連続的

[点列 $\{x^q\} \subset X$ & $\{y^q\} \subset X$ & $x^q \succ x^*$
 $\& y^q \succ y^*$ & $x^q \succ y^q$] $x^* \succ y^*$



§ 1.10.定義

upper contour 集合と lower contour 集合の

intersection 共集合は、無差別集合 indifferent class $I(x) = \{y \in X : x \sim y\}$

§ 1.11.定義：

を X で定義された 2 項関係とする。このときに以下の関係を満たす関数 $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在すれば、この関数は 2 項関係 を表わす効用関数と呼ばれる：

$$(u : X \rightarrow \mathbb{R}) (x, y \in X) : u(x) \geq u(y) \iff x \succsim y$$

§ 1.12.定理：

(X, τ) を可算数 countable の開集合の基底 (= 任意の集合が基底の和集合で表される) を持つ topological space とし、 \succsim を X で定義されている 2 項関係で、Axiom1 ~ 4 を満たすとすると、連続的な効用関数 u が存在する。

§ 1.13.定義：monotonicity 単調性

選好順序は、 $[x \succ y \& x \succsim y] \implies x \succ y$ を満たせば、monotonic と言われる。

§ 1.14.定義：satiation point 飽和点

下記条件を満たすとき、 $x \in X$ は選好順序 における satiation point 飽和点と呼ばれる：

$$y \in X : x \succsim y$$

§ 1.15.定義：Non-satiation

消費者は、以下の条件を満たすとき、点 $x \in X$ で locally not satiated と言われる：

$$x \text{ の開球 } B(x) : \{y \in X : \|x - y\| < \epsilon \text{ for some } \epsilon > 0\} \text{ において } [y \in B(x)] : y \succ x \}$$

注意： \mathbb{R} が実数であるから、財が divisible であることを仮定している。

Non-satiation のときには、効用関数は、近傍内で一定の値をとることはない。

§ 1.16.定理：

選好順序が点 $x^* \in X$ で locally not satiated で、 $x^* \in F(p, M)$ であれば、 $p \cdot x^* = M$ となる。
 すなわち所得がすべて使われる。

§ 1.17.定義：最小支出関数(選好順序による定義)

$$E(p, x) = \min \{p \cdot z : z \in X, z \succsim x\}$$

§ 1.18.定理：

選好順序が $\{x \in X : x \in F(p, M) : \text{locally not satiated}\}$ であれば、 $E(p, x) = p \cdot x$

注意：locally satiated のときには $E(p, x) = p \cdot z < p \cdot x$ となる。

§ 1.19. 定義：

X の選好順序は以下の条件を満たすとき convex と言われる：

$$x \in X : \text{集合 } \{y \in X : y \succsim x\} \text{ が convex}$$

§ 1.20.定理：

選好順序が convex 効用関数は quasi-concave。

§ 1.21.定義：

X の選好順序は以下の条件を満たすとき strictly convex とされる：

$$[x \in X, y \in X, x \succ y, x \succ y, \quad R, 0 \leq \lambda < 1] : x + (1 - \lambda)y \succ y$$

§ 1.22.定理：

選好順序が strictly convex 効用関数は strictly quasi-concave

§ 1.23.定義：cheaper point or interior point

以下の条件を満たすとき、cheaper point assumption を満たすと言う：

任意の点 $x \in X$ と価格 p が与えられたとき、 $y \in X : p \cdot y < p \cdot x$

注意：消費集合 X が内点 ($i : x_i > 0$) を持てば、cheaper point 条件は満たされる (X が 3 点からなれば内点を持たない)。

第 2 章 需要 correspondence と需要関数の連続性

§ 2.1.注意：

以下では、single-valued function と set-valued function を区別するため、set-valued function を写像あるいは correspondence コレスポネンスと呼ぶ。

§ 2.2.定義：upper semi-continuous (§ 2.6.まで § 5.37 などの再掲)

$X \subset \mathbb{R}^n$ で、 (X, τ) を topological space、 $Y \subset \mathbb{R}^m$ とし、correspondence $F : Y \rightarrow 2^X$ を考える。 X はコンパクトとすると、以下の条件を満たせば、 F は $y^* \in Y$ で、upper hemi-continuous とされる：

$$[\text{数列 } x^q \in X, y^q \in Y, x^q \in F(y^q)] : x^* \in F(y^*)$$

§ 2.3.定義：

$Y \subset \mathbb{R}^m$ 、 $X \subset \mathbb{R}^n$ 、topological space (X, τ) を考える。correspondence $F : Y \rightarrow 2^X$ とするとき、以下の条件を満たすものを graph と呼ぶ。

$$G(y) \text{ もしくは } G(F) = \{(x, y) : x \in X, y \in Y, x \in F(y)\}$$

§ 2.4.定理：

correspondence $F(y)$ の graph が閉集合 $F(y)$ は upper hemi-continuous。

§ 2.5. 定義：lower hemi-continuous or lower semi-continuous

$X \subset \mathbb{R}^n$ で、 (X, τ) を topological space とし、correspondence $F : Y \rightarrow 2^X$ を考える。このときに以下の条件を満たせば、correspondence F は $y \in Y$ で、lower hemi-continuous：

$$[\text{数列 } y^q \rightarrow y, x \in F(y)] : [\text{数列 } x^q \rightarrow x] \quad [q : x^q \in F(y^q)]$$

§ 2.6.定義：

correspondence は upper hemi-continuous かつ lower hemi-continuous であれば、continuous とされる。

§ 2.7.定理：

予算 correspondence $g(p, M) = \{x \in X : p \cdot x \leq M\}$ を考える。§ 1.2. で定義された予算 correspondence $g : B \rightarrow 2^X$ は以下の条件を満たす：

予算集合が内点を持ち (§ 1.23. を参照)、かつ convex

$[(p, M) \in B] : g(p, M) \text{ is lower hemi-continuous}$

§ 2.8. 定理 :

予算 correspondence の graph は closed なため、upper hemi-continuous でもあり、結局、continuous である。

§ 2.9. 定義 :

$X \subset \mathbb{R}^n$ で、 (X, τ) を topological space とする。 $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ を効用関数とすると、消費者の需要 correspondence $F : B \rightarrow 2^X$ は以下のように定義される :

$$F(p, M) = \{x \in g(p, M) : [y \in g(p, M) : u(x) \geq u(y)]\} \quad \text{式 2.1}$$

注意 : これは式 1.1 を効用関数を使って定義しなおしただけである。ただし、この場合には、効用関数の存在を保証するため Axiom 1 ~ 4 を仮定する必要がある (§ 1.12. 参照)。

§ 2.10. 定理 :

予算 correspondence $g(p, M)$ が lower hemi-continuous で、選好順序が連続的 (§ 1.8.)
 $[(p, M) \in B] : F(p, M)$ は upper hemi-continuous

§ 2.11. 定理 :

選好順序 \succsim が convex (§ 1.20. 参照) であれば、需要 correspondence $F(p, M)$ の graph は convex になる。

§ 2.12. 定理 :

選好順序 \succsim が strictly convex とする。また、予算集合 $g(p, M)$ が compact とする。このときには、需要 correspondence $F(p, M)$ は、single-valued な連続関数となり、また、財価格と所得の 0 次同次関数となる。

§ 2.13. 定理 : § 2.12. と § 1.22. よりの系

効用関数が strictly quasi-concave で、予算集合 $g(p, M)$ がコンパクトであれば、需要 correspondence $F(p, M)$ は、single-valued な連続関数となり、また、財価格と所得の 0 次同次関数となる。

第 3 章 効用関数と需要関数の微分可能性

§ 3.1. 定義 :

以下では、効用関数 $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の条件を満たすと仮定する :

(A 1) 2 階連続微分可能、

したがって、2 階の偏微分係数分が存在し連続的

(A 2) 増加関数、i.e. $x, y \in X, x \succ y : u(x) > u(y)$

したがって、 $u / x_i = u_i > 0$

(A 3) strictly quasi-concave、i.e.

$$(x, y \in X : u(x) \geq u(y)) \& (\alpha \in (0, 1)) : \\ u(\alpha x + (1 - \alpha)y) > u(y)$$

このときには、§ 2.13. により、需要 correspondence は single-valued function となる。

§ 3.2. 定理 : (証明は Handbook of Mathematical Economics, p.404)

U_{xx} を u のヘシアンとする。

$u(x)$ が strictly quasi-concave $(z \in \mathbb{R}^n : u_x z = 0) : z U_{xx} z < 0$

注意：concave quasi-concave。また、concave $z \in \mathbb{R}^n : z^T U_{xx} z \leq 0$

§ 3.3.定義：

strictly quasi-concave な効用関数は以下の条件を満たすとき strongly quasi-concave な効用関数と言われる：

$$(x \in \mathbb{R}^n : u_x z = 0 \text{ \& } z \neq 0) : z^T U_{xx} z < 0$$

§ 3.4.定義：

$(n+1) \times (n+1)$ のヘッセ縁付き行列を以下のように定義する：

$$H = \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ u_x & U_{xx} \end{pmatrix} \quad \text{式 3.1}$$

§ 3.5.定義：(§ 12.11 再掲)

ヘッセ縁付き行列の $k+1$ 番目の successive principal minor 連続的主小行列式を B_k と表記すると、 B_k は k 番目のヘッセ縁付き行列式 the k -th bordered Hessian determinant とされる：

§ 3.6.定理：(§ 12.12 再掲)

u が quasi-concave $(x \neq 0) : B_2 \leq 0, B_3 \leq 0, \dots, (-1)^n B_n \leq 0$

$(x \in \mathbb{R}^n) : B_1 < 0, B_2 > 0, B_3 < 0, \dots, (-1)^n B_n > 0$

u は \mathbb{R}^n で strictly quasi-concave

注意：ともに ではない。特に、 で strictly quasi-concave でも B の nonsingularity は保証できないことに注意。

§ 3.7.定理：

効用関数が単調増加関数で、strongly quasi-concave

ヘッセ縁付き行列(式 3.1)が nonsingular

§ 3.8.定義：限界代替率

効用関数の効用を一定にして、 x_i と x_j を変動させると、locally に

$$(u/x_i) dx_i + (u/x_j) dx_j = 0.$$

これより、限界代替率を定義

$$R_{ij} = -dx_j/dx_i = -(u/x_i)/(u/x_j)$$

§ 3.9.説明：

限界代替率が逓減とは

$$\begin{aligned} dR_{ij}/dx_i &= R_{ij}/x_i + (R_{ij}/x_j) \cdot dx_j/dx_i \\ &= [u_{ii}u_j^2 - 2u_iu_ju_{ij} + u_{jj}u_i^2]/u_j^3 < 0 \end{aligned} \quad \text{式 3.2}$$

§ 3.10.定理：

式 3.2 の [] 内の式は、 $z_i = u_i$ 、 $z_j = -u_j$ 、その他の $z_k = 0$ ($k \neq i, j$) とおいたときにはヘシアンによる 2 次形式 $z^T U_{xx} z$ そのものである：

$$[-u_j \ u_i] \begin{pmatrix} u_{ii} & u_{ij} \\ u_{ji} & u_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_j \\ u_i \end{pmatrix}$$

また、 $z_i = u_i$ 、 $z_j = -u_j$ の場合には $u_x z = -u_i u_j + u_j u_i = 0$ となるから、以下の命題が成立する：

strongly quasi-concave 限界代替率が逓減

§ 3.11.定理：

Arrow-Enthoven によって、上記の反対の命題が成立することも示されてる。よって
strongly quasi-concave 限界代替率が逓減

注意：したがって 効用関数が strictly quasi-concave であれば、ヘッセ縁付き行列が nonsingular となって、限界代替率が逓減する。この反対も成立する。

§ 3.12.定理：

需要関数 $F(p, M)$ が、 x^* で (p, M) に関して連続微分可能

以下の行列が $x^* = F(p, M)$ で nonsingular

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ p & U_{xx}^* \end{pmatrix}$$

式 3.3

§ 3.13.定理：

式 3.3 が nonsingular ヘッセ縁付き行列式 3.1 が nonsingular

§ 3.14.定理：微分可能性のまとめ

効用関数が 2 階連続微分可能で、増加関数で、strictly quasi-concave とすると、§ 3.7.と

§ 3.11.と § 3.13.と § 3.12.より、以下の命題が成立する：

需要関数が微分可能

効用関数が strongly quasi-concave



限界代替率が逓減



ヘッセ縁付き行列式 3.1 が nonsingular

§ 3.15.定義：補償需要関数(選好順序による定義)

n 次元ベクター関数を以下のように定義：

$$q(p, x) = F(p, E(p, x))$$

ただし、

$$E(p, x) = \min \{ p \cdot z : z \in X, z \succeq x \}$$

§ 3.16.定理：(§ 16.16 再掲)

$q(p, x)$ が微分可能で、選好順序が連続で locally non-saturated、消費集合が convex で interior point を持つとし、 $S_{ij} = q_i / p_j$ 、 $S = [S_{ij}]$ とおけば

$$p \cdot q / p_j = p_i \cdot q_i / p_j = 0$$

$$E(p, x) / p_j = q_j$$

$$q_i / p_j = q_i^* / p_j - q_j \cdot q_i / M$$

S は対称行列

S は negative semidefinite、したがって、 $q_i / p_i \geq 0$

$$S p = - \sum_j q_i / p_j \cdot p_j = 0$$

注意：

行列 S は代替行列 substitution matrix or matrix of net substitution term

§ 3.16. は Shephard lemma

§ 3.16. は Hicks-Slutsky 方程式

第 4 章. 生産技術

§ 4.1.定義：生産集合 Y

一般的な生産集合 $Y \subset \mathbb{R}^{n+m} = \{ y : y \in \mathbb{R}^{n+m}, y = \text{technically possible production process} \}$ 。

$y_i \geq 0, i=1, \dots, n$ は output、

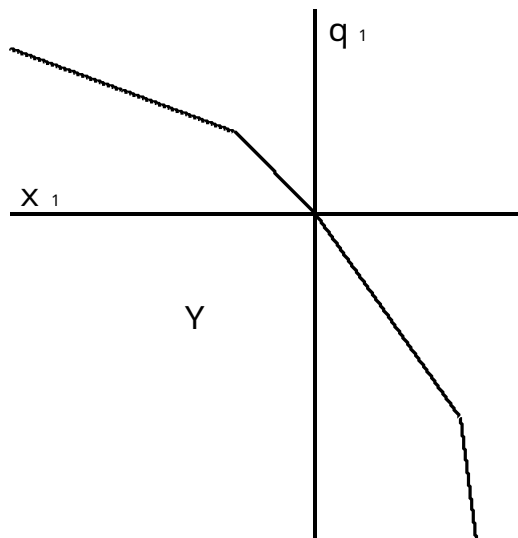
$y_i \leq 0, i=n+1, \dots, n+m$ は input。

§ 4.2.定義：

output : $q = (y_1, \dots, y_n)$ for $i=1, \dots, n$

input : $x = (y_{n+1}, \dots, y_{n+m})$ for $i=n+1, \dots, n+m$

と定義すると、 $y = (q, x)$ と表わせ、
ある点が生産集合のメンバーであるときは、
 $(q, x) \in Y$ と表記できる。



§ 4.3.定義：

一般的に以下のような性質が仮定される。

仮定 Y 1 : Y は閉集合。

仮定 Y 2 : Y は convex

仮定 Y 3 : $0 \in Y$ (まったく生産しないこと可能)

仮定 Y 4 : $y \in Y$: すくなくとも 1 つの i について $y_i > 0$ (productiveness)

仮定 Y 5 : $y \geq 0$ or $y \in Y$

$Y \cap \{0\} = \{0_{n+m}\}$ (生産要素なしに生産できない)

仮定 Y 6 : $(q, x) \in Y \& x' \leq x \implies (q, x') \in Y$ (Free disposal)

仮定 Y 7 : $(q, x) \in Y \& q' \geq q \implies (q', x) \in Y$ (Free disposal)

仮定 Y 8 : $(q, x) \in Y : q_1 \leq \bar{q}$ (y is bounded from above)

注意 : Y 2 の convexity は、implicitly に財の無限分割性を仮定している。

§ 4.4.定義：Efficient Point

Y を生産集合とする。 $y^* \in Y$ は以下の条件を満たすとき、生産集合 Y の Efficient point と
言われる：

$$y \in Y : y \leq y^*$$

§ 4.5.定義：

Efficient point は、境界点の集合(上図の境界線)で、これより、transformation function 変換関数(あるいは陰関数形式の生産関数)が考えられる：

$$f^-(q, x) = 0.$$

これより、 $q^* = (q_2^*, \dots, q_m^*)$ と置けば、 q_1 の生産関数として、

$$q_1 = f(q^*, x)$$

が定義できる。

f は、直接的には以下のように定義される：

$$f(q^*, x) = \max_{q_1} \{ q_1 : (q_1, q^*, x) \in Y \}$$

注意 : q^* の値が大きすぎるときには、 q_1 は $-\infty$ になり、関数を定義できない可能性がある。
上記の定義はこの点を考慮していない。

§ 4.6.例：

2 財 q_1, q_2 、2 生産要素 K, L のケースであれば transformation function は

$$f^-(q_1, q_2, K, L) = 0$$

となる。生産関数は

$$q_1 = f(q_2, K, L)$$

と表わされる。

§ 4.7. 定理：

生産集合が § 4.3. の仮定 Y 1, 2, 6, 7, 8 を満たせば、関数 f は以下の条件を満たす：
上から連続的、すなわち

$L(q_1) = \{(q^*, x) : f(q^*, x) = q_1\}$ は閉集合 式 4. 1
concave function となる
input に関して非減少関数である

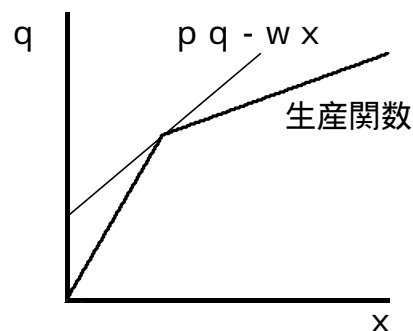
§ 4.8. 注意：

写像 L は set-valued function であるから、式 4. 1 は correspondence L が upper hemi-continuous であることを示す (§ 2.4. の定理を参照)。continuous from above は upper hemi-continuous な correspondence を生み出すような関数の性質である。

§ 4.9. 定理：

生産集合 $Y \subset \mathbb{R}^n$ とする。

$[p : p > 0, p \in \mathbb{R}^n, p \cdot y < 0] \cap [y \in Y]$
: $p \cdot y^* = p \cdot y$ y^* は efficient point



§ 4.10. 定理：

生産集合 $Y \subset \mathbb{R}^n$ が convex とする。

y^* は efficient point

$[p : p \geq 0, p \in \mathbb{R}^n, p \cdot y < 0] \cap [y \in Y] : p \cdot y^* = p \cdot y$

注意：これらの定理より、efficient point は利潤最大化と結びつく。

第 5 章 生産技術

§ 5.1. 定義：

(R G L R) 生産関数 $f(x)$ は

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ (正実数値)、有限、2 階微分可能、
strictly 増加関数、strictly quasi-concave

注意：このときには、利潤最大化・費用最小化の解はユニーク。

§ 5.2. 定義：費用最小化問題(再掲)

(C M) Minimize: $w \cdot x$

Subject to: $f(x) \geq Q, x \geq 0$

ただし、 Q は生産量ベクター、 w は賃金率ベクターでともにプラスで一定。 f は生産関数。

§ 5.3. 定義：FOC + (再掲)

$f_i = f / x_i$ とすると、FOC + は

$-w_i + \lambda^* f_i(x^*) = 0$ 、

$[-w_i + \lambda^* f_i(x^*)] x_i^* = 0$

$\lambda^* [f(x^*) - Q] = 0$ 、

$f(x) - Q \leq 0, x_i^* \geq 0, \lambda^* \geq 0$

式 5. 1

すべての x_i について $x_i > 0$ であれば、interior 解で、この場合には、

$$i : \quad p_i f_i(x^*) = w_i$$

あるいは

$$i, j : \quad p_i / f_i(x^*) = p_j / f_j(x^*) \quad \text{式 5.2}$$

となって、これから要素需要関数 $x_i^* = x_i(w, Q)$ と $Q = Q(w, Q)$ を得る。

§ 5.4. 定義：最小費用関数

$$C(w, Q) = \min_{x_i} w \cdot x(w, Q) = \sum_i w_i x_i(w, Q)$$

§ 5.5. 定義：homothetic 関数

同次関数の連続単調変換で定義される関数は homothetic 関数と呼ばれる。

注意：ただし、経済学では、1 次同次関数の連続的な単調非減少関数による変換と定義されることが多い。以下でも、この定義を使う。

§ 5.6. 定義：

1 次同次関数 $f(x)$ の、連続的な非減少関数 $g(\cdot)$ による変換

$$g(x) = f(x)$$

によって得られる関数を homothetic 関数と言う。

注意：linear homogeneous な生産関数はホモセティックな生産関数である。

§ 5.7. 定理：(ここからしばらくは、Takayama, Analytical Methods in Economics を参照)

$f(x)$ がホモセティックな生産関数で R G L R を満たす

最小費用関数が以下の意味で分離可能 separable：

$$w > 0 \text{ と } Q > 0 : C(w, Q) = h(w) \cdot Q$$

注意：このときには、 $Q = C / Q$ より、 $(w, Q) = h(w) \cdot Q$ 。Shephard lemma より、 $x_i = h'(w) \cdot Q$ 。

§ 5.8. 定理：

Shephard の lemma により、 $C / w_i = x_i$ 。よって以下の命題が成立する：

$f(x)$ がホモセティックな生産関数で R G L R を満たす

要素需要関数が以下の意味で分離可能 separable：

$$w > 0 \text{ と } Q > 0 : x_i(w, Q) = h_i(w) \cdot Q$$

ただし、 $h_i(w) = h / w_i$ 。

§ 5.9. 定理：

$f(x)$ がホモセティックな生産関数で R G L R を満たす

$w > 0$ ：すべての expansion path 規模拡大経路は原点を通る直線となる

すなわち、ホモセティックな生産関数では、原点を通る直線上の傾きは常に一定。

§ 5.10. 定理(上記定理の系)：

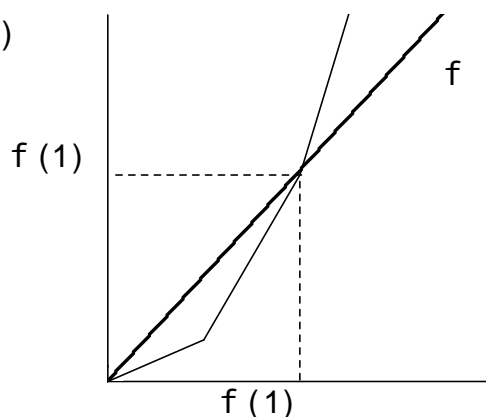
homothetic 関数の偏微分係数の比は 0 次同次関数で、変数の比にのみ依存する

§ 5.11. 定義：要素需要の生産量に関する弾力性

$$f_i(\cdot) \cdot \frac{1}{x_i} \cdot \frac{dx_i}{dx_i}$$

$$\sum_i [x_i(w, Q)/Q](Q/x_i)$$

$$f'(Q)$$



§ 5.12.定理：

f がホモセティックであれば、

$$i, j : x_i = x_j (= Q/x_i)$$

f が線形同次であれば、 $f(Q/x_i) = f(x_i) = Q$ 、

かつ $\lambda = 1$ のため $\sum_i x_i = 1$

§ 5.13.定義：規模係数

$$(\lambda, x_0) : f(\lambda x_0)/[\lambda f(x_0)]$$

ただし、 λ は scale coefficient あるいは scale factor と言う。

§ 5.14.定義：

以下の条件を満たすときには、increasing returns to scale 規模に関して収穫逓増 (IRS) と言う：

$$\lambda > 1 : (\lambda, x_0) > 1$$

$$\lambda = 1 : (\lambda, x_0) = 1$$

$$0 < \lambda < 1 : (\lambda, x_0) < 1$$

不等号が反対になると、decreasing returns to scale (DRS) と言う。

また、以下の条件を満たすときは constant returns to scale (CRS) と言う：

$$(\lambda, x_0) = 1$$

§ 5.15.定義：費用の生産量に関する弾力性

$$(\eta_C) = [C'(w, Q)/C](Q/C)$$

注意：これは、 MC/AC である。

§ 5.16.定理： i - 番目要素の費用におけるシェア

$$w_i x_i / C$$

とすると

$$\sum_i w_i x_i / C = \sum_j x_j / x_j$$

注意： $\sum_j x_j = 1$ であるから、 $\sum_j x_j / x_j$ は x_j の convex combination

§ 5.17.定義： $MC \cdot AC$ の大小と IRS

$$(\eta_C) < 1 \quad IRS_{MC}$$

$$(\eta_C) = 1 \quad CRS_{MC}$$

$$(\eta_C) > 1 \quad DRS_{MC}$$

§ 5.18.定義：平均費用

$$AC(Q) = C(w, Q)/Q$$

§ 5.19.定義：平均費用の傾きと IRS

$$AC'(Q) < 0 \quad IRS_{AC}$$

$$AC'(Q) = 0 \quad CRS_{AC}$$

$$AC'(Q) > 0 \quad DRS_{AC}$$

§ 5.20.定義：規模の弾力性

生産関数を $f(x_0)$ と表わし、 μ を以下のように定義する：

$$\mu(x) = \left[\frac{f(x)}{f(x_0)} \right] \left(\frac{f(x_0)}{f(x)} \right)$$

これは、規模が 1% 増加したときの生産量の増加%を示す。

§ 5.21.定義：

$$\begin{aligned} &> 0: \mu(x_0) > 1 && I R S_{els} \\ &> 0: \mu(x_0) = 1 && C R S_{els} \\ &> 0: \mu(x_0) < 1 && D R S_{els} \end{aligned}$$

§ 5.22.定理：

$$\begin{array}{ccccccc} C R S_{sc1} & C R S_{mc} & C R S_{ac} & C R S_{els} & & & \\ I R S_{sc1} & I R S_{els} & (\text{生産関数がホモセティック}) & I R S_{mc} & I R S_{ac} & & \\ D R S_{sc1} & D R S_{els} & (\text{生産関数がホモセティック}) & D R S_{mc} & D R S_{ac} & & \end{array}$$

注意： $I R S_{sc1}$ と $I R S_{els}$ は、expansion path に沿っての定義であり、 $I R S_{ac}$ と $I R S_{mc}$ は費用最小化経路に沿った定義である。

§ 5.23.定義：

$I R S$ の local measure は以下のように定義する：

$$\mu^* = \lim_{Q \rightarrow Q_1} \mu(x_0)$$

$$\mu^* = \lim_{Q \rightarrow Q_1} \mu(Q)$$

$$\mu^* = \lim_{Q \rightarrow Q_1} \mu(Q)$$

$$\mu^* = \lim_{Q \rightarrow Q_1} \mu(x_0)$$

ただし、 $Q_1 = f(x_0)$ 。

§ 5.24.定理：

$$\mu^* = \mu^* = \mu^* = \mu^*$$

§ 5.25.注意：

m 次同次関数の定義は、 R に対して $f(x) = m f(x)$ 。

これを x で微分すると

$$x f_x = m^{m-1} f(x)$$

よって、 $m = 1$ すなわち 1 次同次であれば、規模の弾力性の $\mu^* = 1$ 。

一般には

$$\mu^* = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{f(x_0)} \right) \left(\frac{f(x_0)}{f(x)} \right)$$

と定義する。したがって

$$\mu^* = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{f(x_0)} \right) (m^{m-1} f) = \lim_{x \rightarrow x_0} m = m$$

第 6 章 生産技術

§ 6.1.定義：代替弾力性

生産要素が 2 種類 x_1, x_2 のケースで、生産関数 $f(x_1, x_2)$ を考えると代替弾力性は、以下のように定義される：

$$\begin{aligned} &\lim_{(w_1/w_2) \rightarrow 0} - \left[\frac{(x_1/x_2)/(x_1/x_2)}{(w_1/w_2)/(w_1/w_2)} \right] \\ &= - \left[\frac{(x_1/x_2)/(x_1/x_2)}{(w_1/w_2)/(w_1/w_2)} \right] \end{aligned}$$

これは

『要素価格の相対価格の変化率に対する要素比率の変化率』

を表わす。

また、 $\log(x/y) = \log(y/x)^{-1}$ 、すなわち、 x/y の 1% 上昇は y/x の 1% の減少であるから、

$$= [(x_1/x_2)/(x_1/x_2)] / [(w_2/w_1)/(w_2/w_1)]$$

と書くこともできる。

また、要素価格を w_1 と w_2 とすると、式 5.2 より、以下のようにも表わされる：

$$= [(x_1/x_2)/(x_1/x_2)] / [(f_2/f_1)/(f_2/f_1)] \quad \text{式 6.1}$$

ただし、 $f_i = f / x_i$ 、 $i=1,2$ 。

§ 6.2. 説明例：

Cobb-Douglas 関数 $Q = K^\alpha L^{1-\alpha}$ の場合には

$$f_K = Q/K, \quad f_L = Q/L$$

$$(f_K/f_L) / (L/K) = d[(Q/K)/(Q/L)] / d(L/K)$$

$$= d(L/K) / d(L/K) = 1$$

これらを式 6.1 を書き換えた次式に代入すると $= 1$ を得る。

$$= [(x_1/x_2) / (f_2/f_1)] [(f_2/f_1) / (x_1/x_2)]$$

§ 6.3. 定理：

一般的には

$$= - f_1 f_2 (x_1 f_1 + x_2 f_2) / [x_1 x_2 (f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2)]$$

となる。

§ 6.4. 定義：等産出量曲線 isoquant

$y \in \mathbb{R}$ 、 $x \in \mathbb{R}^n$ とする。生産関数を $y = f(x)$ を考えるとき、

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) = y_0 \}$$

を等産出量曲線と言う。

このときには

$$f_i dx_i = 0。$$

2 要素のときには

$$MP_1 dx_1 + MP_2 dx_2 = 0$$

より、技術的限界代替率

$$MRS_{12} = -dx_2/dx_1 = -MP_2/MP_1$$

§ 6.5. 注意：

技術的限界代替率逓減は

$dMRS_{12}/dx_1 < 0$ を意味するから

$$dMRS_{12}/dx_1 = MRS_{12}/x_1 + (MRS_{12}/x_2) \cdot dx_2/dx_1$$

$$= [f_{11} f_2^2 - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_{22} f_1^2] / f_2^3 < 0$$

となる必要がある。

注意：§ 6.3. と § 6.5. より、 MRS の傾き具合と代替弾力性には関係があることがわかる。

第 7 章 生産関数・費用関数の具体的な関数形について

§ 7.1. 定義：生産関数

Leontief 生産関数

$$y = \min(a x_1, b x_2)$$

ただし、 $a, b > 0$ 。 $\alpha = 0$ 。

§ 7.2.定義：生産関数

Cobb-Douglas 生産関数

$$y = A x_1^\alpha x_2^\beta$$

ただし、 $\alpha + \beta = 1$ & $\mu = \alpha + \beta$

§ 7.3.定義：生産関数

CES 生産関数

$$y = [\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha) x_2^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

ただし、 $0 < \alpha < 1$ 、 $\rho > -1$ 、 $\rho = 1/(1+\mu)$ 、 $\mu = \nu$ 。

§ 7.4.定理：

CES 生産関数の性質

$$MP_1 = \alpha (y/x_1)^{1+\mu}$$

$$MP_2 = (1-\alpha) (y/x_2)^{1+\mu}$$

CES 生産関数の性質

$$MRS_{12} = (\alpha / (1-\alpha)) (x_2 / x_1)^{1/\rho}$$

§ 7.5.定理：

CES 生産関数の性質

$\mu = 1$ のときにはCES生産関数はCobb-Douglas生産関数になる。

$\mu = 0$ のときにはCES生産関数はLeontief生産関数になる。

§ 7.6.定義：

Translog function を以下のように定義する：

$$\log C(w, Q) = a_0 + \sum_i a_i \log w_i + (1/2) \sum_{i,j} a_{ij} \log w_i \log w_j + \sum_i b_i \log w_i \log Q + [c_1 \log Q + (1/2) c_2 (\log Q)^2]$$

ただし、 $C(w, Q)$ が w について1次同次であるため、また、ヘシアンが対称行列になるために、以下の条件が必要：

$$\sum_i a_i = 1, \quad \sum_j a_{ij} = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_i b_i = 0.$$

注意：translog function は、log をとった任意の関数を Taylor 展開して、2次形式で近似した式と考えられる。

第8章双対関係：introduction to 双対性：生産者行動

§ 8.1.定義：費用関数

n 次元の生産要素ベクターを $x \geq 0$ 、要素価格ベクターを $w > 0$ とする。生産関数は $q = f(x)$ で $R^n \rightarrow R$ 。

このときには費用関数は以下のように定義される：

$$C(w, q) = \min_x \{ w \cdot x : f(x) = q \} \quad \text{式 8.1}$$

§ 8.2.定義：

集合 $Q = \{ q \in R : q \in \text{range } f \}$ は、 $Q = \{ q : q_m \leq q \leq q_M \}$ となる。

ただし、 $q_m = f(0)$ 。したがって、下から有界である。

q_M はleast upper boundで、 $+$ であってもよい。

集合 $W = \{ w \in R^n : w_i > 0 \}$

§ 8.3.定義：

条件(8.) (§ 4.7.で1度定義されている)

f は『上から連続的』

$q \in Q : L(q) = \{x : x \geq 0, f(x) \leq q\}$ は閉集合。

注意：これは、 q が技術的に生産可能であることを仮定する。

f が連続関数であれば、上から連続的となる。

これらの仮定で、制約集合は下から有界で、閉集合となり、費用最小化問題式 8.1 には解が存在する。

上から連続は、以下のようにも定義できる：
$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = f(x^*)$$

§ 8.4.定理：

条件(8.)が満たされると、以下の条件が満たされる：

条件(8.)

$q \in Q \& w \in W : C(w, q) \geq 0$

$q \in Q \& w \in W \& k \in R \& k > 0 : C(kw, q) = k C(w, q)$

すなわち linear homogeneous.

$q \in Q : w_1 > w_2 \Rightarrow C(w_1, q) \leq C(w_2, q)$

$q \in Q : C(w, q)$ は w の concave function

$q \in Q \& w \in W : C(w, q)$ は w の連続関数

$q \in Q \& w \in W : q_1 > q_2 \Rightarrow C(w, q_1) \leq C(w, q_2)$

$w \in W : C(w, q)$ は continuous from below in q , i.e.

$w \in W \& (j : q_j \in Q) \& q_1 > q_2 > q_3 \dots \& \lim_{j \rightarrow \infty} q_j = q^* \& q^* \in Q$
 $\lim_{j \rightarrow \infty} C(w, q_j) = C(w, q^*)$

注意：以下の命題が満たされる：

- f が上から連続的 f が下から連続的

§ 8.5.定義：

条件(8.) 生産関数 f は非減少関数

条件(8.) 生産関数 f は quasi-concave.

§ 8.6.定理：Samuelson 第1部の § 15.8 の式 15.7 の再掲(Envelope Theorem より導出)

生産関数が条件(8.)を満たし、費用関数は式 8.1 で定義されるものとする。また、 $q^* \in Q \& w^* > 0$ を以下のように定義する：

$$C(w^*, q^*) = \min_x \{wx : f(x) \leq q^*\} = w^* q^*$$

また、 C が点 (w^*, q^*) で連続微分可能とすると、

$$j : C(w^*, q^*) / w_j = x_j^*$$

§ 8.7.定理：Shephard

費用関数が、条件(8.) を満たすものとし、 C が点 (w^*, q^*) で連続微分可能とすると

$$j : C(w^*, q^*) / w_j = x_j^*(w^*, q^*)$$

ただし、 $x_j^*(w^*, q^*)$ は、要素価格 w^* のもとで q^* を生産するときに費用最小化する生産要素の量。また、生産関数は以下のように定義される：

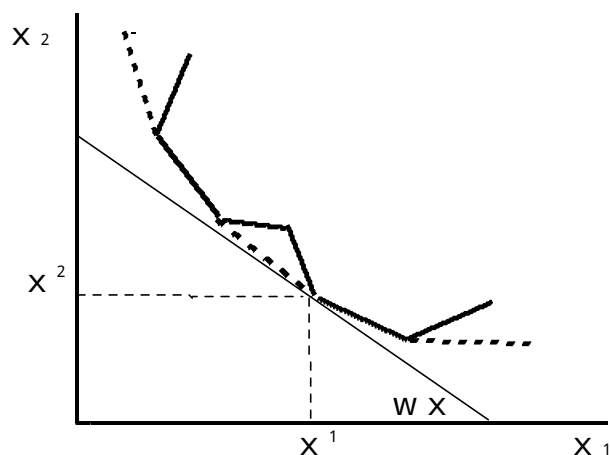
$$f^*(x) = \max_q \{q : wx \leq C(w, q) \text{ for every } w > 0\}$$

§ 8.8.注意：

Samuelson 定理では、生産関数の存在と性質を仮定しているが、Shephard 定理では、費用関数の存在と性質の仮定から、定理を得ている。

条件(8.)と条件(8.)が満たされれば、 f と f^* が一致する。

§ 8.9.図解：



実線は f の isoquant
波線は f^* の isoquant
直線は $w x$

第9章双対関係：費用関数と生産関数の関係

§ 9.1.定義：

条件(9.)：

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は、 $x \in \mathbb{R}^n$ で連続関数

f は増加関数

f は quasi-concave

§ 9.2.定義：

集合 $Q = \{q \in \mathbb{R} : q \in \text{range } f\}$ は、 $Q = \{q : q_m \leq q < q_M\}$ となる。
ただし、 $q_m = f(0)$ 。 q_M は least upper bound で、 $+$ であってもよい。

§ 9.3.定理：

条件(9.)のもとでは、 $q \in Q$ & $w \in W$ で定義された費用関数は以下の条件を満たす：
条件(9.)

$C(w, q)$ は、 $w \in W$ 、 $q \in Q$ で定義され、この領域上で (w, q) の連続関数。

$w \in W : C(w, q_m) = 0$ 。

ただし、 q_m は § 8.2. で定義。

$w \in W : C(w, q)$ は q について増加関数。

$w \in W : C(w, q_M) = +\infty$

$q \in Q : C(w, q)$ は w について 1 次同次関数

$q \in Q : C(w, q)$ は w について concave

$q \in Q$ & $q > q_m : C(w, q)$ は w の増加関数。

$C(w, q)$ は以下の条件を満たす：

$f^*(x) = \max_{q \in Q} \{q : w x \leq C(w, q) \text{ for every } w \in W \text{ & } q \in Q\}$ が連続関数。

§ 9.4.定理：

$x \geq 0 : f^*(x) = f(x)$

ただし、 f^* は条件(9.)の で定義された生産関数で、 f は実際の生産関数。

§ 9.5.注意：

条件(9.)が成立する場合には、費用関数は生産関数すべての性質を表現する (sufficient statistic for production function) 。

§ 9.6.定理：

C が条件(9.)を満たす場合には、 f^* は条件(9.)を満たす。

更に、

$$C^*(w, q) = \min_x \{ w \cdot x : f^*(x) \geq q \}$$

を f^* で定義される費用関数とすると、 $C = C^*$ となる。

§ 9.7.定理：Shephard lemma

C が条件(9.)を満たし(したがって f^* は条件(9.)を満たし)、点 $(w^*, q^*) \in W \times Q$ で、 w に関して微分可能であれば、費用最小化問題

$$\min_x \{ w \cdot x : f(x) \geq q \}$$

に対する解はユニークであり、かつ

$$x_j : C(w^*, q^*) / w_j = x_j^*(w^*, q^*)$$

となる。

第 10 章.双対関係：消費者者行動

§ 10.1.定義：支出関数(効用関数による定義)

n 次元の財ベクター $q \geq 0$ 、価格ベクター $p > 0$ とする。効用関数は $u = g(q)$ で $R^n \rightarrow R$ 。

このときには支出関数は以下のように定義される：

$$E(p, u) = \min_q \{ p \cdot q : g(q) \geq u \} \quad \text{式 10.1}$$

§ 10.2.定義：

集合 $U = \{ u \in R : u \in \text{range } g \}$ は、 $U = \{ u : u_m \leq u < u_M \}$ となる。

ただし、 $u_m = g(0)$ 。

u_M は least upper bound で、 $+$ であってもよい。

集合 $P = \{ p \in R^n : p_i > 0 \}$

§ 10.3.定義：

条件(10.)

g は『上から連続的』

$u \in U : L(u) = \{ q : q \geq 0, g(q) \geq u \}$ は閉集合

注意：

これは、効用点 u が実現可能であることを示す。

g が連続関数であれば、上から連続的となる。

この仮定で、支出最小化問題式 10.1 には解が存在する。

§ 10.4.定理：

条件(10.)が満たされると、以下の条件が満たされる。

条件(10.)

$$u \in U \& p \in P : E(p, u) \geq 0$$

$$u \in U \& p \in P \& k \in R \& k > 0 : E(kp, u) = k E(p, u)$$

$$u \in U : p_1 > p_2 \Rightarrow E(p_1, u) \leq E(p_2, u)$$

$u \in U : E(p, u)$ は p の concave function
 $u \in U \& p \in P : E(p, u)$ は p の連続関数
 $u \in U \& p \in P : u_1 > u_2 \Rightarrow E(p, u_1) > E(p, u_2)$ 行
 $p \in P : E(p, u)$ は continuous from below in u , i.e.
 $p \in P \& (j : u_j \in U) \& u_1 \leq u_2 \leq u_3 \dots \& \lim u_j = u^* \& u^* \in U$
 $\lim_j E(p, u_j) = E(p, u^*)$

§ 10.5.定理 : Shephard

支出関数が、条件(10.) ~ を満たすものとし、 E が点 (p^*, u^*) で連続微分可能とすると

$$j : E(p^*, u^*) / p_j = q_j^*(p^*, u^*)$$

ただし、 $q_j^*(p^*, u^*)$ は、価格 p^* のもとで効用水準 u^* を達成するときに支出最小化する財の量。また、効用関数は以下のように定義される :

$$g^*(q) = \max_u \{ u : p \leq q \Rightarrow E(p, u) \text{ for every } p > 0 \}$$

第 11 章. 双対関係 : 効用関数と支出関数の関係

§ 11.1.定義 :

条件(11.) :

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は、 $q \in \mathbb{R}^n$ で連続関数
 g は増加関数
 g は quasi-concave

§ 11.2.定理 :

式 10. 1 によって、 $u \in U \& p \in P$ で定義された支出関数は以下の条件を満たす :
 条件(11.)

$E(p, u)$ は、 $p \in P \& u \in U$ で定義され、この領域上で (p, u) の連続関数。

$$p \in P : E(p, u_m) = 0。$$

$$p \in P : E(p, u) \text{ は } u \text{ について増加関数。}$$

$$p \in P : E(p, u_m) = +\infty$$

$$u \in U : E(p, u) \text{ は } p \text{ について 1 次同次関数}$$

$$u \in U : E(p, u) \text{ は } p \text{ について concave}$$

$$u \in U \& u > u_m : E(p, u) \text{ は } p \text{ の増加関数。}$$

$E(p, u)$ は以下の条件を満たす :

$$g^*(q) = \max_u \{ u : p \leq q \Rightarrow E(p, u) \text{ for every } p \in P \& u \in U \} \text{ が連続関数。}$$

§ 11.3.定理 :

$$q \geq 0 : g^*(q) = g(q)$$

ただし、 g^* は条件(11.) の で定義された効用関数で、 g は実際の効用関数。

§ 11.4.注意 :

条件(11.) が成立する場合には、支出関数は効用関数すべての性質を表現する (sufficient statistic for utility function) 。

§ 11.5.定理 :

E が条件(11.) を満たす場合には、 g^* は条件(11.) を満たす。

更に、

$$E^*(p, u) = \max_q \{ p \leq q : g^*(q) = u \}$$

を g^* で定義される支出関数とすると、 $E = E^*$ となる。

§ 11.6.定理：

E が条件(11.)を満たし、点 $(p^*, u^*) \in P \times U$ で、 p に関して微分可能であれば、効用最大化問題

$$\max_q \{ p \cdot q : g(q) = u \}$$

に対する解はユニークであり、かつ

$$p_j : -E(p^*, u^*)/p_j = q_j^*(p^*, u^*)$$

(すなわち補償需要関数)となる。

第12章.双対関係：効用関数と間接効用関数の関係

§ 12.1.定義：

効用関数は条件(11.)を満たすものとする。ここでの最大化問題は

$$\max_q g(q) \text{ subject to } p \cdot q = M$$

ただし、 $p > 0$ 、 $M > 0$ 。 $p \cdot q = M$ を normalize して $(p/M) \cdot q = 1$ と書き直し、 $v = p/M$ において制約条件は $v \cdot q = 1$ と表すから、間接効用関数は以下のように定義される：

$$G(v) = \max_q \{ g(q) : v \cdot q = 1, q \geq 0 \} \quad \text{式 12.1}$$

§ 12.2.定義：

条件(12.)：これは条件(11.)とまったく同じ。

$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は、 $q \in \mathbb{R}^n$ で連続関数

g は増加関数

g は quasi-concave

定義：

$$V = \{ v : v > 0 \}$$

§ 12.3.定理：

効用関数は条件(12.)を満たすものとする、式 12.1 で定義された間接効用関数は以下の条件を満たす：

条件(12.)

$G(v)$ は、 V で定義された、実数値関数で、この領域上で連続関数となる。

$G(v)$ は v について減少関数。

$G(v)$ は、 v について V で quasi-convex

$G(v)$ は以下の条件を満たす：

$q > 0$ で定義された関数

$$g^*(q) = \min_v \{ G(v) : v \cdot q = 1, v > 0 \}$$

が、この領域で連続的で、領域 $\{ q : q \geq 0 \}$ に拡張される。

§ 12.4.定理：Wold Identity

g が条件(12.)を満たすものとし、 q^* を

$$\max_q \{ g(q) : v^* \cdot q = 1, q \geq 0 \}$$

の解とする。このとき、 g が q^* で微分可能で、 $g(q^*)/q_i > 0$ 、 $i=1, \dots, n$ 、であれば、以下のような関係 (inverse demand function) が成立する。

$$v_i^* \cdot p_i/M = g(q^*)/q_i / [\sum_j q_j^* \cdot g(q^*)/q_j] \quad \text{式 12.2}$$

例： $u = q_1^{-1} q_2^{-2}$ なら、 $p_1/M = ?$

§ 12.5.定理：

G が条件(12.)を満たすものとする、関数 $q > 0$ で定義された関数

$$g^*(q) = \min_v \{ G(v) : v \leq q, v \geq 0 \}$$

は、領域 $\{q : q \geq 0\}$ に拡張され、また、条件(12.)を満たす。更に、

$$G^*(v) = \max_q \{ g^*(q) : v \leq q, q \geq 0 \}$$

と定義すれば、 $G(v) = G^*(v)$ となる。

§ 12.6.定理：Roy identity

G が条件(12.)を満たすものとし、 q^* を

$$\max_q \{ g(q) : v^* \leq q, q \geq 0 \}$$

の解とし、 G が v^* で微分可能で、 $G(v^*)/v_i < 0, i=1, \dots, n$ 、であれば、以下のような関係が成立する。

$$q_i^* = G(v^*)/v_i / [\sum_j v_j^* \cdot G(v^*)/v_j] \quad \text{式 12.3}$$

§ 12.7.注意：定義より、 $v = (p_1, \dots, p_n)/M$ であるから

$$G/v_j = G/v_j \cdot v_j/p_j = (G/v_j)/M$$

$$G/M = \{ G/v_j \cdot v_j/M \} = - (p_j \cdot G/v_j)/M^2$$

より、式 12.3 は

$$q_i^* = - G/v_i / G/M$$

となる (Roy's identity)。すなわち、需要関数は Roy's identity から導き出せる。

第 13 章. 双対アプローチ：派生需要関数の分析

§ 13.1.定義：

生産関数 f は以下の仮定 (これは条件(8.)の再掲) を満たすものとする：

条件(13.)

f は『上から連続的』： $q \in Q : L(q) = \{x : x \geq 0, f(x) \leq q\}$ は閉集合。

§ 13.2.定理：

このときには § 8.4.の条件(8.) ~ を満たすような $C(w, q)$ が存在する。

$C(w, q)$ が、点 $w^*, q^* (q^* \in Q, w^* > 0)$ で 2 階連続微分可能とすると、 § 8.7.の Shephard 補助定理によって、

$$C(w^*, q^*)/w_j = x_j^*(w^*, q^*), \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 13.1}$$

したがって、 $C(w, q)$ が、点 $w^*, q^* (q^* \in Q, w^* > 0)$ で 2 階連続微分可能とすると、1 階連続微分可能な要素需要関数の存在が保証される。

§ 13.3.定義：substitution matrix

$n \times n$ 行列 $S = [^2 C(w^*, q^*)/w_i w_j] = [x_i^*(w^*, q^*)/w_j]$ 、

$$S = \begin{pmatrix} x_1(w^*, q^*)/w_1 & \dots & x_1(w^*, q^*)/w_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n(w^*, q^*)/w_1 & \dots & x_n(w^*, q^*)/w_n \end{pmatrix}$$

を定義する。

§ 13.4.定理：

式 13.1 より、Young の定理によって S は対称行列で、

$$i, j, i=1, \dots, n : x_i(w^*, q^*)/w_j = x_j(w^*, q^*)/w_i$$

注意：これは Samuelson's reciprocity relations と呼ばれる (第 1 部 § 16.4)。

§ 13.5.定理：

§ 8.4.の条件(8.) によって、 $C(w, q)$ は w の concave function となる。したがって、 $C(w, q)$ のヘシアンは negative semidefinite (第 1 部 § 8.16 参照)：

$$n \text{ ベクター } z : z^T S z = z^T [-x_i / w_j] z \leq 0$$

ここで、 $z = e_j$ (j 番目のみ 1 で他は 0 のベクター) と置くと

$$x_j / w_j \leq 0, \quad j=1, \dots, n$$

を得る。

§ 13.6.定理：

条件(8.) の より、 C は w に関して 1 次同次、 $C(kw, q) = k C(w, q)$ 。

この両辺を w_j で偏微分すると

$$k C_j(kw^*, q^*) = k C_j(w^*, q^*)$$

ただし、 $C_j = C / w_j$ 。したがって、 $C_j(kw^*, q^*) = C_j(w^*, q^*)$ であり、これを k で微分すると ($k = 1$ のときには)

$$j^2 C(w^*, q^*) / w_i w_j = 0, \quad j=1, \dots, n$$

を得る (第 1 部 § 16.6 と同じ)。

§ 13.7.定理：

f が線形同次関数の場合には

$$\begin{aligned} C(w, q) &= \min_x \{ wx : f(x) = q \} \\ &= \min_x \{ q w(x/q) : f(x/q) = 1 \} \\ &= q \cdot \min_x \{ w(x/q) : f(x/q) = 1 \} \\ &= q \cdot \min_z \{ wz : f(z) = 1 \} \\ &= q C(w, 1) = q c(w) \end{aligned}$$

§ 13.8.定理：

f が線形同次関数の場合には

$$C(w, q) = q c(w)$$

となるから、式 13.1 は

$$q \cdot c(w) / w_j = x_j(w, q) \quad \text{式 13.2}$$

となる。よって q で微分すると

$$x_i(w, q) / q = c(w) / w_i$$

よって、生産量に関する生産要素の弾力性は

$$(x_i(w, q) / q)(q / x_i) = q [c(w) / w_i] / x_i = 1$$

となる(最後の「 $= 1$ 」は式 13.2 より成立する)。

第 14 章. 双対アプローチ：消費者行動の分析

§ 14.1.定義：

効用関数 g は以下の仮定 (これは条件(10.)の再掲) を満たすものとする：

条件(14.)

g は『上から連続的』： $q \in Q : L(q) = \{q : q \geq 0, g(q) = q\}$ は閉集合。

§ 14.2.定義：

集合 $U = \{u \in \mathbb{R} : u \in \text{range } g\}$ は、 $U = \{u : u_m \leq u < u_M\}$ となる。

ただし、 $u_m = g(0)$ 。 u_M は least upper bound で、 $+$ であってもよい。

集合 $P = \{ p \in R^n : p_i > 0 \}$

§ 14.3.定理 (再掲) :

このときには条件(10.)の \sim を満たすような $E(p, u)$ が存在する。

§ 14.4.定義 :

価格を p^* 、所得を M^* とすると、消費者が効用最大化したときの効用は以下のように定義される :

$$u^* = \max_u \{ u : E(p^*, u) \leq M^*, \text{ for every } u \in U \}$$

§ 14.5.定義 : 以下の仮定を行う

条件(14.)

$E(p^*, u^*)$ が、点 p^*, u^* で 2 階連続微分可能で、

$$E(p^*, u^*) / u > 0$$

注意 :

条件(10.) で $E(p^*, u^*) / u > 0$ は保証されている。

この仮定で、以下の条件を満たす :

$$E(p^*, u^*) = M^*$$

式 14. 1

§ 14.6.定理 :

また、条件(10.) より、 $E(p, u)$ は p の線形同次関数であるから式 14. 1 より

$$E(p^*/M^*, u^*) = 1$$

式 14. 2

§ 14.7.定理 :

連続微分可能の仮定と式 14. 2 より、陰関数定理によって、 p^*/M^* の近傍で 2 階微分可能な関数 $u = G(p/M)$ が存在し、以下の条件を満たす :

$$u^* = G(p^*/M^*)$$

これが、(支出関数から導き出された)間接効用関数である。

§ 14.8.定義 : 補償需要関数 $q_j^*(p^*, u^*)$

Constant real income demand function or Hicksian demand function は、以下の最大化問題の解として得られる :

$$\min_q \{ p \cdot q : g(q) = u \}$$

注意 : 選好順序による定義は § 3.15. で行われている。

§ 14.9.定理 :

§ 10.5. のシェパードの補助定理により

$$E(p^*, u^*) / p_j = q_j^*(p^*, u^*), \quad i=1, \dots, n$$

式 14. 3

§ 14.10.定義 : market demand function $D_i(p^*, M^*)$

式 14. 3 の u^* に $G(p^*/M^*)$ を代入すると market demand function or Marshallian 需要関数 $D_1(p^*, M^*), \dots, D_n(p^*, M^*)$ を得る。

ただし、 $G(p^*/M^*)$ は、価格 p^* で所得 M^* のときに消費者が得られる最大効用を示す。したがって

$$D_i(p^*, M^*) = q_i(p^*, G(p^*/M^*)), \quad i=1, \dots, n$$

注意 : このように需要関数は、効用関数(すなわち Roy's identity) からでも、支出関数からでも導き出せる。

§ 14.11.定理：

反対に、需要関数の M^* に、費用最小化したときの支出 = 支出関数を代入すると

$$D_j^*(p^*, E(p^*, u^*)) = -E(p^*, u^*) / p_j^* (= q_j^*) \quad \text{式 14.4}$$

すなわち、補償需要関数を得る。

§ 14.12.定理：

式 14.4 の両辺を p_j で微分すると

$$^2 E(p^*, u^*) / p_i p_j = D_{ij} + D_{iM} \cdot D_j^*(p^*, M^*) \quad \text{式 14.5}$$

§ 14.13.説明：

式 14.4 の両辺を微分すると(右辺 2 項で式 14.1 の $E(p^*, u^*) = M^*$ を使って)

$$^2 E(p^*, u^*) / p_i p_j = D_{ij} + D_{iM} \cdot E(p^*, u^*) / p_j$$

ただし、

$$D_{ij} = D_i(p^*, M^*) / p_j \quad \& \quad D_{iM} = D_i(p^*, M^*) / M$$

ここで、式 14.3 を使うと、右辺 2 項の $E(p^*, u^*) / p_j = q_j^*(p^*, u^*)$ 。よって

$$^2 E(p^*, u^*) / p_i p_j = D_{ij} + D_{iM} \cdot q_j^*(p^*, u^*)$$

更に式 14.4 を使うと式 14.5 をえる。

したがって式 14.5 は、以下の Hicks-Slutsky equation そのものである：

$$q_i / p_j = q_i / p_j^{u=\text{constant}} - q_j \cdot q_i / M、$$

§ 14.14.定理：

式 14.5 の右辺を k_{ij}^* と置けば、行列 $K = [k_{ij}^*]$ は $E(p^*, u^*)$ のヘシアン。ところが、条件(10.) によって、 $E(p, q)$ は p の concave function となる。したがって、 $E(p, q)$ のヘシアンは negative semidefinite で、以下のような結果をえる：

行列 K は対称行列

$$n \text{次元ベクター } z : z K z \leq 0$$

第3部：市場の理論

第15章. 厚生経済学の基本命題

§ 15.1. 定義：記号

x_i 消費者 i の消費量で、 n - ベクター、 $i=1, \dots, m$ 。

y_j 生産者 j の生産量で、 n - ベクター、 $j=1, \dots, k$ 。

$X = \sum_{i=1}^m x_i$

$Y = \sum_{j=1}^k y_j$

X_i 消費者 i の消費集合(予算集合とは異なる)

Y_j 生産者 j の生産集合(技術的に可能な生産要素と財の組み合わせ)

$X_i \subset \mathbb{R}^n$ 負の消費量(生産要素)も可能

$Y_j \subset \mathbb{R}^n$ 負の生産量(生産要素)も可能

X 総消費集合 aggregate consumption set $\sum_{i=1}^m x_i$

Y 総生産集合 aggregate production set $\sum_{j=1}^k y_j$

技術的外部経済・不経済は存在しない。

すべての i について、選好順序 preference order \succsim_i (第2部 § 1.5 「反射・推移・完備を満たす選好関係」を参照)が、 X_i で定義されている。

消費の外部性が存在しない (selfish or individualistic)。

注意：以下では \succsim_i における下付 i を省略する。

p 価格で、 n - ベクター

$p \cdot y_j$ 生産者 j の利潤

x_i^0 消費者 i の財の初期保有量

$X^0 = \sum_{i=1}^m x_i^0$

§ 15.2. 定義：Feasibility 実現可能性

消費ベクター $\{x_i\}$ は、以下の条件を満たすとき、Feasible 実現可能と呼ばれる：

$[$ 生産ベクター $\{y_j\} : X = Y + X^0]$

注意：財の free disposal を仮定すれば $X \geq Y + X^0$ となる。この場合には、価格ベクターは非負となる。

§ 15.3. 定義：Pareto optimality パレート最適

実現可能な消費ベクター $\{x_i^*\}$ は、以下の条件を満たすとき、パレート最適 (P.O.) と呼ばれる：

{実現可能な $x_i : i=1, \dots, m$ } : すべての i について $x_i \leq x_i^*$ &
すくなくとも1つの i について $x_i < x_i^*$

§ 15.4. 定義：Competitive equilibrium 競争均衡

ベクターの組み合わせ $\{p^*, \{x_i^*\}, \{y_j^*\}\}$ は、以下の条件を満たすとき、競争均衡 (C.E.) と呼ばれる：

$x_i^* \in X_i, i=1, \dots, m, y_j^* \in Y_j, j=1, \dots, k$
($x_i : x_i \in X_i$ & $p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot x_i^*$ & $i=1, \dots, m$) : $x_i^* \in X_i$
($y_j : y_j \in Y_j$ & $j=1, \dots, k$) : $p^* \cdot y_j^* \geq p^* \cdot y_j$
 $X^* = Y^* + X^0$

注意：財の free disposal を仮定すれば条件は以下ようになる：

$X \geq Y + X^0, p^* \cdot (Y^* + X^0 - X^*) = 0, p^* \geq 0$

§ 15.5.定義：Chosen point 選択点

価格 p^* のもとで、 $x_i^* \in X_i$ が、以下の条件を満たせば、 x_i^* は Chosen point 選択点と呼ばれる：

$$[x_i : x_i \in X_i \text{ \& } p^* x_i \leq p^* x_i^*] : x_i^* \in X_i$$

§ 15.6.定義：Local nonsatiation point 局部非飽和点(第2部 1.16 参照)

消費点 $x_i \in X_i$ は、以下の条件を満たすとき、点 x_i で locally not satiated とされる：

開球 $B(x_i) \cap X_i$ ：

$$\{ [x_i' : x_i' \in B(x_i) \cap X_i] : x_i' \succ x_i \}$$

注意：財が実数であるから、少なくとも1財が divisible であることを仮定している。

Non-satiation のときには、効用関数は、近傍内で一定の値をとることはない。

§ 15.7.定義：Locally nonsatiating preference ordering 局部非飽和選好順序

選好順序 \succsim は以下の条件を満たすとき、Locally nonsatiating preference ordering 局部で非飽和な選好順序と呼ばれる：

局部非飽和点 x_i ： $[x_i' : x_i' \succ x_i]$ が局部非飽和点

§ 15.8.定義：局部非飽和選好順序の仮定

仮定 A 1 選好順序 \succsim はすべての消費者について局部非飽和である。

§ 15.9.定理：

価格 p^* のとき、 x_i^* を消費者 i の局部非飽和な選択点とすると、仮定 A 1 のもとでは

$$\begin{aligned} x_i \in X_i \text{ \& } p^* x_i > p^* x_i^* \\ \Rightarrow x_i \notin X_i \end{aligned}$$

§ 15.10.定理

ベクターの組み合わせ $\{p^*, \{x_i^*\}, \{y_j^*\}\}$ は、すべての i について x_i が局部非飽和な競争均衡(C.E.)とすると、仮定 A 1 のもとでは、消費・生産集合 $\{x_i^*\}, \{y_j^*\}$ はパレート最適である。

注意：

局部非飽和点では $p^* > 0$ 。

上記の定理には、凸性選好順序は必要でない。

仮定 A 1 だけでは、競争均衡の存在は保証されない。

ここまでは、消費者が財を購入するための所得が定義されていない。

§ 15.11.定義：Competitive equilibrium of Private Ownership Economy

個人所有経済競争均衡

ベクターの組み合わせ $\{p^*, \{x_i^*\}, \{y_j^*\}, \{\theta_{ji}\}\}$ は、以下の条件を満たすとき、個人所有経済競争均衡(C.E.P.O.E.)と呼ばれる：

$$\begin{aligned} x_i^* \in X_i, i=1, \dots, m, \quad y_j^* \in Y_j, j=1, \dots, k \\ (x_i : x_i \in X_i \text{ \& } p^* x_i \leq M_i \text{ \& } i=1, \dots, m) : x_i^* \in X_i \end{aligned}$$

ここで、 $M_i = p^* x_i^* + \sum_{j=1}^k \theta_{ji} p^* y_j^*$ 、ただし $0 \leq \theta_{ji} \leq 1$ 、 $\sum_{j=1}^k \theta_{ji} = 1$ 。

$$\begin{aligned} (y_j : y_j \in Y_j \text{ \& } j=1, \dots, k) : p^* y_j^* \leq p^* y_j \\ x^* = y^* + x^{\wedge} \end{aligned}$$

§ 15.12.定理：

$\{p^*, \{x_i^*\}, \{y_j^*\}, \{\theta_{ji}\}\}$ が C.E.P.O.E. であれば、それは C.E. である。

注意：すべてのC.E.は、あるC.E.P.O.E.から以下の要領で導出できる：

$\{p^*, \{x_i^*\}, \{y_j^*\}\}$ がC.E.であれば、消費者 i に

$$x_i^* - y_j^* / m$$

$$j : j_i \quad 1/m$$

を与える。

注意：以下では、定理 § 15.10. と反対方向の定理を考える。

§ 15.13.定義：convex preference ordering(第2部 1.19 参照)

X_i の選好順序は以下の条件を満たすとき convex と言われる：

集合 X_i は convex

$$[t:0 < t < 1] : x_i^* - x_i - t(x_i^* - x_i) + (1-t)x_i - x_i$$

$$[t:0 < t < 1] : x_i^* - x_i - t(x_i^* - x_i) + (1-t)x_i - x_i$$

注意：上記定義は「集合 $\{z \in X : z \succeq x\}$ が convex」と同じである。

すべての財の divisibility を仮定している。

§ 15.14.定義：

No-worse-than- x_i^* set : $C_i(x_i^*) = \{x_i : x_i \succeq X_i, x_i \succeq x_i^*\}$

Preferred-to- x_i^* set : $C_i^-(x_i^*) = \{x_i : x_i \succeq X_i, x_i \succeq x_i^*\}$

注意：いずれも convex set。

§ 15.15.定義：cheaper point or interior point(第2部 § 1.23 参照)

以下の条件を満たすとき、cheaper point assumption を満たすと言う：

消費点 $x_i \in X_i$ と価格 p^* が与えられたとき、

$$x_i' \in X_i : p^* x_i' < p^* x_i$$

注意：

消費集合 X_i が内点を持てば、cheaper point 条件は満たされる。

これは minimum wealth condition と呼ばれる。

§ 15.16.定義：(下から)連続的な選好順序(第1部 § 1.8 参照)

$[x_i' \in X_i, i=1, \dots, m] : \text{lower contour set 集合} \{x_i \in X : x_i \succeq x_i'\}$ が閉集合となるとき、

選好順序は(下から)連続的と言う。

注意：高山では連続的とされているが、正確には下から連続的。

§ 15.17.定義：nonsatiation 非飽和

以下の条件を満たすとき、消費者 i は点 x_i^* で nonsatiation 非飽和と言われる：

$$x_i \in X_i : x_i \succeq x_i^*$$

§ 15.18.定義：

仮定 A 2 選好順序がすべての $i, i=1, \dots, m$ について convex。

仮定 A 3 総生産集合 Y が convex。

仮定 A 4 cheaper point が存在する。

仮定 A 5 選好順序は(下から)連続的。

注意：個々の生産集合 Y_j の convexity は仮定していない。

§ 15.19.定理：

集合の組み合わせ $\{\{x_i^*\}, \{y_j^*\}\}$ がパレート最適で、かつ、すくなくとも1人の消費者が非飽和とすると、仮定 A 2 と A 3 のもとでは、価格ベクター $p^* \geq 0$ が存在して以下の条件

を満たす：

$$\begin{aligned} [i, i=1, \dots, m \ \& \ x_i \leq x_i^*] : p^* x_i \leq p^* x_i^* \\ [j, j=1, \dots, k \ \& \ y_j \leq Y_j] : p^* y_j \leq p^* Y_j \\ x^* = y^* + x^\wedge \end{aligned}$$

注意：この定理では条件 $\sum_{i=1}^m x_i \leq \sum_{i=1}^m x_i^\wedge$ が支出最小化で効用最大化でない。

§ 15.20.定理：

上記の § 15.19.定理における x_i^* と p^* について仮定 A 4 が成立し、更に、仮定 A 5 が成り立てば、すべてのパレート最適 $\{x_i^*\}, \{y_j^*\}$ について、価格ベクター $p^* \geq 0$ が存在して、 $[p^*, \{x_i^*\}, \{y_j^*\}]$ は C.E. となる。

注意：§ 15.19.定理の条件 $\sum_{i=1}^m x_i \leq \sum_{i=1}^m x_i^\wedge$ より、パレート最適が実現されるためには、すべての所得が消費者に分配される必要がある。

第 16 章. コアーの理論

§ 16.1. 定義：記号と仮定

x_i 消費者 i の消費量で、 n - ベクター

$M = \{1, \dots, m\}$

X_i 消費者 i の消費集合 (予算集合とは異なる)

$X = \sum_{i=1}^m X_i$

消費者の選好順序は連続的な実数値関数 $u_i(x_i)$ で表される

消費ベクターの組み合わせ $x \in X$ 、すなわち $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ かつ $x_i \in X_i$ 、は配分 Allocation と呼ばれる。

注意：この章では純粋交換経済が分析対象となるため、生産活動はない。

§ 16.2. 定義：Feasibility

配分 x は、

$$\text{条件} \quad \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i^\wedge$$

を満たすときには feasible 実現可能と言う。ただし、 x_i^\wedge は消費者 i の初期保有量である。

すべての実現可能な配分の集合は以下のように定義される：

$$A = \{x : x \in X, \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i^\wedge\}$$

§ 16.3. 定義：Blocking と Coalition 阻止と連合

連合とは M の部分集合 S 。

実現可能配分 $x \in A$ は、以下の条件を満たすとき、連合 S によって阻止されると言う：

$$x' \in A \ \& \ x' \neq x :$$

すべての $i \in S$ について $u_i(x'_i) \geq u_i(x_i)$ 、かつ

ある $i \in S$ について $u_i(x'_i) > u_i(x_i)$ 、かつ

$$\sum_{i \in S} x'_i = \sum_{i \in S} x_i^\wedge$$

このときには、 x' は S -block superior to x 、あるいは、 x' dominates x by 連合 S と言い、 $x' B_S x$ と表す。ただし、 B_S は A で定義された Binary relation 2 項関係。

注意：

配分 x' では、 S のメンバーでない消費者は、配分 x に比べて状態が悪化しているかもしれない。

$S = M$ の可能性もある。パレート最適は、すべての消費者による連合によって阻止され

ない配分である。

§ 16.4.定義：

Aにおける2項関係Bを以下のように定義する：

$x' B x$ ある連合 $S \subseteq M$ によって $x' B_S x$ となる

§ 16.5.定義：

以下のようにコレスポンス set-valued function を定義する：

$B_S(x) = \{z : z B_S x, z \in A\}$ 連合方式がSで固定
 $B(x) = \{z : z B x, z \in A\}$ どんな連合でも可

§ 16.6.定義：コアー

コアー $= \{x \in A : B(x) = \emptyset\}$

すなわち、どんな連合でも阻止できない実現可能配分のことである。

§ 16.7.定義

連合Sのメンバー数を s とする。

$x_S = [x_i]_{i \in S}$ を、実現可能配分 x の部分 s 次元ベクターとする ($x_i \in X_i, i \in S$)
 $X_S = \prod_{i \in S} X_i$

連合S内で実現可能な配分は以下のように定義される：

$A_S = \{x_S \in X_S : \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} x_i^{\wedge}\}$

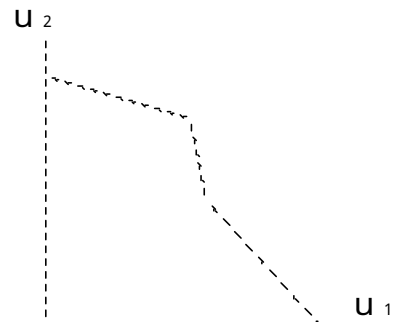
関数 $u_S : A_S \rightarrow \mathbb{R}^s$ を以下のように定義する：

$u_S(x_S) = [u_i(x_i)]_{i \in S}$ s 次元ベクター

§ 16.8.定義：効用フロンティアー

Utility possibility set 効用可能集合

集合 $U(S) = \{u_S : x_S \in A_S \text{ such that } u_S = u_S(x_S)\}$



§ 16.9.例：

消費者が3人、消費集合が非負実数空間の場合、連合の可能性は

$\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$

$U_{(1,2)} = U(\{1,2\})$ と表示すると

$U_{(1,2)} = \{(u_1, u_2) : x_i \in X_i, \text{ に対して、 } u_i = u_i(x_i), i=1,2 \text{ ただし } x_1 + x_2 = x_1^{\wedge} + x_2^{\wedge}\}$

§ 16.10.定理：nonempty core

Scarf の定理：選好順序が convex な純粋交換経済のコアーは空でない nonempty.

§ 16.11.定義：Competitive equilibrium 競争均衡

ベクターの組み合わせ $\{p^*, x^*\}$ は、以下の条件を満たすとき、競争均衡 (C.E.) と呼ばれる：

$x^* \in A, p^* \in \mathbb{R}^n, p^* \geq 0$

$(x_i : x_i \in X_i \text{ \& } p^* x_i = p^* x_i^{\wedge} \text{ \& } i=1, \dots, m) : u_i(x_i^*) \geq u_i(x_i)$

$\sum_{i=1}^m x_i^* = \sum_{i=1}^m x_i^{\wedge}$

§ 16.12.定理：Debreu and Scarf の定理

すべての C.E. はコアーの中にある。

§ 16.13.定義：

消費者は以下の条件を満たすとき、同一タイプと呼ばれる：
効用関数が同一、消費集合が同一、初期保有量が同一

§ 16.14.定義：k タイプ r 人経済

k 個のタイプの消費者が存在し、個々のタイプには r 人がいる場合、i - タイプの j - 消費者の消費ベクトルは、 x_{ij} , $i=1,...,k$; $j=1,...,r$ 。

全体として初期保有量は、 $\sum_{i=1}^k (r x_i^0)$ と表される。

§ 16.15.定理：

仮定 A 1' i : 消費集合 X_i は convex で、効用関数 u_i は strictly quasi-concave

この仮定のもとで、消費集合の組み合わせ $(x_{11}^*, ..., x_{1r}^*, ..., x_{k1}^*, ..., x_{kr}^*)$ がコアにある配分であれば、同一タイプの消費者は同一の消費ベクトルとなる。

§ 16.16.注意：

§ 16.15.定理により、k タイプ r 人経済のコアにある配分は $(x_1, ..., x_k)$ と表示できる。
コアにある配分は r に依存するから、コアは $C(r)$ と表現できる。

k タイプ r 人経済の配分 $(x_1, ..., x_k)$ が連合 S で阻止されれば、k タイプ r + 1 人経済の配分 $(x_1, ..., x_k)$ も連合 S で阻止されるから、 $C(r+1) \subset C(r)$ となって、コアは r の増加につれて縮小(非増加)する。

§ 16.17.定義：

仮定 A 1 すべてのタイプについて消費集合は X_i で、効用関数は strictly quasi-concave

仮定 A 2 (nonsatiation)

すべての x_i について、 $\exists x_i'$ such that $u_i(x_i') > u_i(x_i)$

仮定 A 3 (interior point)

すべてのタイプについて、 $x_i^0 > 0$

注意：仮定 A 3 は cheaper point (x_i' such that $p \cdot x_i' < p \cdot x_i^0$) の存在を意味する。

§ 16.18.定理：Debreu and Scarf の Limit Theorem

仮定 A 1 ~ 3 のもとで、消費集合の組み合わせ $(X_1, ..., X_k)$ がすべての r (k を含む) についてコアにあれば、それは 1 つの競争均衡である。

注意：r = k でなければ、コアにあって C.E. とはかぎらない。

§ 16.19.定理：

§ 16.12. と § 16.18. より以下の命題が満たされる：

極限 ($r \rightarrow \infty$) では、コアと競争均衡点の集合は等しい。

§ 16.20.定理：Aumann の定理

消費者数が連続数存在すれば、選好順序が convex でなくても、コアは空でない。

同一数のメンバーがいる同一タイプの消費者を仮定しなくても、消費者数が連続数存在すれば、コアと競争均衡点の集合は等しい。

第 17 章. 均衡の存在とユニーク性

第1節ワルラス・カッセルの一般均衡モデル Walras-Cassel system

§ 17.1.定義：

a_{ij} = 生産係数 coefficient of production で、 j - 財 1 単位生産に必要な i - 生産要素量

x_j = 経済全体として生産される j - 財、 $j=1,...,n$

v_i = 経済全体として利用できる i - 生産要素量、 $i=1,...,m$

$p = (p_1, ..., p_n)$ で、財価格を表す n - ベクトル

$w = (w_1, ..., w_m)$ で、要素価格を表す m - ベクトル

とすると、ワルラス型の、生産部門付き、競争市場の、一般均衡モデルは、以下のよう
に定式化される：

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = v_i \quad i=1,...,m \quad \text{式 17.1}$$

$$\sum_{i=1}^m w_i a_{ij} = p_j \quad j=1,...,n \quad \text{式 17.2}$$

$$v_i = v_i(p, w) \quad i=1,...,m \quad \text{式 17.3}$$

$$x_j = x_j(p, w) \quad j=1,...,n \quad \text{式 17.4}$$

式 17.3 の要素供給関数は生産者の利潤最大化行動から、式 17.4 の財需要関数は消費者の効用最大化行動から導出される。式 17.1 が生産要素への総需要量を決め、式 17.3 が生産要素の供給量を定める。財の需要量は式 17.4 で決められる。式 17.2 は利潤がゼロであることを示す。

式 17.1 の v_i と式 17.3 の v_i が同じ記号であるから、個々の生産要素の需給は一致していると仮定されている。財についても式 17.1 と式 17.4 の x_j も同じ記号であるから、需給一致している。

a_{ij} は利潤最大化行動で決まるから、 $a_{ij} = a_{ij}(p, w)$ とするモデルも考えられる。

§ 17.2.説明：

ワルラスの法則によって

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = \sum_{i=1}^m w_i v_i$$

であるから、システム全体として $2m + 2n - 1$ 個の式があり。一方、価格の 1 つをニューメーラールとすれば、未知の変数も $2m + 2n - 1$ 個あるから、解が存在し、競争均衡が存在する可能性がある。

しかし、式数と未知数が等しくても解が存在するとはかぎらない。たとえば、

$$x + y = 10$$

$$x + y = 20$$

のシステムは 2 個の式と 2 個の未知数があるが、解は存在しない。

§ 17.3.定義：Schlesinger によるワルラス・カッセルの一般均衡モデルの再定式化

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq v_i \quad i=1,...,m \quad \text{式 17.5}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < v_i \quad w_i = 0 \quad \text{式 17.6}$$

$$\sum_{i=1}^m w_i a_{ij} = p_j \quad j=1,...,n \quad \text{式 17.7}$$

$$p_j = f_j(x_1, ..., x_n) \quad j=1,...,n \quad \text{式 17.8}$$

$$v_i = v_i^{\wedge} \quad i=1,...,m \quad \text{式 17.9}$$

$$p_j \geq 0, x_j \geq 0, w_i \geq 0 \quad i=1,...,m, j=1,...,n \quad \text{式 17.10}$$

式 17.8 は逆需要関数である。 v_i^{\wedge} は初期保有量。

§ 17.4.定理：Wald による一般均衡解の存在証明

以下の条件を満たすときには、システム式 17.5 ~ 式 17.10 にはユニークな解が存在する：

$$i \& j : a_{ij} \geq 0$$

$$v^{\wedge} = [v_1, ..., v_m] > 0 \quad \& \quad i \& j : a_{ij} = \text{一定}$$

$$j : i : a_{ij} > 0$$

需要関数 f_j は single-valued で連続的な関数で、すべての $x = [x_1, ..., x_n] > 0$ で定義さ

れている。

$\{x^q\}$ が財ベクターの点列で、 $x^q \rightarrow x'$ とすると、 $x_j^q=0$ であれば、 $f_j(x^q)$

$p = f(x, p^x)$ 、 $p' = f(x', p'^x)$ とすると、

以下の条件のいずれかが成立する(ただし $x \rightarrow x'$) :

(a) $p^x < p'^x$ (b) $p'^x < p^x$

(あるいは $p^x \leq p'^x$ $p'^x < p^x$)

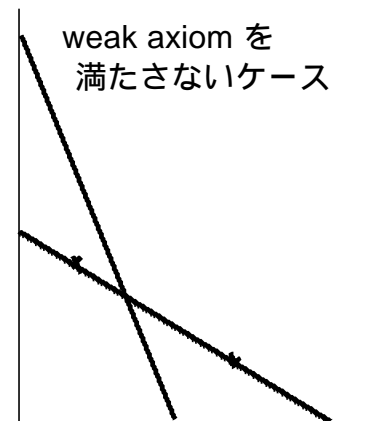
注意：条件は財の生産には生産要素が必要とする。

条件は価格が無限に大きいときには需要がゼロ

需要が有限であれば価格 >0

条件は解のユニーク性のための条件。これは

revealed preference の weak axiom (§ 17.16.参照)



§ 17.5.説明：存在証明の概略

ステップ

定義：行列 $A = [a_{ij}]$

実現可能集合 $X = \{x : x \geq 0, Ax \leq v^*\}$

Lemma 1：集合 X はコンパクトで convex。

定義：

以下の問題：

Maximize p^x subject to $x \geq 0, Ax \leq v^*$

式 17.1 1

の解として、関数 $x = G(p)$ を定義。

合成関数 $f = G$ よりコレスポネンス $F : X \rightarrow X$ を定義

Lemma 2：関数 f の連続性よりコレスポネンス F は upper-semicontinuous

Lemma 3：写像 $F(x)$ は空でなく、かつ、convex

ステップ

第1部 § 5.50 の Kakutani's fixed point theorem すなわち

『 $X \subset \mathbb{R}^n$ を、(i) コンパクトで convex とする。(ii) コレスポネンス $F : X \rightarrow X$ が upper-semicontinuous で、(iii) $F(x)$ が convex とすると、fixed point が存在する』

における条件 (i) ~ (iii) は Lemma 1 ~ 3 で満たされるから、以下のような点が存在する：

$x^* \in X$ かつ $x^* \in F(x^*)$ 、

したがって、 $p = f(x)$ 、かつ式 17.1 1 の問題の解となる(式 17.5 を満たす) x^* が存在する。

ステップ

L P の双対定理(第1部 § 11.9)によって以下の問題にも解が存在する：

Minimize w^v subject to $A^t w = p^*, w \geq 0$

この解を w^* とすると、これは式 17.7 を満たす。したがって、組み合わせ (p^*, x^*, w^*) は、Schlesinger によるワルラス・カッセルの一般均衡モデルを表す式 17.5 ~ 式 17.10 の解となる。

第2節 Makenzie の一般均衡モデル

§ 17.6.定義：

x_i 消費者 i の消費量で、 n -ベクター、 $i=1, \dots, m$ 。

X_i 消費者 i の消費集合、 $X_i \subset \mathbb{R}^n$ 負の消費量は生産要素

Y 総生産集合 aggregate production set

§ 17.7.定義：消費集合に関する仮定

仮定 A 1: X_i は convex、closed、bounded

仮定 A 2: X_i は

complete quasi-ordering(第2部 § 1.5 参照)すなわち

Axiom 1 reflexivity 反射 $x \in X : x \preceq x$

Axiom 2 transitivity 推移 $x, y, z \in X : x \preceq y \text{ \& } y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$

Axiom 3 completeness 完備 $x, y \in X : x \preceq y \text{ or } y \preceq x$

で順序付けられており、この選好順序は以下の条件を満たす：

strictly convex すなわち

$[x \in X, y \in X, x \preceq y, x \neq y, R, 0 \leq \alpha \leq 1] : \alpha x + (1-\alpha)y \preceq y$

連続的すなわち

$x \in X : \text{upper contour set 集合}\{y \in X : y \succeq x\} \text{ も、lower contour set 集合}\{y \in X : x \preceq y\} \text{ も、} X \text{ で closed 閉じている(閉集合となる)}$

注意： 選好順序が strictly convex 効用関数は strictly quasi-concave

選好順序が連続的 [数列 $\{x^q\} \in X \text{ \& } \{y^q\} \in X \text{ \& } x^q \preceq x^* \text{ \& } y^q \preceq y^* \text{ \& } x^q \preceq y^q] \Rightarrow x^* \preceq y^*$

§ 17.8.定義：総生産集合Yに関する仮定

仮定 A 3: Y は closed convex cone(第1部 § 4.8)

仮定 A 4: $Y \cap \{0\} = \{0\}$ (第2部 § 4.3)

注意：

仮定 A 3 は、総生産集合 aggregate production set が規模に関して収穫一定を意味するから、個々の企業の収穫逓減を排除しない。

外部経済・不経済を排除している。

仮定 A 3 と A 4 より利潤はゼロとなる。

§ 17.9.定義：

消費者 i の予算制約は以下のように定義される：

$H_i(p) = \{x_i : p \cdot x_i \leq 0, x_i \in X_i\}$

価格 p のもとでの消費者 i の Upper-contour set

$C_i(p) = \{x_i' : x_i' \succeq x_i \text{ for } x_i \in H_i(p)\}$

価格 p のもとでの経済全体の Upper-contour set

$C(p) = \bigcup_{i=1}^m C_i(p)$

§ 17.10.定義：

x_i を $x_i'' \in X_i : x_i \preceq x_i''$ で定義される飽和点とすると、以下の条件を満たすとき、消費者 i は価格 p のもとで(の購入量 x_i で)飽和していると言う：

$x_i' \in C_i(p) : x_i \preceq x_i'$

§ 17.11.定義：消費・生産集合に関する仮定

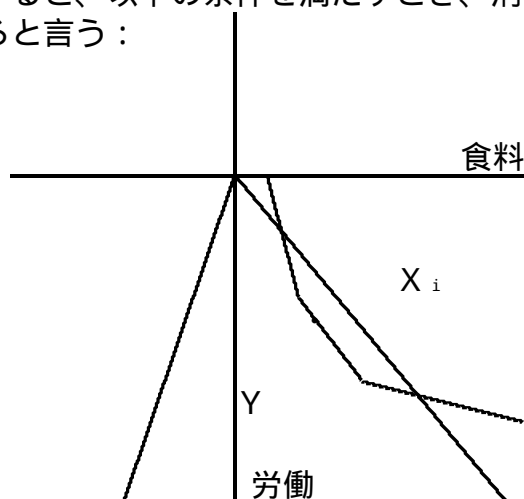
仮定 A 5: $i : \text{Interior}(X_i \cap Y)$

仮定 A 6: (イ) どの消費者も価格 p で飽和しない、
あるいは、(ロ) ある消費者が飽和している場合は $C(p) \cap Y = \{0\}$ となる。

注意：

仮定 A 5 は、すべての消費者が、すべての生産要素をある程度保有していることを意味する。
したがって、すべての消費者はプラスの所得があり、市場での交換に参加できる(右図参照)。

仮定 A 5 は cheaper point assumption に等しい。



仮定 A 6 (0)は、消費者が価格 p のもとで飽和状態になるとすれば、そのときの消費者の需要合計は生産可能な量を上回っているということを意味する。すなわち飽和状態(パラダイス)は生産可能な領域にはないことを保証する。

§ 17.12.定義：競争均衡

ベクターの組み合わせ $\{x_1^*, \dots, x_m^*, y^*, p^*\}$ は、以下の条件を満たすとき、競争均衡と言う：

$$\begin{aligned} x_i^* &\in C_i(p^*) \cap H_i(p^*), \quad i=1, \dots, m \\ y^* &\in Y \quad \& \quad p^* y^* = 0 \quad \& \quad [y \in Y : p^* y = 0] \\ \sum_{i=1}^m x_i^* &= y^* \end{aligned}$$

注意：消費者 i の需要関数は $f_i(p) = C_i(p) \cap H_i(p)$ と定義でき、仮定 A 1 と A 2 のもとでは single-valued continuous function である(第 2 部 § 2.12 参照)。

§ 17.13.定理：均衡存在証明

仮定 A 1 ~ A 6 のもとでは競争均衡が存在する。

注意：証明の概略は以下のようなものである：

価格ベクターを要素とする集合から、convex でコンパクトな集合 P を定義する
効用最大化と利潤最大化を達成するような、コレスポネンス $F: P \rightarrow P$ を定義する。ただし、コレスポネンス F は upper-semi continuous になるように定義する。

Kakutani 定理を利用し、 $p^* \in F(p^*)$ を証明する。この p^* が競争均衡となる
たとえば、 $g(x) = \{p : \text{所与の } x \text{ に対して利潤最大化条件を満たす } p\}$ を定義し、さらに合成関数として、 $F(p) = g(x) \cdot f(p)$ を定義する。 $F: P \rightarrow P$ で、upper-semi continuous であれば、kakutani 定理が利用でき、 $p^* \in F(p^*)$ が証明でき、この p^* は需要関数 f で効用最大化条件を満たし、コレスポネンス g で利潤最大化条件を満たすから、競争均衡となる(詳しくは高山[1984], 2 nd., ed., p.265 以降を参照)。

第 3 節 競争均衡のユニーク性

§ 17.14.定義と仮定：

経済には $n + 1$ 個の財があり、第 0 財をニューメレールにできるものとする。

$f_i(p), i=1, \dots, n$, を超過需要関数とする。ただし、 $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ は価格ベクター。

$f_i(p)$ は single-valued, continuous, bounded from below とする。

§ 17.15.定義：均衡価格

$p^* \in \mathbb{R}_+^n$ は以下の条件を満たすとき、均衡価格ベクターと言われる：

$$f_i(p^*) \leq 0, \quad i=0, 1, \dots, n \quad \text{式 17.1 2}$$

$$p_i^* f_i(p^*) = 0, \quad i=0, 1, \dots, n \quad \text{式 17.1 3}$$

ただし、 $p_0 = 1$ 。

注意：

ワルラスの法則を使うと式 17.1 2 と式 17.1 3 はベクター記号で

$$f(p^*) \leq 0 \quad \& \quad p^* f(p^*) = 0$$

となる。ただし、

$$f(p) = [f_1(p), \dots, f_n(p)].$$

§ 17.16.定理：

Wald のユニーク性定理

以下の条件を満たすときには、
均衡はユニークである：

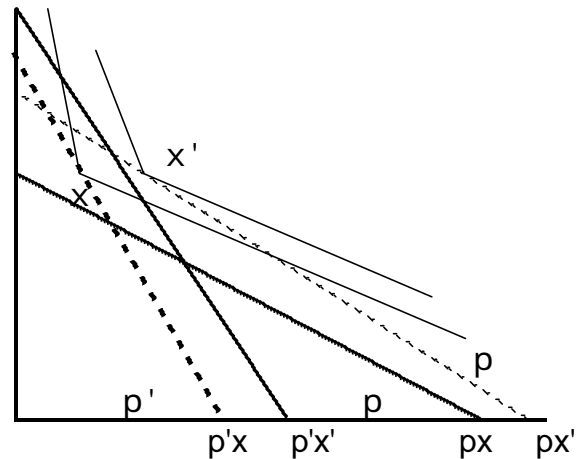
仮定 R： $x = f(p)$ かつ

$x' = f(p')$ とすると

以下の条件のいずれかが成立する：

(a) $p \cdot x < p \cdot x'$

(b) $p' \cdot x' < p' \cdot x$



注意：この条件は Samuelson の revealed preference 理論の weak axiom であるが、ここでは経済全体として考えている。

§ 17.17.定義

$f(p)$ を R^n の連結 (connected) 部分開集合 P から R^n への微分可能な関数とし、そのヤコビアンを $F(p) = [f_{ij}]$ とする。ただし、 $f_{ij} = f_i / p_j$ 。

§ 17.18.定義

$n \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ は以下の条件を満たすとき、ヒクシアン Hicksian と言う：

奇数階数の主 (首座) 小行列式 (principal minor) がすべてマイナス

偶数階数の主 (首座) 小行列式がすべてプラス

すなわち、以下のような $k \times k$ 行列を定義する (第 1 部 § 8.10 参照)：

$$D^{-k} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \dots & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & \dots & a_{jk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ki} & a_{kj} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

ただし、 (i, j, \dots, k) は $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ からの任意に取り出した k 個の順列 (順序も考慮にいたった k 個の数字の組合せ) とすると

$$D^{-1} < 0, D^{-2} > 0, D^{-3} < 0, \dots$$

注意：

第 1 部 § 8.18 より、 f のヘシアン (1 関数の多変数による 2 階微分の行列) が Hicksian であれば、 f は strictly concave な関数となることが分かっている。

一方、ここで問題となっているのは、ヤコビアン (複数次関数 $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i=1, \dots, n$ の複数次変数 x_i による第 1 階の偏微分行列) である。

しかし、ある関数 f を微分して 0 に等しいと置いた関係 ($f / x_i = g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i=1, \dots, n$) が、第 1 階の最適条件であれば、この n 個の第 1 階最適条件のヤコビアン ($x_i, i=1, \dots, n$ で偏微分) は、関数 f のヘシアンとなる。

したがって、関数 f の concavity がユニーク性を保証する可能性がある。

§ 17.19.定理：Gale-Nikaido の定理

R^n の部分集合 (region) P は長方形で、ヤコビアン $F(p)$ がすべての $p \in P$ において Hicksian とすると

写像 $f(p)$ はすべての $p \in P$ について one-to-one

不等式 $(p_i - p_i^*) [f_i(p) - f_i(p^*)] \leq 0, i=1, \dots, n$ の解は $p = p^*$ のみである。

§ 17.20.定理：競争均衡のユニーク性

$f(p)$ を微分可能な超過需要関数とし、 R^n の長方形の部分集合で定義されているものとする。このときには、 $F(p)$ が Hicksian であれば、競争均衡はユニークである。

§ 17.21.補助定理：(§ 19.14.参照)

$A = [a_{ij}]$ を $n \times n$ 行列で、 $i \neq j : a_{ij} \leq 0$ とする。このときには
 A が Hicksian $\Leftrightarrow x \geq 0 : Ax \leq 0$

§ 17.22.定義：粗代替性(weak) gross substitutability の仮定

仮定 G : $p_i \uparrow : f_{ij} \leq 0$

§ 17.23.定義：

$g_i(p, p_0) = f_i(p)$ 、 $i=1, \dots, n$

$g_0(p, p_0) = f_0(p)$

ただし、第 0 財はニューメレールで、 $p_0 = 1$ 。

§ 17.24.定理：

仮定 G と条件

$g_i / p_0 > 0$ 、 $i=1, \dots, n$

式 17.14

が成立すれば、均衡はユニークである。

§ 17.25.説明：

需要関数の 0 次同次性とオイラー定理より

$\sum_{j=1}^n (g_i / p_j) p_j = -g_i / p_0$ 、 $i=1, \dots, n$

よって式 17.14 が成立すれば、§ 17.21.補助定理の条件が満たされ、 $F(p)$ は Hicksian となり、§ 17.20.定理によって均衡はユニークとなる。

第 18 章.微分方程式の安定性と均衡の安定性

第 1 節微分方程式と均衡点の安定性

§ 18.1.例：第 1 階の微分方程式

$$x'(t) = a x(t)$$

式 18.1

ただし、 $x'(t) = dx(t)/dt$ 、 a は一定、 $x(t)$ は微分可能な実数値関数で、実数直線 real line で定義されている。

微分方程式を解くとは、 $x(t)$ を発見すること。

たとえば、 $x(t) = c e^{at}$ ($= c \exp(at)$ とも表示する)を考える。ただし、 c は一定のある値。これを t で微分すると式 18.1 になるから、これが解となる。

§ 18.2.定義：一般解 General solution と特定解 Particular solution

解 $x(t) = c e^{at}$ では、 c が特定されていない。このような解は一般解と言う。

初期条件として、 $x(0) = x_0$ があれば、解は $x(t) = x_0 e^{at}$ となる。

境界条件として、 $x(t_0) = x_0$ があれば、解は $x(t) = x_0 \exp[a(t - t_0)]$ となる。

これらは特定解と呼ばれる。

§ 18.3.定義： n - 階微分方程式

n - 階微分方程式の例

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = g(x)$$

特定解を得るためには、 n 個の境界条件が必要。

§ 18.4.定義：連立微分方程式体系

連結開集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ と区間 $T = (T^1, T^2) \subset \mathbb{R}$ を定義する。

$f_i, i=1, \dots, n$, を実数値関数で、 $X \subset \mathbb{R}^n \times T$ で定義されているものとする。

このとき微分方程式体系

$$x_i'(t) = f_i[x_1(t), \dots, x_n(t), t] \quad i=1, \dots, n$$

あるいはベクトル表示で

$$x'(t) = f[x(t), t]$$

は、 n 個の第 1 階微分方程式体系と言われる。この微分方程式体系の T の一部区間 $T' = (t^1, t^2)$ で定義される解 $x(t)$ とは以下のような条件を満たす関数：

$$x : T' \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \in T' : x(t) \text{ は連続}$$

$$t \in T' : x(t) \in X$$

$$t \in T' \text{ except 可算集合 } T'' : x'(t) = f[x(t), t]$$

§ 18.5.定義：初期条件

t_0 が初期時点で、点 $(x_0, t_0) \in X \times T$ が、条件 $x(t_0) = x_0$ を満たすとき、 $x(t_0) = x_0$ であれば、 (x_0, t_0) は初期条件と言われる。

このような初期条件を満たす解を $x(t; x_0, t_0)$ 、あるいは $x(t; x_0, t_0)$ 、あるいは $x(t; x_0)$ 、あるいは単に $x(t)$ と表示する。

§ 18.6.定義：

微分方程式体系 $x'(t) = f[x(t)]$ は autonomous system 自律系と言われ、微分方程式体系 $x'(t) = f[x(t), t]$ は nonautonomous system 非自律系と言われる。

§ 18.7.注意

一般的な第 n 階微分方程式

$$x^{(n)}(t) = f[x^{(n-1)}(t), \dots, x'(t), x(t), t]$$

は、

$$z_1(t) = x(t), z_2(t) = x'(t), z_3(t) = x^{(2)}(t), \dots, z_n(t) = x^{(n-1)}(t)$$

と置けば、

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = z_3$$

...

$$z_{n-2}' = z_{n-1},$$

$$z_{n-1}' = z_n,$$

$$z_n' = f[z_1(t), \dots, z_n(t), t]$$

となつて、 n 個の第 1 階微分方程式体系によって処理できる。

§ 18.8.定義：制御関数

微分方程式体系

$$x'(t) = f[x(t), u(t), t]$$

において、関数形が分かっている関数 $u(t) : \mathbb{R}^m$ は制御関数 control function と呼ばれる。

§ 18.9.定義：線形微分方程式体系

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + u_i(t), i=1, \dots, n$$

あるいはベクトル表示で

$$x'(t) = A(t)x(t) + u(t)$$

は、線形微分方程式体系と呼ばれる。 $u(t) = 0$ の場合には、同次 homogeneous と呼ばれる。

§ 18.10.定理：Cauchy-Peano 定理

n 個の第 1 階微分方程式体系

$$x'(t) = f[x(t), u(t), t]$$

を考える。ただし、 $f : X \times R^m \times T \rightarrow R^n$ で、以下の条件を満たす：

A 1: f は $X \times R^m \times T$ で連続

A 2: $i \neq j : f_i / x_j$ が定義域 $X \times R^m \times T$ で存在し連続的

A 3: 関数 $u(t)$ は、可算数の点 T を除いて、 T で連続的、すなわち区間連続的 piecewise continuous on T

A 4: $(x_0, t_0) \in X \times T$

このときには、 t_0 を含む区間 $T' = (t^1, t^2)$ から R^n への関数 $x(t)$ が存在して以下の条件を満たす：

$x(t)$ は T' で連続的

$(t_0) \in X$ 、かつ、 $x(t_0) = x_0$

$x'(t) = f[x(t), u(t), t]$ 、すなわち $x(t)$ は解となる

$x(t)$ が、区間 (s^1, s^2) で、これらの条件 \sim を満たせば、区間 $T' \subset (s^1, s^2)$ では $x(t) = x(t)$ 初期条件を満たす解はユニーク。

注意：

この定理は、区間 T' での解の存在を保証しているだけであるから、local に成立するだけ。区間 T' はきわめて狭い可能性もある。したがって、一般的には、大域的な解、すなわち区間 (t, ∞) での解については、その存在を仮定する必要がある。

仮定 A 2 は以下のような仮定で置き換えることができる：

仮定 A 2' (Lipschitz Condition)：

$(k > 0 \ \& \ k \in R) \ [x^1, x^2 \in X \ \& \ t \in T] :$

$$f(x^1, u, t) - f(x^2, u, t) \leq k \|x^1 - x^2\|$$

ただし、 $\| \cdot \|$ はユークリッドノーム ($\|d(x, 0)\| = \|x\|$)、第 1 部 § 2.7 参照)。

§ 18.11.定理：線形微分方程式体系の解存在

線形微分方程式体系

$$x'(t) = A(t)x(t) + u(t)$$

を考える。ただし、 $A(t)$ と $u(t)$ は T で連続で、初期値 $x_0 = (x_0, t_0) \in X \times T$ とする。

このときには、関数 $x(t)$ が存在して以下の条件を満たす：

$x(t)$ は T で連続的

$(t_0) \in X$ 、かつ、 $x(t_0) = x_0$

$x'(t) = A(t)x(t) + u(t)$ 、すなわち $x(t)$ は解となる

初期条件を満たす解はユニーク。

すなわち、線形微分方程式体系の場合には解存在は大域的に保証される。

§ 18.12.定義：

$$x'(t) = f[x(t), t]$$

における点 $x^* \in X$ は、条件 $f(x^*, t) = 0$ を満たすとき、均衡点 equilibrium point or state と呼ばれる。

§ 18.13.大域安定性

初期値 (x_0, t_0) とは関係なく、 t のとき $(t; x_0, t_0) \rightarrow x^*$ となれば、均衡点 x^* は大域的に安定と言う。正確には

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t^0 \geq t_0 \quad \forall t \geq t^0 + t' : \quad |(t; x_0, t_0) - x^*| < \epsilon$
ただし、 x_0 はいくらでも大きい値をとれる。

§ 18.14.定義：局所安定性

閉球 $B(x^*) : x_0 \in B(x^*) \Rightarrow (t; x_0, t_0) \rightarrow x^* \text{ as } t \rightarrow \infty$ のときには、均衡点 x^* は局所安定と言う。

正確には

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t^0 \geq t_0 \quad \forall t \geq t^0 + t' : \quad |(t; x_0, t_0) - x^*| < \epsilon$$

注意：

均衡点がユニークでなく、 t につれて、均衡点のどれかに収束するときには、体系が大域的に安定と言う。

均衡点に収束しない動学的システムが必ず発散するわけではない。収束も発散もしないシステムは一般的には均衡点を中心にぐるぐる回る(Bendixson の定理と言う)。

§ 18.15.例：

$$x'(t) = -a x(t),$$

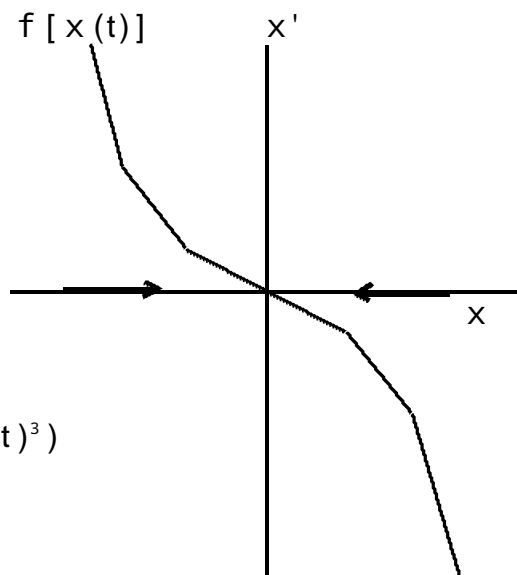
$$t, x \in \mathbb{R} \text{ で、 } x(t_0) = x_0$$

とすると、均衡点は $x^* = 0$ で、解は

$$(t; x_0, t_0) = x_0 \exp[-a(t - t_0)]$$

である。 $a > 0$ であれば、初期値に関係なく、

$(t; x_0, t_0) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$ であるから、
均衡点 $x^* = 0$ は大域安定である。



§ 18.16.定義：Phase diagram technique

$$\text{微分方程式 } x'(t) = f[x(t)] \text{ (たとえば } x'(t) = -x(t)^3 \text{)}$$

が右図のように示されれば、

$$x > 0 \text{ では、 } x'(t) < 0$$

$$x < 0 \text{ では、 } x'(t) > 0$$

となつて、均衡点は大域的に安定であることが分かる。

§ 18.17.定義：

固定係数の線形同次微分方程式体系

$$x'(t) = A x(t)$$

式 18.2

を考える。ただし、 $A = [a_{ij}]$ 、 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ 。§ 18.11.定理により解が存在する。

§ 18.18.定義：固有値 eigenvalue

$A = [a_{ij}]$ を $n \times n$ 行列とする (\mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n への線形関数)。

もし、 λ (スカラーで実数値か複素数)、 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $x \neq 0$ が、関係

$$A x = \lambda x$$

式 18.3

を満たせば、 λ は固有値 eigenvalue あるいは特性根 characteristic root、 x は固有ベクター eigenvector あるいは特性ベクター characteristic vector と呼ばれる。

§ 18.19.定義：固有方程式 eigen equation

式 18.3 は

$$(I - A)x = 0$$

式 18.4

と表され、 $x \neq 0$ であるから、行列 $I - A$ は線形従属(ベクター x_1, x_2, \dots, x_m が全てがゼロでない $i, i \in R, i=1, \dots, m$ に対して、 $\sum_i x_i = 0$ となれば線形従属で、その行列式は singular となる。第 1 部 § 3.3 参照)で

$$\det[I - A] = 0$$

となる。式 18.4 は固有方程式 eigen equation あるいは特性方程式 characteristic equation と言い、

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

と表される。

§ 18.20.例：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ なら } \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

となって、 $\lambda = 0$ と $\lambda = 2$ が固有値となる。

注意：

固有値が実数値になるとはかぎらない。複素数の場合には $\lambda = \alpha + i\beta$ と表される(i は虚数)。ただし、 α が実数部である。

§ 18.21.定理：

固定係数の線形同次の微分方程式体系式 18.2 において、 A が n 個の異なった固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を持てば、解は以下のように示される：

$$x_i(t; t_0, x_0) = \sum_{j=1}^n c_{ij} e^{\lambda_j t} x_{j0}, \quad i=1, \dots, n$$

ただし、 $x(0) = x_0$ (x_{10}, \dots, x_{n0})、 c_{ij} は一定。

§ 18.22.定理：

微分方程式体系式 18.2 の均衡点 $x^* = 0$ は、固有値の実数部が負であるとき、また、このときのみ大域安定的である。

注意：固定係数の線形同次微分方程式体系が、 $x'(t) = A[x(t) - x^*]$ と表されているときには、 $x = x^*$ が均衡点となる。また、 $z(t) = x(t) - x^*$ と置けば、 $z' = 0$ が均衡点となって、上記の定理が適用できる。

§ 18.23.例：解を求める

線形動学体系

$$x' = 2x + y$$

$$y' = x + 2y$$

式 18.5

を考えると、固有方程式は $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$

あるいは、

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

となって、 $\lambda = 3$ と $\lambda = 1$ を得る。 $\lambda = 3$ に対応する固有ベクターを b_{x1}, b_{y1} とする。すなわち関係

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{x1} \\ b_{y1} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} b_{x1} \\ b_{y1} \end{pmatrix}$$

を満たすとする。同様に $\lambda = 1$ に対応する固有ベクターを b_{x2}, b_{y2} とすると

$$(x = b_{x1} e^{3t}, y = b_{y1} e^{3t}) \quad \text{式 18.6}$$

と

$$(x = b_{x2} e^t, y = b_{y2} e^t)$$

式 18.7

が解となる。

§ 18.24.例：解の確認

これらが解となることを確認するために、たとえば式 18.7 を式 18.5 に代入すると

$$b_{x2} e^t = 2 b_{x2} e^t + b_{y2} e^t$$

$$- b_{x2} e^t = b_{y2} e^t$$

これは $-b_{x2} = b_{y2}$ とおけば ($\lambda = 1$ に対応する固有ベクターとなって) 満たされる。

§ 18.25.定理：

式 18.2 の動学的体系の線形独立な解として、 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ が発見されたとすると、これらの解の線形結合も式 18.2 の解となる。すなわち

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

も解となる。

§ 18.26.例：

§ 18.23.の例の場合には、2つの解式 18.6、式 18.7 は一次独立であるから、一般解は、

$$x = c_1 b_{x1} e^{3t} + c_2 b_{x2} e^t$$

$$y = c_1 b_{y1} e^{3t} + c_2 b_{y2} e^t$$

と表される。ただし c_i は境界条件で決められる。

注意：

この体系の場合は、経路は発散する。

経路が均衡点に収束する場合で、固有値が実数値であれば、時間的経路は均衡点に直線的に接近する。複素数の場合には、均衡点を中心に(ぐるぐる)回りながら spiral 接近する。

固有方程式が異なった根を持たなければ、§ 18.21.定理は成立しない。たとえば、2本の微分方程式で Double root 2重根 の場合には、一般解は以下のような形になる：

$$x = c_1 b_{x2} e^t + c_2 (b_{x1} + b_{x2} t) e^t$$

$$y = c_1 b_{y2} e^t + c_2 (b_{y1} + b_{y2} t) e^t$$

したがって、§ 18.22.定理は成立する。

§ 18.27.定理：

2×2 行列 A の固有値を λ_1 と λ_2 とすると

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{trace } A$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det A$$

となる。したがって、2個の固定係数線形微分方程式からなる体系、

$$x'(t) = A x(t), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

は、 $\text{trace } A < 0$ かつ $\det A > 0$ のとき、また、このときのみ均衡点が大域安定的となる(必要十分条件)。

§ 18.28.定理：

2本の微分方程式からなる体系を考える。

$$x'(t) = f[x(t), t], \quad x \in \mathbb{R}^2$$

均衡点を x^* とする。 $A = [a_{ij}]$ 、ただし $a_{ij} = f_i(x_1^*, x_2^*) / x_j$ と定義すると

$$\text{trace } A < 0 \text{ かつ } \det A > 0$$

であれば、均衡点は局部安定的となる(十分条件)。

§ 18.29.定理：

2本の微分方程式からなる体系を考える。

$$x'(t) = f[x(t), t], \quad x \in \mathbb{R}^2$$

均衡点を x^* が大域安定的となるの以下の条件を満たすとき：

$$x : f_{11} + f_{22} < 0 \text{ かつ } f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} > 0$$

$$x : f_{11}f_{22} > 0 \text{ もしくは } f_{12}f_{21} < 0$$

§ 18.30.定理：Routh-Hurwitz の定理

方程式

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

を考える。ただし、 $a_i, i=0,1,\dots,n$ は実数値で、 $a_0 > 0$ とする。この方程式の根の実数部が負であるための必要十分条件は以下の条件である：

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} > 0$$

§ 18.31.例：

$A = [a_{ij}]$ を 2×2 行列とすると、固有方程式は

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

ただし、

$$a_1 = -(a_{11} + a_{22})$$

$$a_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

このときには Routh-Hurwitz 条件は、 $a_0 = 1$ より

$$a_1 > 0 \text{ と } a_1 a_2 > 0$$

これは $a_1 > 0$ と $a_2 > 0$ と同値であるから、§ 18.27.と同じ結果となる。

§ 18.32.説明：線形近似

一般的な微分方程式

$$x'(t) = f[x(t)]$$

式 18.8

の均衡点を x^* とする(すなわち $f(x^*) = 0$)。このときには、 x^* でテーラー展開して、2次微分以上の項を無視することで、局所安定性を分析できる。

すなわち式 18.8 の局所安定性は固定係数線形同次微分方程式

$$x'(t) = A[x(t) - x^*]$$

を分析すればよい。ただし、 $A = [a_{ij}]$ で、 $a_{ij} = f_{ij}/x_j$ である(すなわち、関数 f のヤコビアン行列)。これを線形近似体系と言う。

§ 18.33.定理：

線形近似体系が安定的であれば、もとの微分方程式 $x'(t) = f[x(t)]$ も均衡点 x^* で局所安定的である。

もとの微分方程式が局所あるいは大域安定的であっても、線形近似体系が安定的になるとはかぎらない(2次微分以上の項が影響する)。

§ 18.34.例：phase diagram の例の微分方程式

$$x'(t) = -x(t)^3$$

は、 $x^* = 0$ が均衡点で、安定的であるが、線形近似は、 $x'(t) = 0$ となって、 $x^* = 0$ は安

定的でない。

§ 18.35.定理：

A が negative definite (第 1 部 § 8.9 参照) であれば、すべての固有値が実数で負となって、均衡点は安定的である。

注意：第 1 部 § 8.19 より、最大化の第 2 階十分条件は Hessian matrix が negative definite であったから、2 階十分条件から均衡の安定性を保証できる。

第 2 節 Liapunov's Second (Direct) Method による安定性の証明

§ 18.36.定義

Autonomous 微分方程式体系

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 18.9}$$

ただし、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ 、 $X \subset \mathbb{R}^n$ 、 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 。また f は連続的と仮定。あるいは nonautonomous 微分方程式体系

$$\dot{x}_i = f_i(x, t), \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 18.10}$$

ただし、 $f: X \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 、 $X \subset \mathbb{R}^n$ を考える。

均衡点を $x^*=0$ とする： $f(0)=0$ (もし $x^*=0$ でなければ、 $z = x - x^*$ と変換すれば処理できる)。

§ 18.37.仮定

均衡点は孤立均衡点、すなわち、 $B(0) : 0$ 以外の均衡点を含まない。

初期値 $B(0)$

注意：均衡点がユニークであれば、 $=$ とする。

§ 18.38.定義：リアプノフ安定性

動学的体系の均衡点 x^* は以下の条件を満たすとき、Liapunov 安定的と言う：

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.t.} \ \forall t_0 \in \mathbb{R} \ \forall x_0 \in B_\delta(x^*) \ \forall t \geq t_0: \|x(t; x_0, t_0) - x^*\| < \epsilon$$

注意：

これは、均衡点近傍の動きに関する定義であるから、local な定義である。

この定義は、 $\|x(t; x_0, t_0) - x^*\| \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ を保証しない。すなわち。この定義は初期値が均衡点の近くにあれば、 $x(t)$ は発散しないことを保証している。

§ 18.39.定義

動学的体系の均衡点 x^* は以下の条件を満たすとき、asymptotically locally stable 漸近局部安定的と言う：

Liapunov 安定的

初期値が均衡点に十分近い場合には、均衡点に収束する。すなわち

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.t.} \ \forall t_0 \in \mathbb{R} \ \forall x_0 \in B_\delta(x^*) \ \forall t \geq t_0: \|x(t; x_0, t_0) - x^*\| < \epsilon$$

注意：条件 $\|x(t; x_0, t_0) - x^*\| \rightarrow 0$ を満たしても $\|x(t; x_0, t_0) - x^*\| \rightarrow 0$ を満たさないケースがある。

§ 18.40.定義

動学的体系の均衡点 x^* は以下の条件を満たすとき、asymptotically globally stable 漸近大域安定的と言う：

Liapunov 安定的

すべての経路が均衡点に収束する。

§ 18.41.定義

動学的体系の均衡点 x^* は以下の条件を満たすとき、uniformly asymptotically globally stable 一様漸近大域安定的と言う：

Liapunov 安定性における ϵ が t_0 に依存しない。

すべての経路が uniformly に均衡点に収束する。すなわち

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \cdot \forall T > 0 \ \exists R > 0 \cdot \forall t \geq t_0 + T : \\ \|x(t; x_0, t_0) - x^*\| < \epsilon \quad \text{if} \quad \|x_0 - x^*\| < R$$

§ 18.42.定義：

動学的体系の均衡点 x^* は以下の条件を満たすとき、strongly uniformly asymptotically globally stable と言う：

Uniformly asymptotically globally stable

Uniformly bounded. すなわち

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \cdot \forall t \geq t_0 : \|x(t; x_0, t_0) - x^*\| < \epsilon \quad \text{if} \quad \|x_0 - x^*\| < \delta$$

§ 18.43.定理：リアプノフ関数 for uniformly asymptotically globally stability

Autonomous な微分方程式体系式 18.9 を考える。 $f(0)=0$ とする。 X で定義された連続微分可能な実数値関数 $V(x)$ が存在して以下の条件を満たすものとする：

$$x = 0 : V(x) > 0 \quad \& \quad V(0) = 0$$

$$x(t; x_0, t_0) \neq 0 : dV(x(t; x_0, t_0)) / dt < 0$$

$$V(x) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \|x\| \rightarrow 0$$

このときには、均衡点 $x^* = 0$ は uniformly asymptotically globally stable となる。

注意： $V(x)$ はリアプノフ関数と呼ばれる。

§ 18.44.定理：リアプノフ関数

Autonomous な微分方程式体系式 18.9 を考える。 $f(0)=0$ とする。 X で定義された連続微分可能な実数値関数 $V(x)$ と、空でなく有界な X の部分集合 D が存在して以下の条件を満たすとする：

$$x = 0 \ \& \ x \in D : V(x) > 0 \quad \& \quad V(0) = 0$$

$$x(t; x_0, t_0) \neq 0 \ \& \ x(t; x_0, t_0) \in D :$$

$$dV(x(t; x_0, t_0)) / dt < 0$$

このときには、均衡点 $x^* = 0$ は、初期値が D にあるかぎり、asymptotically globally stable となる。

§ 18.45.定理：strongly uniformly asymptotically globally stable

Nonautonomous な微分方程式体系式 18.10 を考える。 $t : f(0; t)=0$ とする。 $X \times (-\infty, \infty)$ で定義された連続微分可能な実数値関数 $V(x; t)$ が存在して以下の条件を満たすものとする：

$$V(0; t) = 0 \quad \text{かつ}$$

非減少実数値関数 $\phi(t)$ と $\psi(t)$ が存在し、 $\phi(0) = \psi(0) = 0$ で

$$t \ \& \ x = 0 : 0 < \phi(t) \leq V(x; t) \leq \psi(t) \quad (x \neq 0)$$

非減少実数値関数 $\eta(t)$ が存在し、 $\eta(0) = 0$ で

$$t \ \& \ x \neq 0 : dV(x(t; x_0, t_0), t) / dt - \eta(t) < 0$$

$$(x \neq 0) \quad \text{as} \quad \|x\| \rightarrow 0$$

このときには、均衡点 $x^* = 0$ は strongly uniformly asymptotically globally stable となる。

§ 18.46.定理：リアプノフ関数 for strongly uniformly asymptotically globally stability
 (上定理と同内容) Nonautonomous な微分方程式体系を考える。 $t: f(0; t)=0$ とする。 $X(-,)$ で定義された連続微分可能な実数値関数 $V(x; t)$ と連続的な正定値 positive definite な関数 a, b, c が存在して以下の条件を満たすものとする：

$$V(0; t) = 0 \text{ かつ}$$

$$t \& x = 0 : 0 < a(x) \leq V(x; t) \leq b(x)$$

$$t \& x = 0 : dV(x(t; x_0, t_0), t) / dt \leq -c(x) < 0$$

$$a(x) \text{ as } x \rightarrow 0$$

このときには、均衡点 $x^* = 0$ は strongly uniformly asymptotically globally stable となる。

§ 18.47.例：

微分方程式 $x' = -x^3$ を考える。 $V(x) = x^2$ と置くと

$$x = 0 : V(x) > 0 \text{ で } V(0) = 0$$

$$dV/dt = 2x x' = -2x^4 < 0$$

$$V(x) \text{ as } x \rightarrow 0$$

となって、均衡点 $x^* = 0$ は uniformly asymptotically globally stable となる。

§ 18.48.例：動学的体系

$$x' = -x - x y^2$$

$$y' = -y - x^2 y$$

を考える。

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

を定義すると

$$V(x, y) > 0 \text{ except for } x = y = 0$$

$$V(x, y) \text{ as } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

$$V' = V_x x' + V_y y'$$

$$= 2x(-x - x y^2) + 2y(-y - x^2 y)$$

$$= -[2(x^2 + x^2 y^2) + 2(y^2 + x^2 y^2)] < 0 \text{ except for } x = y = 0$$

したがって、uniformly asymptotically globally stable となる。

第3節競争均衡の安定性：財2種類のケースの

§ 18.49.定義：

超過需要関数 $f_i(p)$, $i=1, 2$, $p = (p_1, p_2)$ を考える。このときには、 $p = p_1/p_2$, $f = f_1$ と表示すると、調整プロセスは以下のように表示される：

$$p'(t) = k f(p(t))$$

ただし、 k は調整速度。均衡点は孤立点 p^* とする。

§ 18.50.定理：

2財のケースでは、以下の命題が満たされる：

$$p^* \text{ が局所安定的 } df(p^*)/dp < 0$$

$$p^* \text{ が大域安定的でユニーク } p^* \text{ such that } f(p^*) = 0 : df(p^*)/dp < 0$$

注意：Phase diagram を描けば明らかである。

第4節競争均衡の安定性：財3種類のケースの Phase diagram 分析

§ 18.51.定義：

超過需要関数 $f_i(p)$, $i=1, 2, 3$, $p = (p_1, p_2, p_3)$ を考える。均衡点は $p^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$

p_3^*)とする。

仮定 A 1 (Gross substitutability) $i \neq j \text{ \& } i \neq j \text{ \& } p : f_{ij} > 0$

仮定 A 2 (Homogeneity) $i : f_i(p)$ は正の零次同次関数
すなわち $\lambda > 0 : f_i(\lambda p) = f_i(p)$

仮定 A 3 (Walras' law) $p : \sum_{i=1}^3 p_i f_i = 0$

仮定 A 4 (正価格) $p_i > 0$

仮定 A 5 (解存在) $p^* : f_i(p^*) = 0$

§ 18.52.定義：

仮定 A 2 より、 $p_3 = 1$ と置いて、
価格ベクトルを正規化 normalize できる。

また、

Walras' Law によって 2 市場で均衡すれば

3 番目の市場も均衡するから、

動学的調整プロセスは以下のような

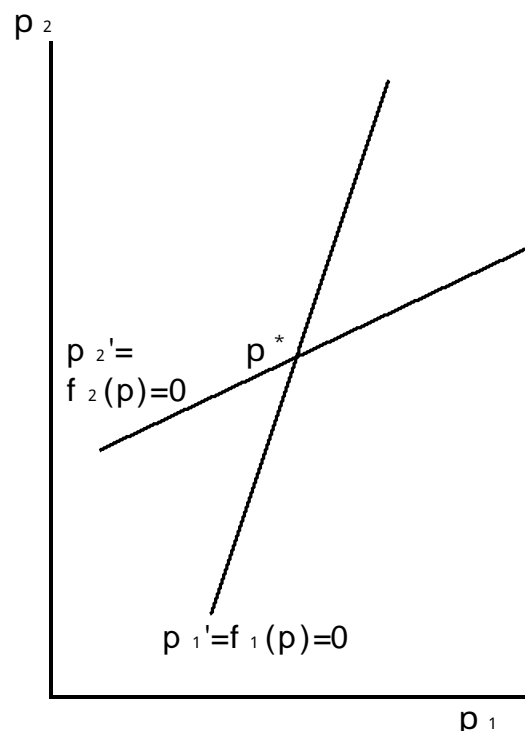
2 式を考えればよい：

$$p_1'(t) = k_1 f_1(p_1, p_2) \quad \text{式 18.1 1}$$

$$p_2'(t) = k_2 f_2(p_1, p_2) \quad \text{式 18.1 2}$$

ただし、 k_i は正の実数値で調整速度を表す。

$k_i = 1, i=1, 2$, となるように個々の財の単位をとれば、 k_i は省略できる。



§ 18.53.定義：

右図のような Phase diagram

が描け、以下のような性質を満たす：

均衡点はユニーク

A 2 より Euler の定理で、 $i : \sum_{j=1}^3 f_{ij} p_j = 0$ 。よって、A 1 と A 4 より、
 $f_{ii} < 0$ 式 18.1 3

また、 $j : \sum_{i=1}^2 p_i \cdot f_{ij} / p_j = - f_{3j} / p_j < 0$ 。よって、後述のフロベニウス定理の章にある定理 5-1 4 の と により、 f_1 と f_2 のヤコビアンは Hicksian となる。したがって、適当に矩形の定義域を設定すれば、Gale-Nikaido 定理 (§ 17.20.) によって、均衡点はユニーク。

$f_i(p)$ 曲線 $i=1, 2$ は右上がり：

たとえば式 18.1 1 を微分すると

$$f_{11} dp_1 + f_{12} dp_2 = 0 \quad dp_2 / dp_1 = - f_{11} / f_{12}$$

となつて、式 18.1 3 と A 1 よりプラスとなる。

f_1 曲線の左では $p_1' > 0$ 、右では $p_1' < 0$

$dp_1' / dp_1 = f_{11} < 0$ より、右では $p_1' < 0$

f_2 曲線の左では $p_2' > 0$ 、右では $p_2' < 0$

$dp_2' / dp_2 = f_{22} < 0$ より、右では $p_2' < 0$

以上より、図の矢印のような動きが確認され、均衡点 p^* は安定的であることが分かる。

第 5 節競争均衡の安定性 : n 種類の財のケース

§ 18.54.定義：

純粋交換経済を考え、以下のような調整プロセスを想定する：

$$p_i'(t) = f_i(p) \cdot x(p) - x^*, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 18.1 4}$$

ただし、 $p = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ 。

§ 18.55.定義：

以下のように仮定する：

関数 $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は連続微分可能とする。

初期条件は $p(0) = p^0 > 0$ とする。

微分方程式体系式 18.14 には $t \in [0, \infty)$ でユニークな解が存在する。

均衡価格ベクター $p^* > 0$ が存在する。

§ 18.56.定義：

さらに以下のような仮定も置く：

仮定 A 1 (Gross substitutability) $i \neq j \text{ \& } i \neq j \text{ \& } p : f_{ij} > 0$

仮定 A 2 (Homogeneity) 需要関数 $x_i(p)$ は正の零次同次関数

仮定 A 3 (Walras' law) $p : \sum_{i=1}^n p_i f_i(p) = 0$

§ 18.57.補助定理：

仮定 A 1 (Gross substitutability) と A 2 (Homogeneity) のもとでは、均衡価格ベクターは正のスカラーで乗ずればユニークで、 p^* と表示できる。ただし、 $p^* > 0$ 。

注意：たとえば $p_1^* = 1$ と置けば、他の均衡価格ベクターはユニークに決まる。

§ 18.58.補助定理

$p > 0 \text{ \& } p^* > 0$ such that $p - p^* : \sum_{j=1}^n p_j^* f_j(p) > 0$

証明は略(高山[1984]、2nd、p.327)

§ 18.59.定理：Arrow-Block-Hurwicz の一般均衡点の安定性定理

p^* を均衡価格ベクターとすると、仮定 A 1 ~ A 3 のもとでは、微分方程式体系式 18.14 は大域安定的である。

§ 18.60.証明概略：

ユークリッド距離でリアプノフ関数を以下のように定義する：

$$V(p(t)) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \{p_j(t) - p_j^*\}^2$$

このときには

$$p = p^* : V(p) > 0 \text{ \& } V(p^*) = 0$$

$$p = p^* : dV(p)/dt < 0$$

$$V(p) \rightarrow 0 \text{ as } p \rightarrow p^*$$

が成立して、均衡点 p^* は大域安定的 uniformly asymptotically globally stable となる。

ただし、条件は以下のように示される：

$$\begin{aligned} dV/dt &= \sum_{j=1}^n \{p_j(t) - p_j^*\} \cdot dp_j/dt \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \{p_j(t) - p_j^*\} \cdot f_j(p) \\ &= 2 \left\{ \sum_{j=1}^n p_j(t) f_j(p) - \sum_{j=1}^n p_j^* f_j(p) \right\} \\ &= -2 \sum_{j=1}^n p_j^* f_j(p) \quad \text{Walras' Law で } \sum_{j=1}^n p_j(t) f_j(p) = 0 \end{aligned}$$

これは § 18.58.補助定理でマイナスとなる。

§ 18.61.例：Gross substitutability

効用関数が

$$u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \log x_j \quad \text{式 18.15}$$

ただし、 $\alpha_j = 1, \alpha_j > 0$ 、を考える。

ラグランジュ乗数を p_j とすると、効用最大化問題の第 1 階条件は、

$$p_j = -u' / x_j, j=1, \dots, n \quad \text{式 18.16}$$

となる。効用関数式 18.1 5 が concave であるため、この解は global maximum となる。

これらの関係より

$$p_j = u_j / x_j = \lambda_j / x_j, j=1, \dots, n \quad \text{式 18.1 7}$$

したがって、 $\lambda_j > 0$ となって、所得 M がすべて使われる。すなわち

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = M。$$

式 18.1 7 より得られる関係 $p_j x_j = \lambda_j$ を j について合計すると

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = \sum_{j=1}^n p_j x_j = M$$

$$M = 1 /$$

式 18.1 8

初期保有量を x_i^0 とすると

$$M = \sum_{j=1}^n p_j x_j^0$$

式 18.1 9

式 18.1 7、式 18.1 8、式 18.1 9 より

$$x_j = \lambda_j / p_j = \lambda_j M / p_j = \lambda_j \sum_{j=1}^n p_j x_j^0 / p_j$$

よって、

$$x_j / p_j = \lambda_j x_i^0 / p_j > 0$$

となる。したがって、 $p_j > 0$ と $x_i^0 > 0$ と仮定すれば、粗代替性が成立する。

§ 18.62.注意：

仮定 A 1 (Gross substitutability) と A 2 (Homogeneity) は、 $p > 0$ でないと両立しない。たとえば、 $p_k = 0$ とすると、Gross substitutability によって $x_{ik}(p) > x_{ik}(p)$ となる。ただし、 λ はスカラーで、 $\lambda > 1$ 、また、 x_{ik} は i 消費者の k 番目の財の消費量を示す。ところが、Homogeneity は、条件 $x_i(p) = x_i(\lambda p)$ が成立することを意味するから、これらの 2 仮定は矛盾する。

§ 18.63.注意：

これらの均衡点の安定性の分析では、Tatonnement(タトンマン)プロセスが仮定されている。すなわち均衡点の実現するまでは、取引はまったく行わない。

§ 18.64.定義：n 財競争市場の調整プロセスの線形近似

純粋交換経済を考え、以下のような調整プロセスを想定する：

$$p_i'(t) = f_i(p) - x_i(p) - x_i^0, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 18.2 0}$$

ただし、 $p = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ 。均衡点を p^* とする(すなわち $f(p^*) = 0$)。このときには、 p^* でテーラー展開した線形近似体系で、局部安定性を分析できる。すなわち、この体系の局部安定性は固定係数線形同次微分方程式

$$p'(t) = A[p(t) - p^*]$$

を分析すればよい。ただし、 $A = [a_{ij}]$ で、 $a_{ij} = -f_i(p^*) / p_j$ である(すなわち、関数 f の p^* におけるヤコビアン行列)。

§ 18.65.分析：

§ 18.22.定理によって、行列 A の固有値の実数部分がマイナスであれば、均衡点は安定的となる。

§ 18.35.定理によって、A が negative definite であれば、固有値は実数でマイナスとなるが、A は対称行列でさえない。

また、§ 18.30.によって、A の固有方程式がラウスハーヴィッツ条件を満たせば、均衡は安定的となる。しかし、この条件は複雑で経済学的意味が解明できない。

この問題への対応方法は次章で明らかにされる。

第 19 章.フロベニウス定理と投入産出分析、安定性分析および比較静学

第 1 節フロベニウス定理

§ 19.1.定義：投入産出分析 Leontief's Input-Output Analysis

a_{ij} = 非負の生産係数 coefficient of production で、 j - 財 1 単位生産に必要な i - 生産要素量。Cassel と同様にして Leontief でも一定と仮定される。

x_j = 経済全体として生産される j - 財の量、 $j=1, \dots, n$

c_j = 経済全体として消費される j - 財の量、 $i=1, \dots, n$

このときには、需給一致は以下のように定義される：

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + c_j = x_i, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 19.1}$$

あるいは、投入産出行列 input-output matrix $A = [a_{ij}]$ を用いると

$$A x + c = x$$

さらに、 I を単位行列とすると

$$(I - A) x = c$$

と表される。したがって、式 19.1 は以下のようにも表される：

$$x = (I - A)^{-1} c \quad \text{式 19.2}$$

これより、 c が分かれば、 x = 各産業の産出量が予測できる。

注意：

戦後 Leontief によって行われて成功したため、行列 $(I - A)$ は Leontief 行列と言われる。

§ 19.2.定義：投入産出分析における存在問題と nonsingular 問題

「すべての c に対して、関係式 19.2 を満たすような x が存在するか？」という問題と、
「行列 $(I - A)$ は nonsingular か、また $(I - A)^{-1} \geq 0$ を保証できるか」と言う 2 つの問題が生じる。

§ 19.3.定義：Decomposable Matrix and Indecomposable matrix

行列 A の行あるいは列をいろいろと入れ換えることによって、行列 A が

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

と表されるときには、行列 A は decomposable であると言い、不可能なときには indecomposable と言う。ただし、 A_{ii} は行と列の数が等しい A の部分行列。

§ 19.4.定義：固有値 eigenvalue (§ 18.18.再掲)

$A = [a_{ij}]$ を $n \times n$ 行列とする (R^n から R^n への線形関数)。

もし λ はスカラー (実数値か複素数)、 $x \in R^n$ 、 $x \neq 0$ が、関係

$$A x = \lambda x \quad \text{式 19.3}$$

を満たせば、 λ は固有値 eigenvalue あるいは特性根 characteristic root、 x は固有ベクター eigenvector あるいは特性ベクター characteristic vector と呼ばれる。

§ 19.5.定義：固有式 eigen equation (再掲)

式 19.3 は

$$(I - \lambda A) x = 0 \quad \text{式 19.4}$$

と表され、 $x \neq 0$ であるから、行列式は singular となって

$$(\lambda) \quad \det [I - \lambda A] = 0$$

となる。式 19.4 は固有式 eigen equation あるいは特性式 characteristic equation と言い、

$$(\lambda) \quad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

と表される。

例： $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なら $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^2$

となって、 $\lambda = 1$ が固有値となるが、重複根で単一根でない。

§ 19.6.定理：フロベニウス定理 indecomposable なケース

行列 A は、indecomposable な $n \times n$ 行列で、 $A \geq 0$ とすると

A は固有値 $\lambda^* > 0$ を持つ

λ^* の固有ベクターはプラス、すなわち $x^* > 0$

もしある $\mu < 0$ と $x > 0$ に対して、 $Ax = \mu x$ が成立すれば、 $\mu = \lambda^*$

もし λ が A の固有値とすれば、 $|\lambda| \leq \lambda^*$

A の要素のいずれかが増加すれば、 λ^* も増加する。すなわち、 $A_1 \leq A_2$ ならば $\lambda_1^* \leq \lambda_2^*$

λ^* は単一根である。

§ 19.7.定理：フロベニウス定理 decomposable なケース

行列 A を非負の $n \times n$ 行列とすると

A は固有値 $\lambda^* \geq 0$ を持つ

λ^* の固有ベクターはプラス、すなわち $x^* \geq 0$

もしある $\mu < 0$ と $x > 0$ に対して、 $Ax = \mu x$ が成立すれば、 $\lambda^* = \mu$

もし λ が A の固有値とすれば、 $|\lambda| \leq \lambda^*$

$A_1 \leq A_2$ ならば $\lambda_1^* \leq \lambda_2^*$

§ 19.8.定義：フロベニウス根 Frobenius Root

上記のような固有値を、 A のフロベニウス根と言い、以下では、 λ^* と表示する。

§ 19.9.定義：Dominant Diagonal Matrix

行列 $A = [a_{ij}]$ を $n \times n$ 行列が、以下の条件を満たすとき、行列 A は dominant diagonal を持つと言う：

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} a_{ij}, j=1, \dots, n$$

注意：より一般的には以下のように定義される：

$$j \left(\sum_{k \neq j} a_{jk} > 0 \text{ \& } \sum_{k \neq j} a_{jk} \in \mathbb{R} \text{ \& } k=1, \dots, n \right) : j \left(|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} a_{ij} \right)$$

§ 19.10.定理：dominant diagonal に関する定理

$n \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ を dominant diagonal matrix とすると、

A は nonsingular

dominant diagonal 対角要素がプラスなら、すべての固有値はプラスの実数部を持つ。

§ 19.11.定理：

$B = (I - A) = [b_{ij}]$ が、 $i \neq j : b_{ij} \geq 0$ かつ $b_{ii} > 0$ とする。このときには
 $c \geq 0$ かつ ユニークな $x \geq 0 : (I - A)x = c$
 $(I - A)$ が dominant diagonal を持つ

§ 19.12.定義：ホーキンス - サイモン条件 Hawkins-Simon Condition

$B = [b_{ij}]$ が、連続的主小行列が正、すなわち $r : \det B_r > 0$ を満たすとき、ホーキンス - サイモン条件を満たすと言う。ただし、

$$B_r = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ & & \dots & \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rr} \end{pmatrix}$$

§ 19.13.定理：

行列 $A = [a_{ij}]$ を非負 (i.e. $a_{ij} \geq 0$) の $n \times n$ 行列とし、 $B = [I - A] = [b_{ij}]$ とする ($i, j : b_{ij} \geq 0$)。ただし、 R 。このときには、以下の7条件は同値である：

- $x \geq 0 : Bx > 0$
- $c \geq 0, x \geq 0 : Bx = c$
- B は nonsingular で $B^{-1} \geq 0$
- ホーキンス - サイモン条件が成立
- すべての固有値の実数部はプラス
- $\rho(A) < 1$

$$(1/\lambda)^k = 0 \quad (A/\lambda)^k = [I - A]^{-1}$$

さらに

A が indecomposable であれば $\rho(A) < 1$ は以下のようになる：

- $x \geq 0 : Bx > 0$
- B は nonsingular で $B^{-1} > 0$

§ 19.14.定理：非負の非対角要素行列に関する定理

行列 $S = [s_{ij}]$ を、 $i, j : s_{ij} \geq 0$ (非対角要素が非負) の $n \times n$ 行列とする。また、 $S = [V - I]$ と表されるものとする。ただし、 R で、 $V \geq 0$ である。このときには以下の6条件は同値である：

- $x \geq 0 : Sx < 0$
- $c \geq 0, x \geq 0 : Sx = c$
- S は nonsingular で $S^{-1} \geq 0$
- S は Hicksian (§ 17.18.参照)
- すべての固有値の実数部はマイナス
- $\rho(S) < 1$

さらに、 A が indecomposable であれば $\rho(A) < 1$ は以下のようになる：

- $x \geq 0 : Sx < 0$
- S は nonsingular で $S^{-1} < 0$

§ 19.15.定理：

行列 $B = [b_{ij}]$ を、 $i, j : b_{ij} \geq 0$ の $n \times n$ 行列とすると、以下の4条件は同値：

- $x \geq 0 : Bx > 0$
- $'p \geq 0 : B'p > 0$
- $x > 0 : Bx > 0$
- $'p > 0 : B'p > 0$

ただし、 B' は B の転置行列。また、この定理は、 $Bx > 0$ などの不等号記号が < 0 になっても成立する。

第2節投入産出分析

§ 19.16.定義：

a_{ij} = 非負の生産係数 coefficient of production で、 j - 財 1 単位生産に必要な i - 生産要

素量。Cassel と同様にして Leontief でも一定と仮定される。

x_j = 経済全体として生産される j - 財の量、 $j=1,\dots,n$

c_j = 経済全体として消費される j - 財の量、 $i=1,\dots,n$

このときには、需給一致は以下のように定義される：

$$(I - A)x = c$$

§ 19.17.分析：

ここで、§ 19.2.で述べられた問題を考える。すなわち

ある c が与えられたとき、 $(I - A)x = c$ となるような $x \geq 0$ が存在するか？

存在すればユニークか？

行列 $(I - A)$ は nonsingular か？

$(I - A)^{-1} \geq 0$ となるか？

$\rho < 1$ と考えれば、§ 19.13.定理が応用できるから、定理 19.13 と 19.14 によって、

(1) $\rho < 1$ であるか

(2) ホーキンス - サイモン条件が成立すれば、

問題 19.17.1, 19.17.2 に「yes」と答えられる。

また、 $[I - A]$ が dominant diagonal を持てば、§ 19.11.の定理によって、問題 19.17.1 にも肯定的に答えられる。

§ 19.18.定義：Solow's Expenditure-Lag Input-Output Model

以下のような動学的モデルを考える：

$$x(t) = A x(t-1) + c$$

ただし、 $a_{ij} = x_{ij}(t)/x_j(t-1)$ となる。これは t 期の生産要素需要は $t-1$ 期の生産量に比例すると考えている。

§ 19.19.定義：

均衡は $x(t) = x(t-1) = x^*$ で定義され、均衡状態では

$$x^* = A x^* + c \quad \text{あるいは} \quad [I - A] x^* = c$$

を得る。問題は

$x(t) \rightarrow x^*$ as $t \rightarrow \infty$ となるか？

$[I - A]$ は nonsingular で、 $[I - A]^{-1} \geq 0$ となるか？

§ 19.20.分析：

$\rho < 1$ であれば、§ 19.13.定理の 19.13.1 によって、問題 19.17.1 の答えは yes となる。

安定性の問題 19.17.2 については、以下のようなプロセスを考える：

$$x(1) = A x(0) + c$$

$$x(2) = A x(1) + c = A^2 x(0) + (I + A) c$$

$$x(3) = A x(2) + c = A^3 x(0) + (I + A + A^2) c$$

$$x(4) = A x(3) + c = A^4 x(0) + (I + A + A^2 + A^3) c$$

.....

$$x(t) = A x(t-1) + c = A^t x(0) + (I + A + A^2 + \dots + A^{t-1}) c \quad \text{式 19.5}$$

となり、条件 $\rho < 1$ が成立すれば、§ 19.13.の定理の 19.13.1 (このケースでは $\rho < 1$ となっている)によって、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A^t c = [I - A]^{-1} c \quad (\text{すなわち式 19.5 の第 2 項が収束する})$$

$A^t \geq 0$ as $t \rightarrow \infty$ (なぜなら、 $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t c$ が収束するときは A^t も収束する)

となる。したがって、式 19.5 より、 $x(t) \rightarrow [I - A]^{-1} c$ となることが分かる。

以上より問題 19.17.2 は、実質的には同じ問題であることが分かる。

第3節競争均衡の安定性(この問題は § 18.64.で分析されている)

初期保有量 x^{\wedge} の純粋交換経済を考え、以下のような調整プロセスを想定する：

$$p_i'(t) = f_i(p) - x(p) - x^{\wedge}, \quad i=0,1,\dots,n \quad \text{式 19.6}$$

ただし、 $p = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ 。 p^* を均衡価格ベクターとする。さらに、 p^* でテーラー展開して、2次微分以上の項を無視し、固定係数線形同次微分方程式体系

$$p_i'(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} [p_j(t) - p_j^*], \quad i=0,1,\dots,n \quad \text{式 19.7}$$

を考える。ただし、 $a_{ij} = f_i / x_j$ である。この線形近似体系によって局所安定性を分析する。

注意：

式 19.7 は線形であるため、 t ：解が存在する。

t ： $p > 0$ と仮定する。

§ 19.21.定義：

仮定 A 1 (Walras' law) $p : \sum_{i=0}^n p_i f_i(p) = 0$

仮定 A 2 (Homogeneity) $i \in [0,1,2,\dots,n]$ ：超過需要関数 $f_i(p)$ は正の零次同次関数

§ 19.22.定義：

A 2 より、第0財をニューメレールとし、 $p_0 = 1$ として正規化する。そこで、A 1 により、均衡状態は

$$f_i(p^*) = 0 \quad i=1,\dots,n \quad (0 \text{ がない!})$$

と表され、動学的調整プロセス式 19.7 は以下ようになる：

$$p_i'(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} [p_j(t) - p_j^*], \quad i=1,\dots,n \quad \text{式 19.8}$$

ここで係数 a_{ij} を用いて、 $n \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ を定義すると、 A は関数 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ のヤコビアン行列である。

§ 19.23.定理：§ 18.22.の再掲

式 19.8 が大域安定性のための必要十分条件は、 A のすべて固有値の実数部がマイナスとなることである。

注意：定理： A が対称行列で負定値 negative definite であれば、すべて固有値はマイナスの実数値となるが(§ 18.35.参照)、一般均衡点の安定性分析では、行列 A が対称行列で負定値となるとは仮定できない。

§ 19.24.定義：Weak Gross Substitutability

仮定 A 3： $i \neq j : a_{ij} < 0$

§ 19.25.定理：

仮定 A 3のもとでは、動学的システム式 19.8 は、下記の条件のいずれかが成立すれば、安定的となる：

(1) 仮定 A 1 と $a_{0j} > 0, j=1,\dots,n$

(2) 仮定 A 2 と $a_{i0} > 0, i=1,\dots,n$

§ 19.26.証明：

(1) A 1 より、すべての j について、 $\sum_{i=0}^n p_j^* \cdot f_j / p_i = 0$ 。よって、

$$\sum_{i=1}^n p_j^* \cdot f_j / p_i = \sum_{i=1}^n p_j^* a_{ij} = -a_{0j} < 0$$

となるから、 A' は § 19.14.定理の を満たすが、§ 19.15.定理によって転置行列 A でも成立するし、§ 19.14.定理 で、マイナスの実数部の固有値を持つから、均衡点は安定的と

なる。

(0) A 2 より、オイラー定理を使うと、すべての i について $\sum_{j=0}^n f_{ij} / p_j \cdot p_j^* = 0$ 。よって、

$$\sum_{j=1}^n f_{ij} / p_j \cdot p_j^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j^* = -a_{i0} < 0$$

となるから、A は § 19.14.定理の を満たし、§ 19.14.定理の によって、マイナスの実数部の固有値を持つから、均衡点は安定的となる

第4節比較静学分析への応用

§ 19.27.定義：

経済システムが

$$f_i(x, \quad) = 0, i=1, \dots, n$$

式 19.9

で示されるものとする。ただし、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ で、 \quad はパラメータで、関数 f_i はすべての変数について連続微分可能とする。

§ 19.28.説明：

式 19.9 を \quad で微分すれば

$$\sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot x_j / \quad + b_i = 0, i=1, \dots, n$$

ただし、 $f_{ij} = f_{ij} / x_j$ 、 $b_i = f_{i0} / \quad$ 。

ここで $F = [f_{ij}]$ 、 $b = [b_i]$ 、 $x = [x_j / \quad]$ とすると、これはベクター表示で

$$F x + b = 0$$

F が nonsingular とすれば

$$x = -F^{-1} b$$

ここで、 $\quad i \quad j : f_{ij} > 0$ であれば、§ 19.14.定理が利用できるし、 $\quad i \quad j : f_{ij} < 0$ であれば、§ 19.13.定理が利用できる。

§ 19.29.例：ステップ 1

$n + 1$ 財市場の正規化された超過需要関数で市場均衡が

$$f_i(p, \quad) = 0, i=1, \dots, n$$

式 19.10

と示されるものとする。ただし、第 0 財がニューメレールとする。また、 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ で、 \quad はシフトパラメータ。

需要関数の零次同時性により

$$\sum_{j=0}^n f_{ij} p_j = 0$$

ここで、 $\quad i \quad j \& p : f_{ij} > 0$ と仮定すると、

$$\sum_{j=1}^n f_{ij} p_j < 0$$

を得るから、行列 $F = [f_{ij}]$ は § 19.14.定理の条件 を満たし、この定理が利用できる。

§ 19.30.例：ステップ 2

たとえば、 $f_{k0} / \quad = 1$ 、 $f_{kj} / \quad = 0$ for $j \neq k$ と置けば、 \quad はニューメレールから第 k 財への需要シフトを示す。行列 F にはゼロなる要素がないから、indecomposable であり、§ 19.14.定理の が成立する。したがって $F^{-1} < 0$ となって、

$$p = -F^{-1} b > 0$$

を得る。

第4部：動学分析と不確実性

(主要参考文献: Takayama, *Analytical Methods in Economics*, Univ. of Michigan Press, 1993)

第20章. 最大値原理の基礎

第1節 最大値原理

§ 20.1. 定義：

n 個の第1階微分方程式体系を考える：

$$\dot{x}_i(t) = f_i[x(t), u(t), t], \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 20.1}$$

ただし、 $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ 、 $u(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]$ 。 f_i 、 x_i 、 u_i はすべて実数値関数。

境界条件として

$$\dot{x}_i(0) = x_i^0, \quad i=1, \dots, n$$

を仮定する。

§ 20.2. 定義：

最適制御理論では、なんらかの目標を最大化あるいは最小化するように、 $u(t)$ を選択するので、 $u(t)$ は制御変数 control variable と言う。

$u(t)$ の集合を U とすると、 U は許容制御集合 set of admissible control と言う。

$u(t)$ の定義域を range U とすると、range U は制御域 control region と言う。range U は閉集合であってもよい。たとえば u が消費性向であれば、 $t: 0 \rightarrow \infty$ $u(t) \leq 1$ となる。

$u(t) \in U$ であれば、 $u(t)$ は許容制御 admissible control と言う。

$u(t) \in U$ は、piecewise continuous な関数に限定する。piecewise continuous な関数とは、有限個の点を除いて連続的な関数のことである。

§ 20.3. 定義：

f_i は x_i 、 u_i 、 t について連続的で、 x_i と t については連続微分可能。

$x(t)$ は、状態変数 state variable と呼ばれ、連続的で、piecewise continuous な導関数を持ち、その定義域 X は R^n の連結開部分集合である。

境界条件 (x_0, t_0) は、 $x_0 \in X$ で、 $t_0 \in (t^1, t^2)$ 有限区間に存在する

§ 20.4. 定義：基本的制御問題

$$\text{Maximize: } \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(T) \quad \text{式 20.2}$$

$$\text{Subject to: } \dot{x}_i = f_i[x(t), u(t), t] \quad i=1, \dots, n$$

$$x_i(0) = x_i^0 \quad i=1, \dots, n$$

ただし、最終時点 T は固定されている。

§ 20.5. 定義：

式 20.2 は、関数 $\int_0^T f_0[x(t), u(t), t] dt$ を含む。すなわち、

$$\dot{x}_0 = f_0[x(t), u(t), t] \quad \text{式 20.3}$$

かつ $x_0(0) = 0$ とおけば、式 20.3 の0から T の積分の最大化は $x_0(T)$ の最大化となり、これは式 20.2 の最も単純な形式である。

§ 20.6. 定義：

ハミルトン関数 Hamiltonian を以下のように定義する：

$$H[x(t), u(t), t, p(t)] = \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[x(t), u(t), t] \quad \text{式 20.4}$$

ただし、 $p_i(t)$ は補助変数 auxiliary variable あるいは(ハミルトン)乗数 multiplier あるいは共状態変数 costate variable と言う。

§ 20.7.定理 : Pontryagin's Maximum Principle 最大値原理

$u^*(t)$ が § 20.4.の問題の解で、 $x^*(t)$ がそのときの状態変数とすると、連続的で piecewise continuous な導関数を持つベクトル関数 $p(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]$ が存在し、すべての時点で同時にはゼロにならず、以下の3条件を満たす：

$u^*(t)$ 、 $p(t)$ 、 $x^*(t)$ は、以下のハミルトン体系 Hamilton System の解となる：

$$\dot{x}_i(t) = \partial H^* / \partial p_i, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 20.5}$$

$$\dot{p}_i(t) = - \partial H^* / \partial x_i, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 20.6}$$

ただし、 $H^* = H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)]$ 。

$u^*(t)$ はHを最大化する。すなわち

$$u(t) \in U : H[x^*(t), u(t), t, p(t)] = H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)] \quad \text{式 20.7}$$

(横断条件 transversality condition) $p_i(T) = \partial H / \partial x_i, \quad i=1, \dots, n$

注意：

$\partial H^* / \partial p_i$ は、 $\partial H / \partial p_i$ が $[x^*(t), u^*(t), t, p(t)]$ で評価されていることを意味する。この定理は、最適制御 $u^*(t)$ の存在は保証しない。

$p_i(T)$ は式 20.2 の $\partial H / \partial x_i$ で決まり、 $x_i(T), i=1, \dots, n$ は $x^*(t)$ のT期の値で決まる。

式 20.5 は、式 20.1 そのものである。

式 20.6 は、

$$\dot{p}_i(t) = - \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 20.8}$$

となる。

すべての f_i が x と u に関して concave であれば、上記の条件は十分条件にもなる。さらに、strictly concave であれば最適解はユニークとなる。

§ 20.8.定理：

$u^*(t) \in \text{Interior}[\text{range } U]$ で、 $i : f_i$ が u に関して微分可能であれば、§ 20.7.定理のは以下の条件に等しい：

$$\partial H^* / \partial u_j = 0, \quad j=1, \dots, r \quad \text{式 20.9}$$

また、関数 H が u_j について concave であれば、式 20.9 § 20.7.定理 となる。

§ 20.9.定義：

range U が閉集合、たとえば、 $t : 0 \leq u(t) \leq 1$ で、最適制御が、すべての j について

$$u_j^*(t) = 0 \quad \text{for } t_0 \leq t \leq t'$$

$$u_j^*(t) = 1 \quad \text{for } t' \leq t \leq t_1$$

となる可能性もある。このような解は、bang-bang solution と呼ばれる。

§ 20.10.定理：一部(m個)の状態変数の固定最終時点Tにおける値が決められているケース

$$x_i(T) = \bar{x}_i, \quad i=1, \dots, m, \quad m < n$$

の場合には、横断条件が以下のように変更される：

$$p_i(T) = \bar{p}_i + \lambda_i, \quad i=1, \dots, m \quad \text{式 20.10}$$

$$p_i(T) = \bar{p}_i, \quad i=m+1, \dots, n \quad \text{式 20.11}$$

m個の λ_i は一定の値で、 $p_i(T)$ と \bar{p}_i の差として式 20.10 によって決められる。

§ 20.11.定理：最終時点の値が関数で決められているケース

$F_i[\cdot]$ を実数値微分可能関数として、

$$F_i[x(T)] = 0, \quad i=1, \dots, m, \quad m < n \quad \text{式 20.12}$$

となる場合には、横断条件式 20.10 は以下のように変更される：

$$p_i(T) = \bar{p}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(T), \quad i=1, \dots, m \quad \text{式 20.13}$$

§ 20.12.定理：最終時点 T が自由に決められるケース Final time open
 T が決められていない場合には、横断条件は以下のように変更される：

$$H[x^*(T), u^*(T), T, p(T)] = 0 \quad \text{式 20.1 4}$$

autonomous なケースは

$$H[x^*(T), u^*(T), p(T)] = 0 \quad \text{式 20.1 5}$$

となる。

§ 20.13.定義：初期点・最終点がすべて決められているケース
 以下の最大化問題を考える：

$$\text{Maximize:} \quad \int_0^T f_0[x(t), u(t), t] dt \quad \text{式 20.1 6}$$

$$\text{Subject to:} \quad x'(t) = f_i[x(t), u(t), t], \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 20.1 7}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad x_i(T) = x_i^T, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 20.1 8}$$

ただし最終時点 T も決められている。

§ 20.14.定理：

$[x^*(t), u^*(t)]$ が式 20.1 6 の問題の解とすると、ゼロでない連続的で、piecewise continuous な導関数を持つ $n+1$ 次元ベクトル関数 $p(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)]$ が存在し、以下の 3 条件を満たす(必要条件)：

$u^*(t)$ 、 $p(t)$ 、 $x_0^*(t)$ 、 $x^*(t)$ は、以下のハミルトン体系の解となる：

$$x_i'(t) = H^*/p_i, \quad i=0, 1, \dots, n \quad \text{式 20.1 9}$$

$$p_i'(t) = -H^*/x_i, \quad i=0, 1, \dots, n \quad \text{式 20.2 0}$$

ただし、

$$H[x(t), u(t), t, p(t)] = \int_0^T p_i(t) f_i[x(t), u(t), t] dt$$

また、 $H^* = H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)]$ 。

$$u(t) \in U : H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)] = H[x^*(t), u(t), t, p(t)]$$

(横断条件) $t \in [0, T] : p_0(t) = \text{一定} \{ H^*/x_0 = 0, \quad H \text{ は } x_0 \text{ の関数でない} \}$

§ 20.15.定義：最終値固定・最終時未定のケース Final time open with fixed end point
 以下の最大化問題を考える：

$$\text{Maximize:} \quad \int_0^T f_0[x(t), u(t), t] dt \quad \text{式 20.2 1}$$

$$\text{Subject to:} \quad x'(t) = f_i[x(t), u(t), t], \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 20.2 2}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad x_i(T) = x_i^T, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 20.2 3}$$

ただし最終時点 T が決められていない。

§ 20.16.定理：

$[x^*(t), u^*(t)]$ が式 20.2 1 の問題の解とすると、「ゼロでない連続的で piecewise continuous な導関数を持つ $n+1$ 次元ベクトル」(この「...」内の表現は以下では省略する) 関数 $p(t) = [p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)]$ が存在し、以下の 4 条件を満たす：

$u^*(t)$ 、 $p(t)$ 、 $x_0^*(t)$ 、 $x^*(t)$ は、以下のハミルトン体系の解となる：

$$x_i'(t) = H^*/p_i, \quad i=0, 1, \dots, n \quad \text{式 20.2 4}$$

$$p_i'(t) = -H^*/x_i, \quad i=0, 1, \dots, n \quad \text{式 20.2 5}$$

$$u(t) \in U : H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)] = H[x^*(t), u(t), t, p(t)]$$

$$H[x^*(T), u^*(T), T, p(T)] = 0$$

$$\text{(横断条件)} \quad t \in [0, T] : p_0(t) = \text{一定}$$

§ 20.17.定義：自律系 autonomous 最終値固定・最終時未定のケース
 以下の最大化問題を考える：

$$\text{Maximize:} \quad \int_0^T f_0[x(t), u(t)] dt \quad \text{式 20.2 6}$$

Subject to: $x'(t) = f_i[x(t), u(t)], i=1, \dots, n$

式 20.2 7

$$x_i(0) = x_i^0, x_i(T) = x_i^T, i=1, \dots, n$$

式 20.2 8

ただし最終時点 T が決められていない。

§ 20.18.定理：

§ 20.17.の問題の場合には、§ 20.16.定理の を以下のように変更する：

$$H[x^*(T), u^*(T), p(T)] = 0$$

§ 20.19.定義：最終値未定・最終時固定のケース Final time fixed with free end point

以下の最大化問題を考える：

$$\text{Maximize: } \int_0^T f_0[x(t), u(t), t] dt$$

式 20.2 9

$$\text{Subject to: } x'(t) = f_i[x(t), u(t), t], i=1, \dots, n$$

式 20.3 0

$$x_i(0) = x_i^0, i=1, \dots, n$$

式 20.3 1

ただし最終時点 T が決められている。

§ 20.20.定理：

$[x^*(t), u^*(t)]$ が、式 20.2 9 の問題の解とすると、関数 $p(t) [p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)]$ が存在し、以下の 4 条件を満たす(必要条件)：

$u^*(t), p(t), x_0^*(t), x^*(t)$ は、以下のハミルトン体系の解となる：

$$x_i'(t) = H^*/p_i, i=0, 1, \dots, n$$

式 20.3 2

$$p_i'(t) = -H^*/x_i, i=0, 1, \dots, n$$

式 20.3 3

ただし、

$$H[x(t), u(t), t, p(t)] = \sum_{i=0}^n p_i(t) f_i[x(t), u(t), t]$$

式 20.3 4

また、 $H^* = H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)]$ 。

$$u(t) \in U : H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)] = H[x^*(t), u(t), t, p(t)]$$

(横断条件) $p_0(T) = 1, p_i(T) = 0, i=1, \dots, n$

$$p_0(t) = \text{一定}$$

注意：このケースでは、とより $t : p_0(t) = 1$ となり、ハミルトン関数は

$$H = f_0 + \sum_{i=1}^n p_i f_i$$

式 20.3 5

となる。

§ 20.21.定理：

すべての $f_i, i=0, 1, \dots, n$ が x と u について concave で、上記のいろいろな定理の条件 \sim (あるいは \sim) を満たすベクター関数 p が存在すれば、 $[x^*(t), u^*(t)]$ は最大化問題の解となる(充分条件)。また、関数 f_0 が strictly concave であれば、最適解はユニークとなる。

第 2 節単純なミクロ経済問題への応用

§ 20.22.定義：地域間投資配分問題

2 つの地域 $i = 1, 2$ が存在し、単一の生産物を生産していると仮定する。生産関数を

$$Y_i = b_i K_i, i=1, 2 (\text{以下では省略する})$$

式 20.3 6

とする。ただし、 b_i は一定、 Y は生産量、 K は資本量。

§ 20.23.定義：

政策当局は、 T 期後の 2 地域間の生産物合計を最大化することを目標とする：

$$\text{Maximize: } Y(T) = Y_1(T) + Y_2(T)$$

式 20.3 7

§ 20.24.定義：

投資資金 Z は貯蓄よりまかなわれるから

式 20.3 8

$$Z = s_1 Y_1 + s_2 Y_2$$

ただし、 s_i は貯蓄性向で、 $0 \leq s_i \leq 1$ 。ここで、 $i = 1, 2$ とおけば

$$Z = s_1 K_1 + s_2 K_2$$

式 20.3 9

§ 20.25.定義：

を第 1 地域に配分される資本の比率とすると、 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。資本減耗を無視すれば、

$$K_1' = \alpha [s_1 K_1 + s_2 K_2]$$

式 20.4 0

$$K_2' = (1 - \alpha) [s_1 K_1 + s_2 K_2]$$

式 20.4 1

§ 20.26.定義：

最大化問題は

$$\text{Maximize: } Y(T) = b_1 K_1 + b_2 K_2$$

式 20.4 2

$$\text{Subject to: 式 20.4 0 と式 20.4 1 と初期値 } K_i(0) = K_i^0$$

式 20.4 3

と定義され、 K_i が状態変数で、 α が制御変数となる。

§ 20.27.分析：

最大値原理を応用すると、ハミルトン関数は

$$H = p_1 [\alpha (s_1 K_1 + s_2 K_2)] + p_2 (1 - \alpha) [\alpha (s_1 K_1 + s_2 K_2)] \\ = [\alpha (p_1 - p_2) + p_2] (\alpha (s_1 K_1 + s_2 K_2))$$

で、ハミルトン体系は(*は省略する)

$$p_i' = - [\alpha (p_1 - p_2) + p_2] s_i$$

式 20.4 4

横断条件は

$$p_i(T) = b_i, \quad i=1,2$$

式 20.4 5

となる。最大値原理によれば、最適制御はハミルトン関数を最大化するから、

$$\alpha = 1 \quad \text{if } p_1(t) > p_2(t)$$

式 20.4 6

$$\alpha = 0 \quad \text{if } p_1(t) < p_2(t)$$

式 20.4 7

式 20.4 4 より、 $p_1'(t)/p_2'(t) = s_1/s_2$ となって、

$$p_1(t) = (s_1/s_2) p_2(t) + \text{const.}$$

式 20.4 8

横断条件 $p_i(T) = b_i$ より、

$$p_1(T) = (s_1/s_2) p_2(T) + \text{const.} \quad b_1 = (b_1 s_1 / b_2 s_2) b_2 + \text{const.}$$

式 20.4 9

となって

$$\text{const.} = b_1 - b_1 s_1 / s_2$$

これを式 20.4 8 の代入すると、結局、条件

式 20.5 0

$$p_1(t) - p_2(t) = p_2(t) (b_1 s_1 - b_2 s_2) / b_2 s_2 + (s_2 - s_1) b_1 b_2 / b_2 s_2$$

を得る。よって、たとえば、 $s_1 = s_2$ のときに $b_1 > b_2$ であれば、 $p_1(t) > p_2(t)$ となって、すべての t について $\alpha = 1$ 、すなわち生産性の高い地域にすべての資本を投資し続けるのが最適となる。

第 2 1 章.無限期間最大値原理による消費者行動・生産者行動の動学的分析

第 1 節無限期間の最大値原理

§ 21.1.定義：無限期間・割引値最大化問題

以下の最大化問題を考える：

$$\text{Maximize: } \int_0^{\infty} f_i[x(t), u(t), t] e^{-\rho t} dt$$

式 21.1

$$\text{Subject to: } x_i'(t) = f_i[x(t), u(t), t], \quad i=1, \dots, n$$

式 21.2

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i=1, \dots, n$$

式 21.3

$$u_j(t) \geq 0, \quad j=1, \dots, r$$

式 21.4

ただし、以後、関数 $f_i, i=0,1,\dots,n$, は (x, u, t) -空間で連続微分可能と仮定する。

§ 21.2.定理：

$[x^*(t), u^*(t)]$ が、式 21.1 の問題の解とすると、関数 $p(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]$ が存在し、以下の4条件を満たす(必要条件)：

$u^*(t), p(t), x^*(t)$ は、以下のハミルトン体系の解となる：

$$\dot{x}_i(t) = H^*/p_i, \quad i=1,\dots,n \quad \text{式 21.5}$$

$$\dot{p}_i(t) = -H^*/x_i, \quad i=1,\dots,n \quad \text{式 21.6}$$

ただし、

$$H^*[x^*(t), u^*(t), t, p(t)]$$

$$f_0[x^*(t), u^*(t), t] e^{-t} + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[x^*(t), u^*(t), t]$$

$$H^*/u_j = 0, \quad u_j (H^*/u_j) = 0, \quad i=1,\dots,r$$

$$(\text{横断条件}) \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) x_i^*(t) = 0, \quad i=1,\dots,n$$

§ 21.3.定理：

すべての $f_i, i=0,1,\dots,n$ が x と u について concave で、上記の定理の条件 ~ を満たすベクター関数 p が存在すれば、 $[x^*(t), u^*(t)]$ は最大化問題の解となる(十分条件)。また、関数 f_0 が strictly concave であれば、最適解はユニークとなる。

§ 21.4.定義：Current Value Hamiltonian 現在価値ハミルトン関数

関数 $q_i(t)$ を以下のように定義する：

$$q_i(t) = p_i(t) e^{-t}$$

この新変数を使うと、ハミルトン関数は

$$H[x(t), u(t), t, q(t)]$$

$$f_0[x(t), u(t), t] + \sum_{i=1}^n q_i(t) f_i[x(t), u(t), t]$$

となる。これは現在価値ハミルトン関数と呼ばれる。

注意： $H[x(t), u(t), t, q(t)] = H^*[x(t), u(t), t, p(t)] e^{-t}$

§ 21.5.定理：

$[x^*(t), u^*(t)]$ が、式 21.1 の問題の解とすると、関数 $q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]$ が存在し、以下の4条件を満たす(必要条件)：

$q(t), u^*(t), x^*(t)$ は、以下のハミルトン体系の解となる：

$$\dot{x}_i(t) = H^*/q_i, \quad i=1,\dots,n \quad \text{式 21.7}$$

$$\dot{q}_i(t) = q_i - H^*/x_i, \quad i=1,\dots,n \quad \text{式 21.8}$$

ただし、

$$H[x(t), u(t), t, q(t)]$$

$$f_0[x(t), u(t), t] + \sum_{i=1}^n q_i(t) f_i[x(t), u(t), t]$$

で、星印*は関数が $u^*(t), x^*(t)$ で評価されていることを示す。

$$H^*/u_j = 0, \quad u_j (H^*/u_j) = 0, \quad i=1,\dots,r$$

$$(\text{横断条件}) \lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) e^{-t} x_i^*(t) = 0, \quad i=1,\dots,n$$

注意： $\lim_{t \rightarrow \infty} = 0$ の場合には、このような横断条件は成立しない。 $\lim_{t \rightarrow \infty} = 0$ を含む一般的なケースでの横断条件は判明していない。

第2節消費者行動の動学的分析

§ 21.6.定義：

消費者の所得 Y_t は賃金所得 W_t と資産 A_t から得られる所得の合計

$$Y_t = W_t + i_t A_t$$

ただし、 i_t は利子率、 A_0 は所与。

消費者は所得を消費と資産増加に配分する：

$$Y_t = C_t + A_t'$$

これらの関係より

$$A_t' = W_t + i_t A_t - C_t$$

財価格を p_t とし、すべての変数を実質化し、これらを小文字で示す。ただし、 p_t を価格上昇率とすると、実質利子率 $r_t = i_t - p_t$ となり、以下の関係

$$a_t' = w_t + r a_t - c_t \quad \text{式 21.9}$$

を得る。ただし、 r は一定と仮定している。

§ 21.7.定義：

消費者は式 21.9 の制約のもとで、

$$\int_0^{\infty} u(c_t) e^{-\rho t} dt$$

を最大化する。ただし、 u は効用関数で、 $u' > 0$ 、 $u'' < 0$ 、 $u'(0) = \infty$ 。

§ 21.8.定義：

ハミルトン関数は

$$H = u(c_t) + q_t(w_t + a_t - c_t)$$

と定義され、最大値原理より

$$a_t' = H / q_t \quad a_t' = w_t + r a_t - c_t \quad \text{式 21.10}$$

$$q_t' = -q_t i_t - H / a_t \quad q_t' = -(r - p_t) q_t \quad \text{式 21.11}$$

$$H / c_t = 0 \quad u'(c_t) = q_t \quad \text{式 21.12}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_t e^{-\rho t} a_t = 0 \quad \text{式 21.13}$$

注意：関数 u が strictly concave であるため、これらの条件は最適解の十分条件でもある。

§ 21.9.定義：

限界効用の消費に関する弾力性 μ を以下のように定義する：

$$\mu(c_t) = -u''(c_t) c_t / u'(c_t)$$

§ 21.10.定義：

効用関数が

$$u(c_t) = c_t^{1-\mu} + \text{const.} \quad \text{for } 0 < \mu < 1 \quad \text{式 21.14}$$

$$u(c_t) = \log c_t + \text{const.} \quad \text{for } \mu = 1 \quad \text{式 21.15}$$

という関数であれば、 μ は一定となる。このような効用関数を isoelastic 等弾力的と言う。以下では、 μ は一定と仮定する。

§ 21.11.分析：

を使うと式 21.12 (t で微分すると $q_t' = u'' c_t'$) より

$$q_t / q_t' = -c_t' / c_t \quad \text{式 21.16}$$

を得る。これと式 21.11 より

$$r = \rho + \mu c_t' / c_t$$

これより

$$c_t' / c_t = \mu (r - \rho) \quad \text{式 21.17}$$

ただし、

$$\mu = \mu(r - \rho) / \rho \quad \text{式 21.18}$$

である。

したがって、 $r > \mu$ であれば $c_t'/c_t > 0$ となる。

§ 21.12.定理：

実質利率が主観的割引率より大きければ、消費は時間とともに増加する。

§ 21.13.分析：

式 21.17 を積分すると

$$c_t = c_0 e^{\mu t} \quad \text{式 21.19}$$

これを現在価値にしてゼロから無限まで積分すると

$$\int_0^\infty c_t e^{-rt} dt = \int_0^\infty c_0 e^{-(r-\mu)t} dt$$

左辺をそのまま、右辺を積分すると

$$\int_0^\infty c_t e^{-rt} dt = c_0 / (r - \mu) \quad \text{式 21.20}$$

ただし、

$$r - \mu > 0 \quad \text{式 21.21}$$

と仮定する。

§ 21.14.分析：

式 21.10 より

$$a_t' - r a_t = w_t - c_t$$

これに e^{-rt} を掛けると

$$(a_t' - r a_t) e^{-rt} = (w_t - c_t) e^{-rt}$$

左辺は $d(a_t e^{-rt})/dt$ に等しいから

$$d(a_t e^{-rt})/dt = (w_t - c_t) e^{-rt}$$

これを $[0, \infty]$ で積分すると

$$[a_t e^{-rt}]_0^\infty = \int_0^\infty (w_t - c_t) e^{-rt} dt$$

したがって

$$\int_0^\infty c_t e^{-rt} dt = a_0 + \int_0^\infty w_t e^{-rt} dt \quad \text{式 21.22}$$

これは、消費者の時間的予算制約 Inter-temporal budget constraint である。

§ 21.15.定義：

式 21.22 の右辺は、0 期の消費者の資産と将来所得の現在価値の合計 a_0^* を示す。したがって恒常所得 y_0^* は

$$y_0^* = r a_0^* \quad \text{式 21.23}$$

となる。

§ 21.16.分析：

式 21.23 より式 21.22 の右辺は y_0^*/r であるから、式 21.20 の左辺に式 21.22 を代入すると

$$c_0 = (1 - \mu/r) y_0^*$$

となる。 $s = \mu/r$ と置けば、これは貯蓄性向で、以下のように表される：

$$c_0 = (1 - s) y_0^* \quad \text{式 21.24}$$

これは、消費が恒常所得に比例することを示す

注意：式 21.24 は恒常所得仮説と一致する。すなわち、(i)消費は恒常所得に依存する、(ii)消費は所得の一定比率となる。

式 21.18 $\{ \mu = (r - \delta)/\beta \}$ より

$$s = (1 - \delta/\beta)/r \quad \text{式 21.25}$$

したがって

$$ds/dr > 0$$

となる。

§ 21.17.分析：

式 21.2 5 より、

$0 < s$ の条件は、 $r >$

$s < 1$ の条件は、 $> (1 -) r$

したがって $0 < s < 1$ の必要十分条件は

$r > > (1 -) r$

式 21.2 6

§ 21.18.定義：

μ の定義 $\{ \mu = (r -) / \}$ より、式 21.2 1 の条件 $r - \mu > 0$ は書き直せば

$> (1 -) r$

式 21.2 7

したがって、式 21.2 6 が成立すれば、式 21.2 1 も満たされる。

このときには、式 21.1 7 より、消費は時間とともに増加する。

第 3 節 企業の投資行動の動学的分析

§ 21.19.定義：

生産関数

$$Y_t = F(N_t, K_t)$$

資本経路

$$K_t' = I_t - K_t$$

式 21.2 8

§ 21.20.定義：

企業は N_t と I_t の経路を選択して、以下の最大化問題を解く：

Maximize: $\int_0^{\infty} [p F(N_t, K_t) - w N_t - p_I I_t] e^{-r t} dt$

Subject to: 式 21.2 8

$$K_0 = K^0, K_t > 0, N_t > 0$$

$$I_{\min} \leq I_t \leq I_{\max} \quad \text{ただし、} I_{\min} < 0$$

§ 21.21.定義：

現在価値ハミルトン関数は以下のように定義される：

$$H = [p F(N_t, K_t) - w_t N_t - p_I I_t] + (I_t - K_t)$$

以下の条件が最適のために必要となる：

$$K_t' = I_t - K_t$$

式 21.2 9

$$p_t' = (r +) p_t - p F_K$$

式 21.3 0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-r t} K_t = 0$$

式 21.3 1

$$F_N = w / p$$

式 21.3 2

ただし、式 21.3 2 をえるために、 $N_t^* > 0$ を仮定する。

また、現在価値ハミルトン関数が

$$p F(N_t, K_t) - w_t N_t - p_t K_t + (I_t - p_I) I_t$$

と書けるから、これを I で最大化すると

$$I_t = I_{\max} \quad \text{if} \quad p_t > p_I$$

式 21.3 3

$$I_t = I_{\min} \quad \text{if} \quad p_t < p_I$$

式 21.3 4

となる。

注意：

F が concave であれば、十分条件となる。

p は、資本の shadow demand price と考えられる。

§ 21.22.分析：

式 21.3 2 より、関係 $N_t^* = N_t(K_t^*, w/p)$ が得られると仮定し、

$$(K_t^*) \quad p F_K(N_t(K_t^*, w/p), K_t^*) \quad \text{式 21.3 5}$$

と定義すると、式 21.3 0 は

$$\dot{t}' = (r + \delta) t - (K_t^*) \quad \text{式 21.3 6}$$

となり、 \dot{t} の経路は \dot{K} によって決まる。

§ 21.23.分析：

式 21.3 5 を微分すると

$$\dot{K}' = p [F_{NN} F_{KK} - F_{NK}^2] / F_{NN} \quad \text{式 21.3 7}$$

を得る。均衡の近辺では、生産関数が strictly concave と仮定すると、 $\dot{K}' < 0$ 。

注意：全域で strictly concave を仮定すると、競争市場では、企業規模はゼロに収束する。

§ 21.24.分析：

長期均衡 (N^*, K^*) では、 $\dot{K}' = \dot{t}' = 0$ であるから

$$I^* = \delta K^* \quad \text{式 21.3 8}$$

$$(r + \delta) = p F_K(N^*, K^*) \quad \text{式 21.3 9}$$

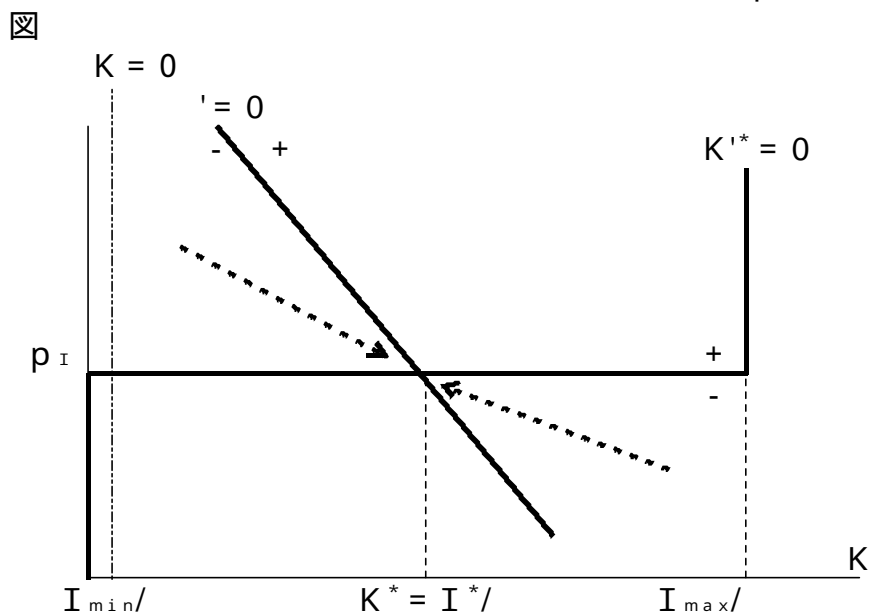
また、 $\dot{t}' = 0$ であるから ($\dot{K}' = 0$ なら $I = I_{\max}$ か I_{\min} となる)、式 21.3 9 は

$$p F_K = p_I (r + \delta) \quad \text{式 21.4 0}$$

となる。この右辺は、資本の単位コスト(レント)である。

§ 21.25.分析：

式 21.3 3、式 21.3 6 と条件 $\dot{K}' < 0$ より、以下のような phase diagram が描かれる：



この図で、

左下に向かう経路は、 $K = 0$ の条件を満たさないし、

右上に向かう経路は、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} K_t = 0$ を満たさない

図では太い破線で示されている経路のみがすべての条件を満たす最適経路である。

すなわち、最適経路は以下のように定義される：

$$K_t' = I_{\max} - K_t^* \quad \text{if } K_0 < K^* \quad \text{式 21.4 1}$$

$$K_t' = -K_t^* \quad \text{if } K_0 > K^* \quad \text{式 21.4 2}$$

$$K_t' = K^* \quad \text{if } K_0 = K^* \quad \text{式 21.4 3}$$

すなわち、できるだけ早く K^* に収束する経路が最適経路となる。

§ 21.26.分析：

以下のような、静学的利潤最大化問題を考える。

$$p F(N_t, K_t) - w N_t - p_I(r + \delta) K_t \quad \text{式 21.4 4}$$

ただし、第3項は、資本のレント支払い総額。この式を、 N と K で偏微分すると式 21.3 2と式 21.4 0 が得られるから、動学的分析の長期均衡と同じ結果が得られる。

§ 21.27.定義：

調整費用が存在する場合には、

式 21.4 5

$$C_t = C(I_t),$$

となる。ただし、

$$I_t > 0 : C > 0, C' > 0, C'' > 0$$

式 21.4 6

$$C(0) = 0, C'(0) = 0$$

式 21.4 7

§ 21.28.定義：

調整費用が存在する場合には、企業は N_t と I_t の経路を選択して、以下の最大化問題を解く：

$$\text{Maximize: } \int_0^{\infty} [p F(N_t, K_t) - w N_t - C(I_t)] e^{-r t} dt$$

$$\text{Subject to: 式 21.2 8}$$

$$K(0) = K^0, K_t > 0, N_t > 0$$

§ 21.29.定義：

現在価値ハミルトン関数は以下のように定義される：

$$H = [p F(N_t, K_t) - w N_t - C(I_t)] + \lambda (I_t - \dot{K}_t)$$

以下の条件が最適のために必要となる：

$$K_t' = I_t - \dot{K}_t$$

式 21.4 8

$$\lambda_t' = (r + \delta) \lambda_t - p F_K$$

式 21.4 9

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-r t} K_t = 0$$

式 21.5 0

$$F_N = w / p$$

式 21.5 1

$$C'(I_t) = \lambda_t$$

式 21.5 2

§ 21.30.定義：

生産関数について以下のように仮定する

$$F_{NN} F_{KK} - F_{NK}^2 > 0$$

式 21.5 3

注意： K^*/r のような比較静学を行う場合には、以下の条件も必要となる。

$$F_{NN} < 0, F_{KK} < 0,$$

式 21.5 4

$$F_{NK} > 0$$

式 21.5 5

§ 21.31.分析：

式 21.5 1 より、

$$N_t^* = N(K_t^*, w/p)$$

式 21.5 6

これを使って、以下のように定義する：

$$(K_t^*) \quad p F_K(N_t(K_t^*, w/p), K_t^*)$$

式 21.5 7

ただし、式 21.5 3 より $\lambda' < 0$ 。式 21.5 2 と $C'' > 0$ より、以下のような関係を想定：

$$I_t = g(\lambda_t), \quad g' > 0$$

式 21.5 8

§ 21.32.定義：

式 21.4 9、式 21.5 7 より、 $I' = 0$ 曲線は

$$I_t = (K_t^*) / (r + \delta) \quad \text{式 21.5 9}$$

式 21.4 8、式 21.5 8 より、 $K' = 0$ 曲線は

$$K_t^* = g(I_t) / \delta \quad \text{式 21.6 0}$$

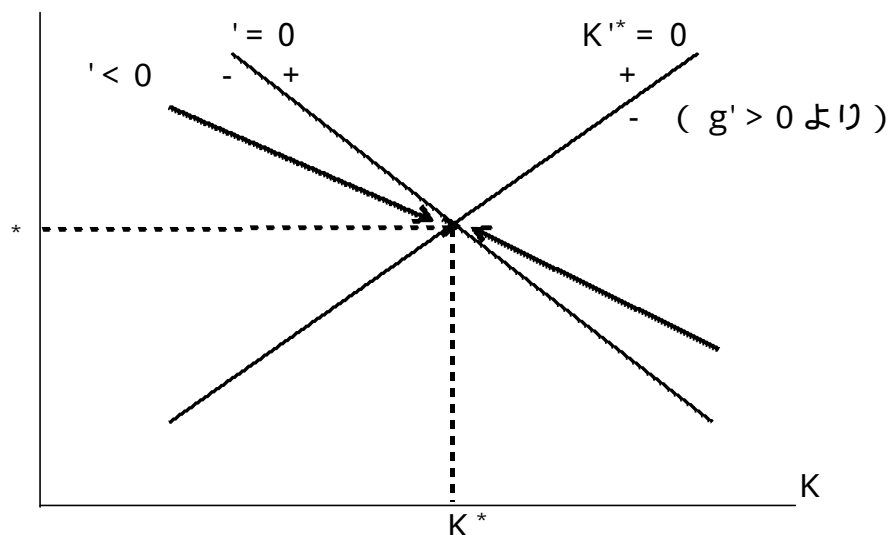
2 曲線の交点は

$$I^* = (K^*) / (r + \delta) \quad \text{式 21.6 1}$$

$$K^* = g(I^*) / \delta \quad \text{式 21.6 2}$$

で表される。したがって、以下のような Phase diagram が描かれる：

図



左下方に向かう経路は、 $K < 0$ の条件か、 I が式 21.5 2 の条件を満たさない ($C'(\cdot)$ は負にならない) し、

右上方に向かう経路は、横断条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} K_t = 0$ を満たさない。

図では太い線で示されている経路のみがすべての条件を満たす最適経路である。

すなわち、最適経路は以下のように定義される：

$$\begin{aligned} dK_t^*/dt &> 0 & \text{if } K_0 < K^* \\ dK_t^*/dt &< 0 & \text{if } K_0 > K^* \\ K_t^* &= K^* & \text{if } K_0 = K^* \end{aligned}$$

注意：

K^* では $I^* = K^*$ であり、最適経路上で K_t^* が K^* に接近するにつれて、 $I^* - K^* \rightarrow 0$ となるため、 K_t^* が K^* に収束するのは無限に時間がかかる。

§ 21.33.定義：

以下の最大化問題を考える：

$$\text{Maximize: } \int_0^{\infty} [p F(N_t, K_t) - w N_t - p_I I_t] e^{-rt} dt$$

$$\text{Subject to: } K_t' = (I_t, K_t) - K_t$$

$$K(0) = K_0, K_t > 0, N_t > 0$$

§ 21.34.定義：

現在価値ハミルトン関数は以下のように定義される：

$$H = [p F(N_t, K_t) - w N_t - p_I I_t] + (I_t, K_t) - K_t$$

以下の条件が最適のために必要となる：

$$K_t' = (I_t, K_t) - K_t \quad \text{式 21.6 3}$$

$$I_t' = (r + \delta) I_t - p F_K - w_t - K_t \quad \text{式 21.6 4}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} K_t = 0 \quad \text{式 21.6 5}$$

$$F_N = w / p \quad \text{式 21.6 6}$$

$$p_I = \frac{1}{r} \quad \text{式 21.6 7}$$

関数 F と K の 1 次同次を仮定すると

$$F = F_K K + F_N N \quad \text{式 21.6 8}$$

$$= \frac{1}{r} K + \frac{1}{r} I \quad \text{式 21.6 9}$$

次に、

$$d(e^{-rt} K_t) / dt = (-r K_t + K_t') e^{-rt}$$

ところが(以下では添字 t を省略する)、

$$K' - r K = -[p F_K + \frac{1}{r} K] \quad \text{式 21.6 3、式 21.6 4}$$

$$= -[p F - p F_N N + \frac{1}{r} K] \quad \text{式 21.6 8}$$

$$= -[p F - w N + \frac{1}{r} K] \quad \text{式 21.6 6}$$

$$= -[p F - w N + \frac{1}{r} K - \frac{1}{r} K - \frac{1}{r} I] \quad \text{式 21.6 9}$$

$$= -[p F - w N - p_I I] \quad \text{式 21.6 7}$$

したがって、最適経路上では

$$d(e^{-rt} K) / dt = -[p F - w N - p_I I]$$

となる。これを 0 から T まで積分して式 21.6 5 を使うと

$$e^{-rT} K_T - K_0 = -\int_0^T [p F - w N - p_I I] e^{-rt} dt \quad \text{式 21.7 0}$$

ただし、

$$V = \int_0^T [p F - w N - p_I I] e^{-rt} dt$$

§ 21.35.分析：

トービンの q は

$$q = (V / K_0) / p_I$$

と定義され、これが 1 より大きいときには投資されることが、式 21.7 0 より

$$q = V / p_I$$

となるから、 $V > p_I$ のとき投資することになる。

第 2 章. 最大値原理の一般化

第 1 節 制約付き最大値原理

§ 22.1. 定義：制約付き動学的最大化問題

以下の最大化問題を考える：

$$\begin{aligned} \text{Maximize:} & \int_0^T f_0[x(t), u(t), t] dt \\ \text{Subject to:} & x'(t) = f_i[x(t), u(t), t], \quad i=1, \dots, n \\ & g_j[x(t), u(t), t] = 0, \quad j=1, \dots, m \\ & x_i(0) = x_i^0, \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad \text{式 22. 1}$$

ただし、

関数 $f_i, i=1, \dots, n, g_j, j=1, \dots, m$ は (x, u, t) -空間で連続微分可能。

$x(t)$ は、その定義域 X は R^n の連結開部分集合で、連続的。

境界条件 (x_0, t_0) は $x_0 \in X$ で、最終時 T は固定されているが、 $x(T)$ は自由。

§ 22.2. 定義：

ハミルトン関数を以下のように定義する：

$$H[x(t), u(t), t, p(t)] = f_0[x(t), u(t), t] + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[x(t), u(t), t]$$

一般化ハミルトン関数もしくはラグランジュ関数を以下のように定義：

$$L[x(t), u(t), t, p(t), q(t)]$$

$H[x(t), u(t), t, p(t)] + \sum_{j=1}^m q_j(t) g_j[x(t), u(t), t]$
 ただし、 q_j はラグランジュ未定乗数(ただし、 t の関数)。

§ 22.3.定義：

最大化問題

Maximize: $H[x(t), u(t), t, p(t)]$

subject to: $g_j[x(t), u(t), t] = 0, j=1, \dots, m$

§ 22.4.定理：

以下の条件のいずれかが成立すれば、最大化問題 § 22.3.の constraint qualification は満たされる(ここでは t を省略する)：

関数 $g_i(x, u, t)$ 、 $i=1, \dots, m$ 、が convex function

関数 $g_i(x, u, t)$ 、 $i=1, \dots, m$ 、が線形関数

関数 $g_i(x, u, t)$ 、 $i=1, \dots, m$ 、が u について concave function で、

$$u^* : g_i(x^*, u^*, t) > 0$$

ただし x^* は最適経路を示す (Slater 条件)。

Rank constraint qualification: 最適経路 x^*, u^* で制約が有効になる g_i による行列 $[g_i(x^*, u^*, t)/u]$ の rank が、制約が有効となる g_i の数に等しい。ただし、制約が有効とは $g_i(x^*, u^*, t) = 0$ となること。

§ 22.5.定理：

Constraint qualification が成立すると仮定する。このとき $[x^*(t), u^*(t)]$ が、式 22.1 の問題の解とすると、ベクトル関数 $p(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]$ と $q(t) = [q_1(t), \dots, q_m(t)]$ が存在し、 $p(t)$ は連続的で piecewise continuous な導関数を持ち、 $q(t)$ は piecewise continuous で、 $u^*(t)$ が連続的な点では連続的であり、さらに、以下の 5 条件を満たす(必要条件)：

$u^*(t)$ 、 $p(t)$ 、 $x^*(t)$ は、 $u^*(t)$ が連続的な区間では、以下のハミルトン体系の解となる：

$$\dot{x}_i(t) = \partial L^* / \partial p_i, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 22.2}$$

$$\dot{p}_i(t) = - \partial L^* / \partial x_i, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 22.3}$$

ただし、

$$L[x(t), u(t), t, p(t), q(t)]$$

$$f_0[x(t), u(t), t] e^{-\rho t} + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[x(t), u(t), t] + \sum_{j=1}^m q_j(t) g_j[x(t), u(t), t]$$

で、星印*は関数が $x^*(t), u^*(t)$ で評価されていることを示す。

$u^*(t)$ は H を最大化する。すなわち

$$u(t) \in U \text{ such that } g_j[x(t), u(t), t] = 0, j=1, \dots, m:$$

$$H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)] = H[x^*(t), u(t), t, p(t)]$$

$$\partial L^* / \partial u_k = 0, k=1, \dots, r$$

$$q_j(t) g_j[x^*(t), u^*(t), t] = 0, q_j(t) \geq 0, j=1, \dots, m$$

$$dL^*/dt = \partial L^* / \partial t$$

$$(\text{横断条件}) p_i(T) = 0, i=1, \dots, n$$

注意：

L が u で concave であれば、

f, g がすべての u について concave で、 p_i がすべて非負であれば、 L は u について concave である($q_j \geq 0$ は定理で保証されている)。

f, g がすべての x と u について concave で、 p_j がすべて非負であれば、上記の条件は十分条件となる。

$u(t) = 0$ の条件があれば、上記の定理の条件は
 $L^*/u_k = 0$ 、 $u_k^* \cdot L^*/u_k = 0$ 、 $k=1, \dots, r$
 となる。

§ 22.6.定理：

式 22. 1 の最大化問題に条件

$$x_i(T) = 0, \quad i=1, \dots, n$$

が追加された場合を考える。Constraint qualification が成立すると仮定する。このとき $[x^*(t), u^*(t)]$ が、式 22. 1 の問題の解とすると、ベクター関数 $p(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]$ と $q(t) = [q_1(t), \dots, q_m(t)]$ が存在し、 $p(t)$ は連続的で piecewise continuous な導関数を持ち、 $q(t)$ は piecewise continuous で、 $u^*(t)$ が連続的な点では連続的で、上記の 4 条件を満たし、さらに、以下の条件を満たす：

$$p_i(T) = 0 \quad \& \quad p_i(T) x_i^*(T) = 0, \quad i=1, \dots, n$$

§ 22.7.定義：制約付き動学的最大化問題

以下の最大化問題を考える：

$$\text{Maximize:} \quad \int_0^T f_0[x(t), u(t), t] dt \quad \text{式 22. 4}$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to:} \quad & x'(t) = f_i[x(t), u(t), t], \quad i=1, \dots, n \\ & \int_0^T g_j[x(t), u(t), t] dt = 0, \quad j=1, \dots, m \\ & x_i(0) = x_i^0, \quad i=1, \dots, n \end{aligned}$$

ただし、

関数 $f_i, i=1, \dots, n, g_j, j=1, \dots, m$ は (x, u, t) -空間で連続微分可能。

$x(t)$ は、その定義域 X は R^n の連結開部分集合で、連続的。

境界条件 (x_0, t_0) は $x_0 \in X$ で、最終時 T は固定されているが、 $x(T)$ は自由。

§ 22.8.定義：

ハミルトン関数を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} H[x(t), u(t), t, p(t)] &= f_0[x(t), u(t), t] \\ &+ \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[x(t), u(t), t] + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j[x(t), u(t), t] \end{aligned}$$

ただし、 λ_j はラグランジュ未定乗数。

§ 22.9.定理：

$[x^*(t), u^*(t)]$ が、式 22. 4 の問題の解とすると、区間 $0 \leq t \leq T$ で同時にゼロとならない関数 $p_1(t), \dots, p_n(t)$ と定数 $p_0, \lambda_j, j=1, \dots, m$ が存在し、 $p(t)$ は連続的で piecewise continuous な導関数を持ち、 $q(t)$ は piecewise continuous で、 $u^*(t)$ が連続的な点では連続的、 $\lambda_j = 0, j=1, \dots, m$ で $\lambda_j g_j[x^*, u^*, t] = 0$ となる。さらに、以下の 4 条件を満たす (必要条件)：

$u^*(t)$ 、 $p(t)$ 、 $x^*(t)$ は、 $u^*(t)$ が連続的な区間では、以下のハミルトン体系の解となる：

$$x_i'(t) = \partial H^* / \partial p_i, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 22. 5}$$

$$p_i'(t) = - \partial H^* / \partial x_i, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 22. 6}$$

ただし、星印*は関数が $x^*(t), u^*(t)$ で評価されていることを示す。

$u^*(t)$ は H を最大化する。すなわち

$$u(t) \in U : H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)] = H[x^*(t), u(t), t, p(t)]$$

$u^*(t)$ が連続的な点では $dH^*/dt = \partial H^* / \partial t$

(横断条件) $p_i(T) = 0, \quad i=1, \dots, n$

§ 22.10.定義：

$u(t)$ は時間の関数であったが、時間の関数とならない変数たとえば、 $b = [b_1, \dots, b_r]$
 $B \subset \mathbb{R}^r$ で、目的関数を最大化する場合には、 b は control parameter 制御パラメータと呼ぶ。

§ 22.11. 定義：動学的制約付き最大化問題

以下の最大化問題を考える：

$$\text{Maximize}_{u(t), b:} \quad p_0(b) + \int_0^T f_0[x(t), u(t), t] dt \quad \text{式 22.7}$$

$$\text{Subject to: } x'(t) = f_i[x(t), u(t), t], \quad i=1, \dots, n$$

$$g_j[x(t), u(t), t] \leq 0, \quad j=1, \dots, m$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i=1, \dots, n$$

$$x_i(T) = x_i^T(b), \quad i=1, \dots, n$$

$$T = T(b)$$

ただし、

関数 $f_i, i=1, \dots, n, g_j, j=1, \dots, m$ は (x, u, t) -空間で連続微分可能。

$x(t)$ は、その定義域 X は \mathbb{R}^n の連結開部分集合で、連続的。

§ 22.12. 定義：

ハミルトン関数を以下のように定義する：

$$H[x(t), u(t), t, p(t)] = p_0 f_0[x(t), u(t), t] + \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[x(t), u(t), t]$$

一般化ハミルトン関数もしくはラグランジュ関数を以下のように定義：

$$L[x(t), u(t), t, p(t), q(t)]$$

$$= H[x(t), u(t), t, p(t)] + \sum_{j=1}^m q_j(t) g_j[x(t), u(t), t]$$

ただし、 q_j はラグランジュ未定乗数。

§ 22.13. 定理：

$[x^*(t), u^*(t)]$ が、式 22.7 の問題の解とすると、区間 $0 \leq t \leq T$ で同時にゼロとならない定数 p_0 、関数 $p_1(t), \dots, p_n(t)$ と $q_1(t), \dots, q_m(t)$ が存在し、以下の条件を満たす：

p_0 は非負で、 $p(t)$ は連続的で piecewise continuous な導関数を持つ。

$q(t)$ は piecewise continuous で、 $u^*(t)$ が連続的な点では連続的、さらに、

$$q_j(t) g_j[x^*(t), u^*(t), t] = 0, \quad q_j(t) \leq 0, \quad j=1, \dots, m$$

$u^*(t), p(t), x^*(t)$ は、 $u^*(t)$ が連続的な区間では、以下のハミルトン体系の解となる：

$$x_i'(t) = -L^*/p_i, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 22.8}$$

$$p_i'(t) = -L^*/x_i, \quad i=1, \dots, n \quad \text{式 22.9}$$

ただし、星印*は関数が $x^*(t), u^*(t)$ で評価されていることを示す。

$$L^*/u = 0, \quad i=1, \dots, r \quad (\text{ただし、Constraint Qualification を満たすと仮定})$$

$u^*(t)$ と関数 L が連続的な点では、 $dL^*/dt = L^*/t$

$u^*(t)$ は H を最大化する。すなわち

$$u(t) \in U \text{ such that } g_j[x(t), u(t), t] \leq 0, \quad j=1, \dots, m :$$

$$H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)] \geq H[x^*(t), u(t), t, p(t)]$$

(横断条件)

$$-p_0 \leq 0, \quad b_j - L(x^*(T), u^*(T), T, p(T), q(T)) \cdot T/b_j + \sum_{i=1}^n p_i(T) \cdot x_i(T)/b_j = 0, \quad j=1, \dots, r$$

注意：

f, g がすべて concave で、 $p_0 = 1$ で、 $p_i, i=1, \dots, n$ がすべて非負であれば、上記の条件は十分条件となる。もし strictly concave であれば、ユニークとなる。

経済学分析では、一般に $p_0 = 1$ と仮定される。

横断条件は一般化されている。例えば、

$T = \text{fixed}$ (第2項が消滅)、 $b_i = x_i$ (よって $\sum_{i=1}^n x_i(T) / b_j = 1$) であれば、
 $\sum_{i=1}^n x_i = p_i(T)$ 。
 $x_i(T) = \text{fixed}$ (第3項が消滅) で、 $b = T$ あれば、
 $L(x^*(T), u^*(T), T, p(T), q(T)) = \lambda'(T)$ 。

第2節 消費者の動学的消費配分

§ 22.14. 定義：

消費は $c(t)$ 、一定の所得は y 、生涯の長さは T 、資産は $a(t)$ 、一定の実質利子率は r とすると、資産の動学的経路は以下のような関係で示される：

$$a'(t) = y + r a(t) - c(t) \quad \text{式 22.1 0}$$

ただし、 $a(t)$ は負も可能 (借金で消費)。消費者の生涯効用は以下のように表される：

$$\int_0^T u(c(t)) e^{-\rho t} dt + \lambda [a(T)] e^{-\rho T} \quad \text{式 22.1 1}$$

$$u' > 0, \quad u'' < 0, \quad \lambda' > 0, \quad \lambda'' < 0, \quad \text{式 22.1 2}$$

$$u'(0) = \lambda \quad \text{式 22.1 3}$$

消費者は、制約条件式 22.1 0、 $c(t) \geq 0$ 、 $a(0) = a^0$ のもとで式 22.1 1 を最大化する。

§ 22.15. 定義：

ハミルトン関数は

$$H = u(c(t)) e^{-\rho t} + p(t)(w(t) + a(t) - c(t))$$

と定義され、最大値原理より

$$a'(t) = H / p(t) \quad a'(t) = y + r a(t) - c(t) \quad \text{式 22.1 4}$$

$$p'(t) = -H / a(t) \quad p'(t) = -r p(t) \quad \text{式 22.1 5}$$

$$H / c(t) = 0 \quad u'(c(t)) e^{-\rho t} = p(t) \quad \text{式 22.1 6}$$

$$p(T) = \lambda'(a(T)) e^{-\rho T} \quad \text{式 22.1 7}$$

注意：

式 22.1 6 は式 22.1 3 によって保証される。

式 22.1 6 より、 $p(t)$ は貯蓄の Shadow price 機会費用であることが分かる。

関数 u が strictly concave であるため、これらの条件は最適解の十分条件でもある。

§ 22.16. 分析：

式 22.1 5 は

$$p'(t) / p(t) = -r \quad \text{式 22.1 8}$$

と表されるから、「貯蓄の Shadow price の減少率と利子率を等しくすること」が消費者の最適行動であることが分かる。

§ 22.17. 定義：

新しい変数、 $q(t) = p(t) e^{\rho t}$ を導入し、関係 $p(t) = q(t) e^{-\rho t}$ を微分すると

$$p'(t) = q'(t) e^{-\rho t} - \rho q(t) e^{-\rho t} = (q'(t) - \rho q(t)) e^{-\rho t}$$

したがって

$$p'(t) / p(t) = q'(t) / q(t) - \rho$$

よって式 22.1 8 は

$$q'(t) / q(t) = -r$$

これを積分すると、 $\log q(t) = \text{const.} + (-r)t$ となって、結局

$$q(t) = q_0 e^{(-r)t} \quad \text{式 22.1 9}$$

§ 22.18. 分析：

新しい変数 $q(t)$ を使うと式 22.1 7 は

$$u'(c(t)) = q(t)$$

この逆関数をとって

$$c(t) = [q_0 e^{-(1/u-r)t}]$$

ただし、 $1/u = 1/u'' < 0$ となる。

したがって、 $r > r$ であれば、消費は時間とともに減少する。これは § 21.12. の定理と同じ結果である。

第3節 地域価格設定問題

§ 22.19. 定義：

独占的競争市場の企業を考える。この企業は位置(あるいは距離) 0 から T までの地域で供給し、位置によって異なった価格で販売できる。変数 t は企業からの市場までの距離を示す。

$c(t)$ は、運送費用とする。 $c'(t) > 0$ 、 $c(0) = 0$ 。

t 地点での価格を $p(t)$ 、需要量を $x[p(t)]$ とする。 $x'[p(t)] < 0$ 。

逆需要関数を $p(t) = f[x(t)]$ と定義すると、 $f' < 0$ 。

総販売量は

$$X(T) = \int_0^T x[p(t)] dt \quad \text{式 22.20}$$

総費用は、 $C[X(T)]$ 、 $C' > 0$ と表される。

§ 22.20. 定義：

企業の最大化問題は以下のように定義される：

$$\text{Maximize: } \int_0^T \{f[x(t)]x(t) - c(t)x(t)\} dt - C[X(T)]$$

Subject to : $X'(t) = x(t)$

ただし、制約条件は式 22.20 を微分して得られる。

§ 22.21. 定義：

ハミルトン関数は

$$H = f[x(t)]x(t) - c(t)x(t) + q(t)x(t)$$

と定義され、最大値原理より

$$X'(t) = H/q(t) \quad X'(t) = x(t) \quad \text{式 22.21}$$

$$q'(t) = -H/x(t) \quad q'(t) = 0 \quad \text{式 22.22}$$

$$H/x(t) = 0 \quad f'x(t) + f - c + q = 0 \quad \text{式 22.23}$$

$$q(T) = -C'(X(T)) \quad \text{式 22.24}$$

注意：

Interior 解を仮定する。

$f[x(t)]x(t) - c(t)x(t)$ と $C[X(T)]$ が concave であれば、十分条件にもなる。

Strictly concave であればユニークとなる。

§ 22.22. 分析：

式 22.22 より q は一定で、式 22.24 より、

$$\text{すべての } t \text{ について、 } q(t) = -C'[X(T)]$$

したがって、 $q(t)$ はマイナスの限界費用 MC 。一方、 $f'x(t) + f$ は限界収入 $MR(t)$ 。よって式 22.23 より

$$f'x(t) + f = MC + c(t) \quad \text{式 22.25}$$

が得られる。

§ 22.23. 分析：

需要の価格弾力性を $-x'f/x$ 、すなわち $-p/f'x$ と定義し一定と仮定すると式 22.25 より

$$p(t) = (c(t) + MC)/(1 - 1/\epsilon)$$

式 22.2 6

これより、 $p(t) > 0$ のためには条件 $1/\epsilon < 1$ が必要となる。
したがって

$$p(t) - p(0) = c(t)/(1 - 1/\epsilon)$$

となって、運送費用以上の価格差が生じることが分かる。

§ 22.24.分析：

式 22.2 6 を微分すると

$$p'(t) = c'(t)/(1 - 1/\epsilon) > 0$$

より、企業は遠い位置ほど高い価格とすることが分かる。

ただし、 c が t の関数 $c(t)$ の場合には、 $1/\epsilon$ と置いて、式 22.2 6 を微分すると

$$p'(t) = (c'(t) + p c'(t))/(1 - 1/\epsilon)$$

したがって、 $c' < 0$ すなわち $c' > 0$ であれば、 $p'(t) < 0$ も起こりえる。これは国際貿易におけるダンピングを説明する。

§ 22.25.定義：

需要曲線より消費者効用を定義すると

$$G(x) = \int_0^x f(s) ds$$

となるから、社会的厚生は以下のように定義される：

$$W = \int_0^T \{G(x(t)) - c(t)x(t)\} dt - C[x(T)] \quad \text{式 22.2 7}$$

社会厚生を最大化するには、制約 $X'(t) = x(t)$ のもとで式 22.2 7 を最大化する。

§ 22.26.定義：

ハミルトン関数は

$$H = G[x(t)] - c(t)x(t) + q(t)x(t)$$

と定義され、最大値原理より

$$X'(t) = H/q(t) \quad X'(t) = x(t) \quad \text{式 22.2 8}$$

$$q'(t) = -H/X(t) \quad q'(t) = 0 \quad \text{式 22.2 9}$$

$$H/x(t) = 0 \quad G'[x(t)] - c + q = 0 \quad \text{式 22.3 0}$$

$$q(T) = -C'(X(T)) \quad \text{式 22.3 1}$$

注意：

Interior 解を仮定する。

$G' < 0$ であれば、十分条件にもなる。

§ 22.27.分析：

式 22.2 9 と式 22.3 1 より

$$\text{すべての } t \text{ について、} q(t) = -C'[X(T)] \quad \text{式 22.3 2}$$

この結果は § 22.22. と同じである。

次に、 $MC = -C'[X(T)]$ とおくと、式 22.3 2 と式 22.3 0 より、社会的最適条件

$$p(t) = c(t) + MC \quad \text{式 22.3 3}$$

が得られる。

式 22.2 6 と比較すれば、明らかに、利潤最大化価格は社会的最適価格より高い。

§ 22.28.定義：

地域価格差を運送費用に等しくさせるような産業政策を導入するケースを考える。このような価格政策を mill pricing という。

このときには企業は価格を

$p(t) = (t) + \text{あるいは} = p(t) - (t)$ 式 22.3 4
とせねばならない。ただし、 (t) は一定のパラメータで企業が決める。

§ 22.29.定義：

Mill pricing 規制下の企業の最大化問題は以下のように定義される：

$$\text{Maximize: } \int_0^T x(t) dt - C[X(T)]$$

$$\text{Subject to : } X'(t) = x(t)$$

§ 22.30.定義：

ハミルトン関数は

$$H = x(t) + q(t)x(t)$$

と定義され、最大値原理より

$$X'(t) = H/q(t) \quad X'(t) = x(t)$$

式 22.3 5

$$q'(t) = -H/X(t) \quad q'(t) = 0$$

式 22.3 6

$$H/x(t) = 0 \quad + q(t) = 0$$

式 22.3 7

$$q(T) = -C'(X(T))$$

式 22.3 8

§ 22.31.分析：

式 22.3 6 と式 22.3 8 より

$$\text{すべての } t \text{ について、} q(t) = -C'[X(T)]$$

また、式 22.3 7 より

$$-q(t) = MC$$

したがって、式 22.3 4 より

$$p(t) = (t) + MC$$

となる。これは、社会厚生最大化条件の式 22.3 3 と等しい。

したがって、mill pricing は社会的最適を実現する。

§ 22.32.注意：

この節の最大化問題は nonlinear programming 問題として解くことができる。この場合には、企業の最大化問題は以下のように定義される：

$$\text{Maximize: } \sum_{i=1}^T [f_i(x_i)x_i - p_i x_i] - C(\sum_{i=1}^T x_i)$$

この問題を解けば、同じ結果が得られる。

第 2 3 章. 不確実性下の経済主体の行動

第 1 節 NM 効用関数

§ 23.1.定義：States of nature, states of world, states

不確実性 Uncertainty の世界では、行為と結果は外部的環境に依存する。この外部的環境を状態 States of nature, states of world, states と呼ぶ。

不確実性の世界では、選択されるべき対象の集合を「確率的現象 Prospect」あるいは「賭もしくは賭券 Lottery」と呼ぶ。

注意：不確実性 Uncertainty と危険 Risk はここでは同義語として使う。

§ 23.2.定義：

個々の確率的現象は、結果 outcome, x_1, x_2, \dots, x_s とその確率 probability, p_1, p_2, \dots, p_s によって定義される。ただし、 $p_i : 0 \leq p_i \leq 1$ 、かつ $\sum_{i=1}^s p_i = 1$ 。したがって、賭 y は

$$y = (p_1, p_2, \dots, p_s; x_1, x_2, \dots, x_s)$$

あるいは

$$y = (\quad ; x)$$

ただし、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ 、 $\quad = (\quad_1, \quad_2, \dots, \quad_s)$ と表される。

結果が2個しかない場合には

$$y = (\quad ; x_1, x_2)$$

と示し、これは $y = (\quad, 1 - \quad ; x_1, x_2)$ を意味する。

注意：

確率 \quad_i は、経済主体(以下では個人)が主観的に予想する値である。

賭は以下のように表現されることもある：

$$y = (x_1, x_2, \dots, x_s ; \quad_1, \quad_2, \dots, \quad_s)$$

§ 23.3.定義：Compound prospect (lottery)

複数の確率的現象、 y, y', y'', \dots があり、その確率を $\quad, \quad', \quad'', \dots$ とする。

ただし、 $\quad = (\quad_1, \quad_2, \dots, \quad_s)$ 、 $\quad' = (\quad'_1, \quad'_2, \dots, \quad'_s)$ 、 \dots

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_s)、y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_s)、\dots$$

これらより新たな確率的現象

$$L = (\quad, \quad', \quad'', \dots ; y, y', y'', \dots)$$

が定義できる。このLは、確率的現象を結果とする確率的現象で、複合賭 compound lottery or prospect と呼ばれる。

例：宝くじを賭けるじゃんけん

§ 23.4.定義：

個人が持っている「すべての確率的現象(賭)の集合」をYとし、Yの要素に対して、選好関係 \succsim が定義されていると仮定する。

§ 23.5.定義：選好関係 \succsim が満たすと思われる性質(第2部 § 1.5 参照)

反射 reflexivity $y \in Y : y \succsim y$

推移 transitivity $y, y', z \in Y : x \succ y \text{ \& } y \succ z \implies x \succ z$

完備 completeness $x, y \in Y : x \succsim y \text{ or } y \succsim x$

§ 23.6.定義：

これら3性質を満たす選好は、Yでの complete (total) quasi(pre)-ordering (完備選好順序あるいは単に preference ordering 選好順序) と呼ばれる。3番目の条件を満たさない場合には、(partial) quasi-ordering という。もし $x \succ y \text{ \& } y \succ x \implies x = y$ を満たせば、quasi-(pre-) が消えるが、quasi- や pre- は省略されることがある。

§ 23.7.定義

$x \succ y$ 、かつ $y \succ x$ でない場合には、strictly preferred と呼ばれ、 $x \succ y$ と表記する。

§ 23.8.定義

$x \succ y$ かつ $y \succ x$ のときには、indifferent と言われ、 $x \sim y$ と表記。

§ 23.9.定義：

Axiom 1：個人は、Yで定義された完備選好順序を持っている。

Axiom 2 (連続性)：

$$y_1, y_2, y_3 \in Y \text{ such that } y_1 \succ y_2 \succ y_3 \\ R, 0 \quad 1 : y_1 + (1 - \quad) y_3 \succ y_2$$

§ 23.10.定義：

以下の2つの賭を考える：

$$L_1 = (x_1; x)$$

$$L_2 = (x'; x)$$

ただし、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ 、 $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_s)$ 、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ 、 $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_s)$ 。

さらに、これらの賭から以下のような複合賭を定義する：

$$y = (x_1; L_1, L_2) = [x_1; (x_1; x), (x'_1; x)] \quad \text{式 23. 1}$$

確率 p 、 p' (ただし、 $0 \leq p, p' \leq 1$) を使って、新しい確率(ベクター)を以下のように定義する：

$$p = p' + (1 - p')$$

§ 23.11.定義：

outcome が2個(x_1, x_2)の場合には、複合賭は以下ようになる：

$$y = (x_1; L_1, L_2) = [x_1; (x_1; x_1, x_2), (x'_1; x_1, x_2)]$$

したがって、上記の確率スカラーは以下のように定義される：

$$p = p' + (1 - p') \quad \text{式 23. 2}$$

§ 23.12.定義：

$\Pr(x)$ あるいは $\text{Prob}(x)$ によって、 x が起こる確率を示し、以下のように定義する：

$\Pr(x_i) = x_i$ が起こる($= x_i$ を獲得する)確率。

$\Pr(x_i | L_j) =$ 賭券 L_j を持っているときに、 x_i を獲得する確率。

この表記法を用いれば、outcome が2個(x_1, x_2)の複合賭(式 23. 1)を持っているときに、 x_1 を獲得する確率は

$$\begin{aligned} \Pr(x_1) &= \Pr(x_1 | L_1) \cdot \Pr(L_1) + \Pr(x_1 | L_2) \cdot \Pr(L_2) \\ &= p' + (1 - p') (p) \end{aligned}$$

§ 23.13.定義：

Axiom 3 : $y = (p; x)$

ただし、 y は式 23. 1 で定義され、 p は式 23. 2 で定義される。

注意：

この Axiom は、すべての outcome について、それらを獲得する確率が同じであれば、単純な賭でも複合賭でも、個人は無差別としている。

例：宝くじを買うのと 賞金が2倍の宝くじ をじゃんけんで賭けるのとは無差別とする。

したがって、outcome を獲得するプロセス、すなわちギャンブルをする行為からは効用は得られないと仮定している。

§ 23.14.定義：

Axiom 4 (独立 Independence) :

$$y_1 \succ Y \text{ \& } y_2 \succ Y \text{ such that } y_1 \succ y_2$$

$$y = Y \cdot p, 0 < p < 1: y_1 + (1 - p)y \succ y_2 + (1 - p)y$$

$$y_1 \succ Y \text{ \& } y_2 \succ Y \text{ such that } y_1 \succ y_2$$

$$y = Y \cdot p, 0 < p < 1: y_1 + (1 - p)y \succ y_2 + (1 - p)y$$

注意： y_1 は、賭 y_1 が賭 y_2 より好まれるなら、どんな賭 y についても「 y_2 と y より作られた複合賭」より好まれる「 y_1 と y から作られた複合賭」が存在することを主張している。一方、

y_2 は、賭 y_1 と賭 y_2 が同じように好まれるなら、どんな賭 y についても「 y_2 と y より作られた複合賭」と同じように好まれる「 y_1 と y から作られた複合賭」が存在することを主張して

いる。

§ 23.15.定理 : Monotonicity

Axiom 1 ~ 4 のもとでは、以下の命題が満たされる :

outcome x_1 が outcome x_2 より好まれ、 $0 < \alpha$, $1-\alpha < 1$ とすると、

$$\begin{aligned} & \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \succ \alpha x_2 + (1-\alpha)x_1 \\ & = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \succ \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \end{aligned}$$

§ 23.16.定理 : Expected Utility Theorem by von Neumann-Morgenstein

Axiom 1 ~ 4 のもとでは、関数 $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し、以下の条件を満たす :

Order preserving property

$$y_1 \succ y_2 \implies u(y_1) > u(y_2)$$

Linear property

$$u(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s) = \alpha_1 u(x_1) + \alpha_2 u(x_2) + \dots + \alpha_s u(x_s) \quad \text{式 23.3}$$

§ 23.17.定義 :

§ 23.16.定理の関数は、フォンノイマンモルゲンシュタイン効用関数もしくはNM効用関数 von Neumann-Morgenstein Utility Function と呼ばれる。

§ 23.18.定理 :

Axiom 1 ~ 4 を満たす個人は、期待効用 $\sum_{i=1}^s \alpha_i u(x_i)$ を最大化する。

§ 23.19.定理 :

Order preserving property と Linear property を満たす効用関数が存在すれば、Axiom 1 ~ 4 が満たされる。

§ 23.20.定理 :

$u(y)$ がNM効用関数であれば、 $a u(y) + b$ もNM効用関数である。ただし、 b は任意の実数値で、 a は条件 $a > 0$ を満たす任意の実数値。

注意 : NM効用関数は基数的関数であるが、線形変換することができる。

§ 23.21.定理 :

outcome が無限個ある場合には、NM効用関数は上下に有界である。

§ 23.22.定義 : Allais's Paradox

独立 Axiom には問題がある。これを理解するために、以下のような2つの賭を考える :

$$y_1 = (1 ; 100 \text{ 万円}, 0)$$

$$y_2 = (0.7 ; 200 \text{ 万円}, 0)$$

この2つでは、 y_1 の方が選好される可能性がある。

次に、3番目の賭として

$$y = (1 ; 0, 0)$$

を考え、たとえば、独立 Axiom の α を 0.5 とすると

$$y_3 = (0.5 ; y_1, y) = (0.5 ; 100 \text{ 万円}, 0)$$

$$y_4 = (0.5 ; y_2, y) = (0.35 ; 200 \text{ 万円}, 0)$$

となって、 y_3 より y_4 が選好される可能性がある。

この場合には、独立 Axiom は成立しない。これをアレのパラドックスと言う。

第2節 危険に対する個人の行動の特徴

§ 23.23. 定義：

危険中立 Risk neutral = NM効用関数が線形

$$x_j, j=1, \dots, s, \quad p_j, 0 \leq p_j \leq 1, j=1, \dots, s \text{ \& } \sum_{j=1}^s p_j = 1 :$$

$$u\left(\sum_{i=1}^s p_i x_i\right) = \sum_{i=1}^s p_i u(x_i)$$

危険回避 Risk averse = NM効用関数が strictly concave

$$x_j, j=1, \dots, s, \quad p_j, 0 \leq p_j \leq 1, j=1, \dots, s \text{ \& } \sum_{j=1}^s p_j = 1 :$$

$$u\left(\sum_{i=1}^s p_i x_i\right) > \sum_{i=1}^s p_i u(x_i)$$

危険愛好 Risk lover = NM効用関数が strictly convex

$$x_j, j=1, \dots, s, \quad p_j, 0 \leq p_j \leq 1, j=1, \dots, s \text{ \& } \sum_{j=1}^s p_j = 1 :$$

$$u\left(\sum_{i=1}^s p_i x_i\right) < \sum_{i=1}^s p_i u(x_i)$$

図

注意：

$$x : u''(x) < 0$$

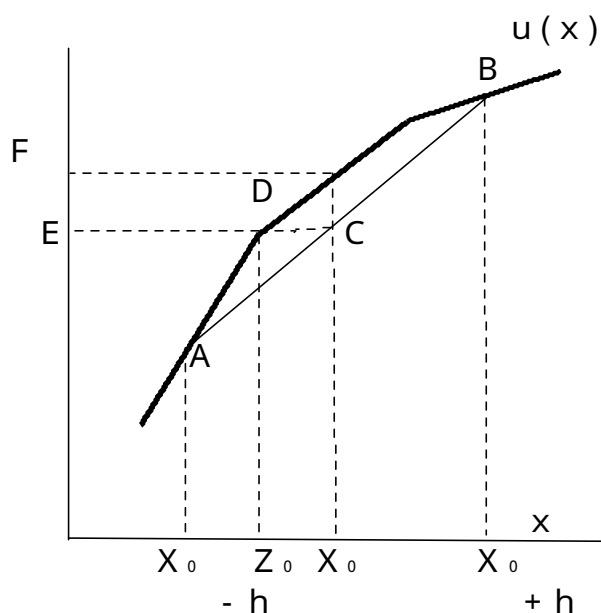
$$u \text{ は strictly concave}$$

$$u \text{ は strictly concave}$$

$$x : u''(x) < 0 \text{ if } u''(x) \geq 0$$

§ 23.24. 定義：

右図の、 x_0 は賭の期待値、
 z_0 は、期待値 x_0 と同じ効用
 をもたらすに必要な現金で、この
 差を Risk premium と言う。



§ 23.25. 定義

z_0 は以下の条件を満たす：

$$0.5 u(x_0 + h) + 0.5 u(x_0 - h) = u(z_0)$$

式 23.4

Risk premium は

$$x_0 - z_0$$

式 23.5

で定義され、 x_0 と h に依存する。

§ 23.26. 定義：

式 23.5 を式 23.4 に代入すると(下付0省略)

$$u(x_0) = 0.5 u(x_0 + h) + 0.5 u(x_0 - h)$$

これらの3項をテーラー展開して近似すると

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - h u'(x_0) + \frac{h^2}{2} u''(x_0)$$

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + h u'(x_0) + \frac{h^2}{2} u''(x_0)$$

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - h u'(x_0) + \frac{h^2}{2} u''(x_0)$$

代入すると

$$u(x_0) - h u'(x_0) + \frac{h^2}{2} u''(x_0) = u(x_0) + h u'(x_0) + \frac{h^2}{2} u''(x_0)$$

したがって

$$-\frac{h^2}{2} u''(x_0) = \frac{h^2}{2} u''(x_0)$$

これより、Risk premium は危険回避者ではプラス、危険愛好者ではマイナスとなることが分かる。

§ 23.27. 定義：

絶対危険回避度 Coefficient of absolute risk aversion/Arrow-Pratt measure of absolute risk aversion を

$$R_a(x) = -u''(x)/u'(x)$$

と定義すると

$$R_a(x) = 2 \quad (x, h)/h^2$$

となる。したがって、2つのNM効用関数 $u_i(x)$ の絶対危険回避度 $R_{a_i}(x)$, $i=1,2$ を定義すると、 h が小さければ、

$$R_{a1}(x) > R_{a2} \quad \Rightarrow \quad R_{a1}(x, h) > R_{a2}(x, h)$$

を得る。

以下の命題が示すように、この関係は実はすべての h について成立する。

§ 23.28.定理：

2回連続微分可能で、単調増加で、しかも strictly concave な2つのNM効用関数 $u_1(x)$, $u_2(x)$ については、以下の3条件は同値である：

(a) $R_{a1}(x) > R_{a2}(x)$

(b) $h : R_{a1}(x, h) > R_{a2}(x, h)$

(c) $u_1(x)$ が $u_2(x)$ より「より concave」すなわち、単調増加で、strictly concave な関数 $u_2(x)$ があって、 $u_1(x) = u_2(x)$

§ 23.29.定義：

相対危険回避度 Coefficient of relative risk aversion/Arrow-Pratt measure of relative risk aversion を

$$R_r(x) = -x u''(x)/u'(x)$$

と定義すると

$$R_r(x) = x R_a(x)$$

となる。このときには、相対 Risk premium π^* は、上図の DC/EC (= リスクプレミアム/所得) で示される。

§ 23.30.定理：

2回連続微分可能で、単調増加で、しかも strictly concave な2つのNM効用関数 $u_1(x)$, $u_2(x)$ については、以下の2条件は同値である：

(a) $R_{r1}(x) > R_{r2}(x)$

(b) $h : R_{r1}^*(x, h) > R_{r2}^*(x, h)$

§ 23.31.定義：

Arrow と Pratt は不確実性下の個人の行動に関して以下の仮定を採用した：

Decreasing absolute risk aversion : $R_a'(x) < 0$

Increasing relative risk aversion : $R_r'(x) > 0$

注意：

Decreasing absolute risk aversion は、豊かになるほど、危険の存在が重要でなくなることを意味する。

Increasing relative risk aversion は、危険が豊かさに比例して増加すれば、危険の重要性が高まることを意味する。

$$R_a'(x) = -[u' u''' - u''^2]/u'^2 \text{ より以下の命題が満たされる}$$

§ 23.32.定理：

$$R_a'(x) < 0 \quad u''' > 0$$

$$\begin{aligned} u''' &= 0 & R_a'(x) &< 0 \\ u''' &> 0 \text{ \& } x > 0 & R_r'(x) &> 0 \end{aligned}$$

§ 23.33.例：

NM効用関数は以下の4条件を満たす必要がある：

$$\begin{aligned} u'(x) &> 0 \\ u'' &< 0 \\ R_a'(x) &< 0 \\ R_r'(x) &> 0 \end{aligned}$$

たとえば、

$$u(x) = a + b x - c x^2$$

は条件を満たさない。

$$u(x) = a + b \log(x + c)$$

は全条件を満たす。

以下のNM効用関数は、 $R_a(x)$ が一定となる：

$$u(x) = -e^{-ax}, \text{ ただし、 } a > 0$$

以下のNM効用関数は、 $R_r(x)$ が一定となる：

$$u(x) = x^{1-a} \quad \text{for } 0 < a < 1$$

$$u(x) = \log(x) \quad \text{for } a = 1$$

$$u(x) = -x^{-(1-a)} \quad \text{for } a > 1$$

§ 23.34.定義：

危険下の無差別曲線は以下のように定義される：

$$I = \{(x_1, x_2) \in R^2 : u(x_1) + (1 - \alpha)u(x_2) = \text{const.}, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

§ 23.35.定理：

危険下の無差別曲線が原点に凸となる 危険回避者

第3節不確実性分析手法の応用：フィッシャーの2期間消費モデル

§ 23.36.定義：

期間を現在1と未来2に分け、現在消費を c_1 、未来消費を c_2 とすると、NM効用関数は

$$u = u(c_1, c_2)$$

となる。現在所得を y_1 、未来所得を y_2 とし、 y_2 は一定の確率分布に従う確率変数とする：

$$y_2 = y_2^e + \epsilon \quad \text{式 23.6}$$

ただし、 ϵ の確率分布は $(0, \infty)$ で表わされ、 $E[\epsilon] = 0$ となるものとする。

§ 23.37.定義：

現在の所得から消費を差し引いた値は貯蓄 s で、利子率を r とすると、以下の条件を満たす：

$$c_2 = y_2 + s(1 + r) \quad \text{式 23.7}$$

これに $s = y_1 - c_1$ を代入すると

$$(1 + r)y_1 + y_2 - (1 + r)c_1 - c_2 = 0 \quad \text{式 23.8}$$

を得る。

§ 23.38.定義：

消費者の最大化問題は

$$\text{Maximize: } E[u(c_1, c_2)]$$

$$\text{subject to : 式 23.8}$$

となる。ただし、期待値は

$E[u(c_1, c_2)]$ () d
で定義される。

§ 23.39.分析：

この問題のラグランジュ関数は

$$E[u(c_1, c_2)] + \{(1+r)y_1 + y_2 - (1+r)c_1 - c_2\}$$

で、第1階条件は

$$E[u_1] + (1+r) = 0$$

$$E[u_2] + = 0$$

$$(1+r)y_1 + y_2 - (1+r)c_1 - c_2 = 0$$

式 23. 9

である。ただし、 $E[u_j]$ はj番目の変数による偏微分を示す。これより

$$E[u_1]/E[u_2] = 1+r$$

をえる。これは2期間最適化に関するフィッシャーの法則と呼ばれる。第2階条件は以下のようになる(第1部17章参照)：

$$E[u_{11} - 2(1+r)u_{12} + (1+r)^2 u_{22}] < 0$$

式 23. 9 を使えば、 y_1 や y_2^{\wedge} や r などが変化したときの c_1 や c_2 への影響を分析できる(第1部17章参照)。式 23. 6 を

$$y_2 = y_2^{\wedge} +$$

とおけば、 の増加で危険の増加を示すことができ、その c_1 や c_2 への影響を分析できる。

第5部：ゲーム理論と寡占

(主要参考文献:Jurgen Eichberger, Game Theory for Economists, 1993, Academic Press)

第24章.ゲーム理論の基礎

第1節展開型 Extensive Form のゲーム

§ 24.1.定義：展開型ゲーム

展開型のゲームでは、ゲームにおける行動の順番、プレイヤーの持つ情報、すべてのプレイヤーの各段階での選択可能性について明らかにされる。

展開型のゲームは、図のようなゲームの樹 Game Tree で表される。

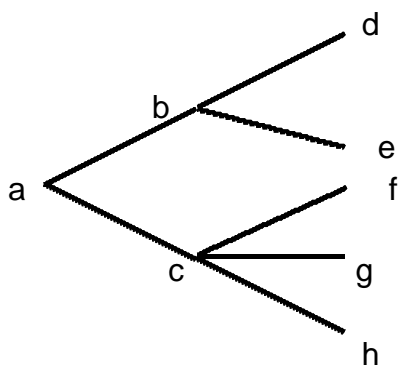
§ 24.2.定義：ノードと行動

プレイヤーの集合 $I = \{1, 2, \dots, I\}$

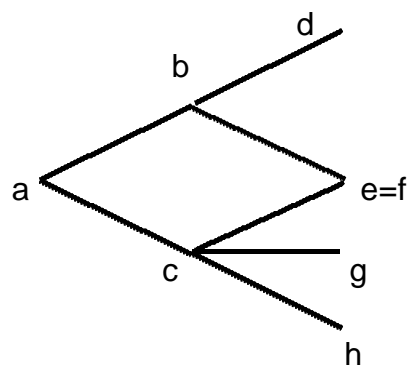
プレイヤー $i \in I$

ゲームの各段階の状況はノード(Node)と言われ、ノードからノードへ移動することを、行動(MoveあるいはAction)と言う。

以下の例を考える：



図



図

状況すなわちノードの集合は $N = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

行動の集合は $A = \{ \text{ } , \text{ } , \text{ } , \text{ } , \text{ } , \text{ } , \text{ } , \text{ } \}$

図のように、同じノードに異なった経路で到達する場合もある。

§ 24.3.定義：ノードの流れを示す関数

$\pi: N \rightarrow N$ を個々のノードとその1つ前のノードを関連付ける関数とする。ただし、出発点 o については、 $\pi(o) = o$ と定義する。

例えば、図 24.1 では、 $\pi(a) = (a) = (b) = (c)$ 。

$\pi^k: N \rightarrow N$: $\pi^k(n)$ は関数 π を k 回繰り返すことを示す。例えば、図 24.2 では $\pi^2(h) = \pi(\pi(h)) = a$

§ 24.4.定義：ノードの分類

最終点 Terminal Node とは、 $T(N) = \{n \in N : \pi^{-1}(n) = \emptyset\}$

行動分岐点あるいは分岐点 Decision Node とは、 $D(N) = N \setminus T(N)$

プレイヤー i が、行動をせねばならない分岐点の集合を N_i と表示すると、これは集合 $D(N)$ の部分集合。

すべての分岐点は、プレイヤーごとに分割される。すなわち $[N_i]_{i \in I}$ 。これを集合 $D(N)$ のプレイヤー分割 Player Partition と言う。

§ 24.5.定義：行動集合

$A(n)$ を分岐点 n に到達する行動とする。 $\pi: N \rightarrow N$ を行動関数と呼ぶと、分岐点 n における行動の集合は以下のように定義される：

$$A(n) = \{ (m) : n = (m) \text{ for } m \in N \}$$

例えば、図 24.6 では、

$$(f) = \text{表}, (g) = \text{裏}, (h) = \text{裏},$$

$$A(c) = \{ \text{表}, \text{裏} \}$$

すべての行動の集合を A と表す。

§ 24.6.定義：利得関数 Payoff Function

利得関数 Payoff Function $r: T(N) \rightarrow R^I$ は、個々の最終点で各プレイヤーが得る利得を定義する。

§ 24.7.定義：情報集合

図 24.7 は Matching Pennies

硬貨表裏合わせゲーム

プレイヤーは 1 と 2

1 番目分岐点ではプレイヤー 1

2 番目の 2 つの分岐点ではプレイヤー 2

同じ面を出せばプレイヤー 1 が 1 万円を得る

面が異なればプレイヤー 2 が 1 万円を得る

プレイヤー 1 の行動を

プレイヤー 2 は観察できない = 知らない

したがって

プレイヤー 2 は、自分が分岐点 b にいるのか

分岐点 c にいるのか分らない。

このときには、分岐点 b と分岐点 c は情報集合 Information Set と言われる (図では点線で結ばれている)。

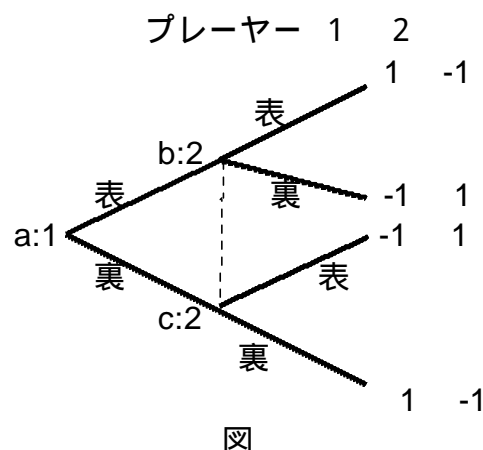


図 24.7

§ 24.8.定義：情報集合の性質

プレイヤー i の分岐点は、情報集合 (= プレイヤー i が区別できない分岐点の集合) に分割されるが、この情報集合は以下の 3 条件を満たす：

プレイヤー i の情報集合はプレイヤー i の分岐点のみを含む

すべての分岐点はただ 1 個の情報集合に含まれる。

同一情報集合のすべての分岐点で、同一の行動が可能である。

§ 24.9.定義：Information Partition

プレイヤー i の情報集合の集合を U_i とすると、 $U = [U_i]_{i \in N}$ は情報分割 Information Partition と言われる。

ある情報集合 $u \in U_i$ における行動の集合は $A(u)$ と示される。

§ 24.10.定義：同時的行動のゲーム

相手の行動が観察できないとすることによって、プレイヤーが同時的に行動するゲームも、展開型で表現できる。この場合には、プレイヤーの行動の順番は問題ではない。

§ 24.11.定義：展開型ゲーム

展開型のゲームは以下のような一覧表で完全に表される：

$$(I, (N_i)_{i \in N}, (A_i)_{i \in N}, (N_i)_{i \in N}, U, (A(u))_{u \in U}, r)$$

§ 24.12.定義：完全情報ゲームと不完全情報ゲーム

ゲーム $(I, (N_i)_{i \in I}, (A_i)_{i \in I}, (N_i)_{i \in I}, U, (A(u)_{u \in U}), r)$ は、すべての情報集合が 1 個の分岐点しか含まないときには、完全情報 Perfect Information ゲームと言われる。情報集合が複数の分岐点を含む場合には、不完全情報ゲーム Imperfect information game と呼ばれる。注意：完全情報の場合には、相手のすべての行動が観察でき、不完全情報ゲームでは、相手の行動が不明となる。

§ 24.13.定義：共通情報

『ある情報をすべてのプレーヤーが知っており、他のプレーヤーが知っていることも知っており、他のプレーヤーが知っていることを他のプレーヤーが知っていることも知っており、．．．．．』の条件が成立するときには、共通情報 common knowledgeと言われる。共通情報でない情報は個人的情報 Private Informationと言われる。

§ 24.14.定義：不完備情報ゲーム

ゲーム $(I, (N_i)_{i \in I}, (A_i)_{i \in I}, (N_i)_{i \in I}, U, (A(u)_{u \in U}), r)$ のすべての要素が共通情報である場合には、完備情報 Complete Information ゲームと言われる。いずれかの要素が共通情報でない場合には、不完備情報 Incomplete Information ゲームと呼ばれる。

例えば、相手のプレーヤーの利得関数に関する情報が不完全であれば、不完備情報ゲームとなる。

§ 24.15.定義：戦略 Strategy

ゲームにおける戦略 Strategy とは、行動せねばならないすべての分岐点での行動計画。

§ 24.16.定義：純粋戦略

プレーヤー i の純粋戦略とは、

関数 $s_i : U_i \rightarrow A_i$ with $s_i(u) \in A_i(u)$ for $u \in U_i$

である。純粋戦略組合せ s は

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_I)$$

と定義される。プレーヤー i のすべての可能な戦略の数を n_i とするとき、純粋戦略集合を

$$S_i = \{s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^{n_i}\}$$

と表す。また、ゲームに参加する I 人の純粋戦略集合あるいは I 次元純粋戦略空間 S を

$$S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_I$$

と定義する。

§ 24.17.定義：

純粋戦略組合せ s が与えられれば、ゲームが進むコースが決まり、全プレーヤーの利得も決まる。純粋戦略組合せ s のもとで到達される最終点を $n(s)$ と表し、プレーヤー i が純粋戦略組合せ s のもとで得る利得を $p_i(s)$ と表すと、定義により

$$p_i(s) = r_i(n(s))$$

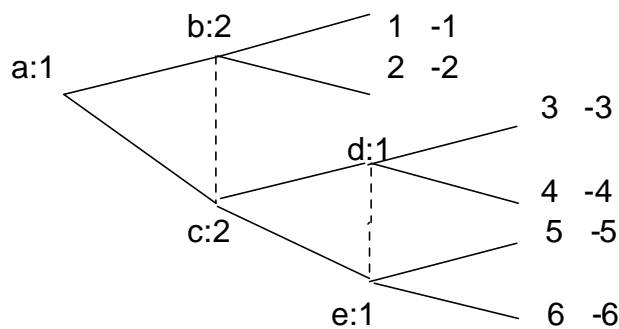
となる。

§ 24.18.例：

図 24.18 では、プレーヤー 1 は、分岐点 a と分岐点 d と分岐点 e で、行動を決定するから、純粋戦略集合は

$$S_1 = \{(a, d, e), (a, d, f), (a, e, f), (d, e, f)\}$$

となる。



図

§ 24.19.定義：混合戦略

純粋戦略集合 S_i の n 個の要素に対する確率分布の集合を M_i とする (S_i は無限個の要素を含んでいても OK であるが、ここでは $n =$ 有限個のケースで考える)。

混合戦略 m_i とは、純粋戦略集合に関する確率分布、すなわち、 $m_i \in M_i$ である。混合戦略の集合 $m = (m_1, m_2, \dots, m_I)$ を混合戦略組合せと言う。

注意：

$m_i(s_i^k)$ は、純粋戦略 s_i^k が確率分布 m_i で play されることを示すが、これはプレイヤーが行動前に、例えば、コインを投げたり、あみだ籤を作って実行するという意味である。言い換えれば、同じゲームを 100 回やれば、 $m_i(s_i^k) \times 100$ 回は戦略 s_i^k を選択することを示す。

§ 24.20.定義：単体

n 次元単体 Simplex あるいは n を以下のように定義する：

$$\{(\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n) \mid \mu^j \geq 0, \sum_{j=1}^n \mu^j = 1\} \quad \text{式 24.1}$$

純粋戦略集合 S_i における単体は (S_i) と表記される。したがって

$$M_i = (S_i)$$

注意：

式 24.1 は第 1 部 § 4.3 の凸結合の定義と同じである。線形空間の点に焦点を当てる場合には凸結合と言い、写像自体に注目するときには単体と言う。

§ 24.21.定義：期待利得

混合戦略ではゲームの結果も確率変数となるため、混合戦略組合せ m よりプレイヤー i が得る利得は、期待利得 Expected Payoff $P_i(m)$ となり、以下のように定義される：

$$P_i(m) = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_I} p_i(s_1, s_2, \dots, s_I) [m_1(s_1) \cdot m_2(s_2) \cdots m_I(s_I)]$$

§ 24.22.例：

図のゲームで、プレイヤー 1 と 2 の混合戦略が、

$$m_1 = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$$

$$m_2 = (0.7, 0.3)$$

とするとプレイヤー 1 の期待利得 P_1 は

$$P_1 = (0.2)(0.7)(1) + (0.3)(0.7)(1) + (0.4)(0.7)(3) + (0.1)(0.7)(4) \\ + (0.2)(0.3)(2) + (0.3)(0.3)(2) + (0.4)(0.3)(5) + (0.1)(0.3)(6)$$

注意：

$$S_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}, S_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$$

ゲーム理論では、一般的に、期待効用でなく期待利得が用いられる。したがって、利得は効用で表されているか、プレイヤーが危険中立的と仮定する必要がある。

§ 24.23.定義：行動戦略 Behavior Strategy

プレイヤーが、個々の情報集合で、行動を確率的に決める可能性もある(例えば、情報集合 u で、プレイヤー i が、行動 a を、確率 $b_i^u(a)$ で選択するケース)。そこで、情報集合 u における行動 $(A(u))$ に関する確率分布を $B(u)$ と定義する。

このときには、単体(凸結合)を用いれば、 $B(u) = \Delta(A(u))$ と表せる。さらに、すべての情報集合での行動確率分布 B は以下のように定義される：

$$B = \{B(u) \mid u \in \mathcal{U}\}$$

§ 24.24.定義：行動戦略組合せ

プレイヤー i の情報集合 u における確率分布 $B(u)$ の要素を b_i^u と定義すると、プレイヤー i の行動戦略を、以下のように定義できる：

$$b_i: \mathcal{U}_i \rightarrow \Delta(A_i)$$

行動戦略の集合 $b = (b_1, b_2, \dots, b_I)$ を行動戦略組合せと言う。

注意：

混合戦略では、純粋戦略集合のすべての要素に確率が与えられるが、行動戦略では、個々の情報集合での行動に確率が付与されるだけである。混合戦略と行動戦略は似ているが、異なる (§ 24.28.を参照)。

§ 24.25.定義：最終点の到達確率

行動戦略では、どの到達点の実現されるかは確定されないが、各到達点の実現する確率が計算できる。

行動分岐点 m を含む情報集合を $u(m)$ と表し、

行動分岐点 m で行動するプレイヤーを $i(m)$ と表記すると、

行動戦略組合せ b によって、最終点 n が実現される確率 $q_b(n)$ は以下のように計算される：

$$q_b(n) = [b_{i_1}^{u_1(n)}(a_1) \cdot b_{i_2}^{u_2(n)}(a_2) \cdot \dots \cdot b_{i_k}^{u_k(n)}(a_k)]$$

ただし、例えば、 $b_{i_1}^{u_1(n)}(a_1)$ の意味は、 $i_1(n)$ というプレイヤーが、自分の情報集合 $u_1(n)$ で、行動 a_1 に与える確率である。

例：図 24.25 の最終点 e が実現される確率は

$$q_b(e) = b_2^{b_2}(c) \cdot b_1^{a_1}(a)$$

§ 24.26.定義：期待利得

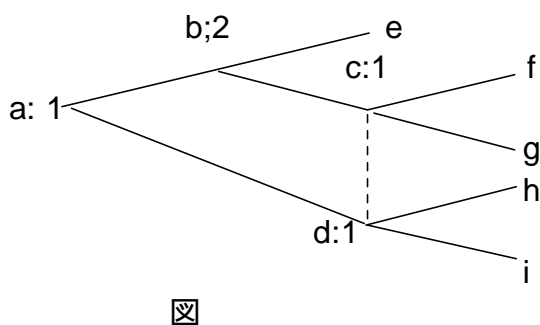
行動戦略組合せ b におけるプレイヤー i の期待利得 $R_i(b)$ は以下のように定義される：

$$R_i(b) = \sum_{n \in T(N)} r_i(n) \cdot q_b(n)$$

§ 24.27.定理：混合戦略と行動戦略

混合戦略組合せは必ずしも行動戦略組合せでは表現できない。

§ 24.28.説明：



図でプレイヤー1が混合戦略として、 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に確率0.5を付与し(その他には確率ゼロ)、プレイヤー2は純粋戦略 c を選択するものとする、最終点は $\text{Prob}(f)=0.5$ 、 $\text{Prob}(i)=0.5$ となるが、行動戦略では、最終点に、この確率組合せ U_i を付与することはできない。行動戦略で c と i にプラスの確率を与えれば、例えば最終点 h の確率もプラスとなる。

§ 24.29.定義：完全記憶

以下の条件を満たすとき、ゲームは完全記憶ゲームと呼ばれる：

n と m をある情報集合 $v = U_i$ の任意の2つの分岐点とする。もし、 n が情報集合 $u = U_i$ から k 回の行動によって到達しているなら、 m も、同じ情報集合 u から、同じ方法で脱出し、同じ情報集合 v に到達している(さもなければ記憶があれば識別できる)。すなわち

$$\begin{aligned} &= \pi^k(n) \text{ } u \text{ } h : \pi^h(m) \text{ } u \\ &= (\pi^{k-1}(n)) = (\pi^{h-1}(m)) \end{aligned}$$

§ 24.30.例：

図では、

$$(\pi^0(d)) = \pi^1(c) = (\pi^1(c))$$

となって、完全記憶ではない。

注意：プレイヤー1は自分が c を選択したことを記憶していない。

§ 24.31.定理：Kuhn の定理

完全記憶ゲームでは、すべての混合戦略組合せは行動戦略組合せによって表現される。すなわち、どのような混合戦略にも、すべての最終点で同じ確率を持つ行動戦略組合せが存在する。

第2節 Strategic Form あるいは Normal Form 戦略型ゲームあるいは正規型ゲーム

§ 24.32.定義：正規型ゲーム

利得関数を $p = (p_i)_{i \in I}$ と表示する。Strategic Form 戦略型あるいは Normal Form 正規型ゲームとは、

$$(I, (S_i)_{i \in I}, p)$$

が明らかにされているゲームである。

注意：正規形式の方がゲームの既述が簡単になる。言い換えれば、正規型では、ゲームの複雑な情報を表現できない。

§ 24.33.定義：利得行列

プレイヤーが2人($I = \{1,2\}$)であれば、ゲームは Payoff 利得行列によって示される。プレイヤー1が m 個の純粋戦略 $S_1 = \{s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^m\}$ を持ち、プレイヤー2が n 個の純粋戦略 $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, \dots, s_2^n\}$ を持つ場合には、Payoff matrix 利得行列は第6部になる

第6部：利得行列

	S_2^1	S_2^n
S_1^1	$p_1(s_1^1, s_2^1), p_2(s_1^1, s_2^1) \dots p_1(s_1^1, s_2^n), p_2(s_1^1, s_2^n)$		
S_1^2	$p_1(s_1^2, s_2^1), p_2(s_1^2, s_2^1) \dots p_1(s_1^2, s_2^n), p_2(s_1^2, s_2^n)$		
		
S_1^m	$p_1(s_1^m, s_2^1), p_2(s_1^m, s_2^1) \dots p_1(s_1^m, s_2^n), p_2(s_1^m, s_2^n)$		

§ 24.34.例：コイン裏表合わせゲーム

Matching Pennies の場合には、利得行列 Payoff Matrix は以下のように表示される：

		プレーヤー 2	
		表	裏
プレーヤー 1	表	1, -1	-1, 1
	裏	-1, 1	1, -1

§ 24.35.説明：

展開型ゲームは、ある 1 つの正規型ゲームで表現できるが、正規型ゲームは、一般に、複数の 展開型ゲームで表すことができる。

第 3 節 ドミナント戦略

§ 24.36.定義：ドミナント戦略

以下の条件を満たす s_i^* は Dominant Strategy ドミナント戦略(支配戦略)と呼ばれる：

$$s_i^* \geq s_i \text{ \& } s_{-i} \text{ : } p_i(s_i^*, s_{-i}) \geq p_i(s_i, s_{-i})$$

戦略組合せ $s_i^* = (s_1^*, \dots, s_I^*)$ は、ドミナント(支配)戦略均衡と言われる。

ただし、

$$s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_I) \\ s_{-i} = s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_{i-1} \quad s_{i+1} \quad \dots \quad s_I$$

§ 24.37.例：囚人ゲーム

		プレーヤー 2	
		黙秘	自白
プレーヤー 1	黙秘	1, 1	-1, 3
	自白	3, -1	0, 0

この囚人ゲームでは、自白がドミナント戦略となり戦略組合せ(自白, 自白)が、ドミナント戦略均衡となる。

§ 24.38.例：価格設定複占

2 企業(1 と 2) の需要関数を

$$q_1 = 10 - p_1 + 2 p_2 / p_1$$

$$q_2 = 20 - p_2 + p_1 / p_2$$

と想定し、2 企業とも費用がゼロで生産上限を 50 とすると、利得関数は

$$\pi_1 = 10 p_1 - p_1^2 + 2 p_2$$

$$\pi_2 = 20 p_2 - p_2^2 + p_1$$

となり、 $p_1 = 5$ と $p_2 = 10$ が最適な戦略となる。

このケースでは、最適な戦略は相手の戦略と関係なく決まるから、ドミナント戦略である。

§ 24.39.定義：Dominate

戦略 s_i^* は、以下の 2 条件を満たすとき、戦略 s_i を dominate するという：

$$s_i^* \geq s_i \text{ : } p_i(s_i^*, s_{-i}) \geq p_i(s_i, s_{-i})$$

少なくとも 1 つの s_{-i} s_{-i} について、不等号が成立する。

また、dominate されない戦略を undominated とする。

s が s' を dominate するときには 2 項関係 を用いて、 $s \succ s'$ と示す。

§ 24.40.定義：繰り返し支配均衡

正規型ゲームにおいて、Dominate される戦略をゲーム利得表から排除してできるゲームに、ドミナント戦略均衡があれば、これは 繰り返し支配均衡 Iterated Dominance

Equilibrium or Dominance solvable という。

§ 24.41.例：

以下のような 2 人ゲームを考える。

		プレイヤー 2			
		S T	M H	M L	S B
プレイヤー 1	T	4, 2	3, 3	1, 2	7, 2
	M	3, 8	2, 4	0, 2	5, 5
	B	4, 1	4, 2	0, 1	5, 0

このときには、

T M、MH ML、ST SB

プレイヤーが、これらの dominated 戦略を選択することはないから、これらをゲームの利得表から排除すると、このゲームは以下ようになる：

		プレイヤー 2	
		S T	M H
プレイヤー 1	T	4, 2	3, 3
	B	4, 1	4, 2

このゲームでは、B T、MH ST となって、戦略組合せ (B, MH) が iterated dominance equilibrium 繰返し支配均衡となる。

第 2 5 章. ナッシュ均衡と完全均衡

第 1 節 ナッシュ均衡

§ 25.1. 定義：ナッシュ均衡

戦略組合せ s^* は以下の条件を満たすときナッシュ均衡という：

$$i \in I \text{ \& } s_i \in S_i : p_i(s^*) \geq p_i(s_i, s_{-i}^*)$$

§ 25.2. 例：

The Battle of Sexes 性の戦い (M 男：W 女)

		プレイヤー M			
		T = Theater		B = Boxing	
プレイヤー W	T	2	1	0.5	0.5
	B	0	0	1	2

ナッシュ均衡は (T, T) と (B, B) の 2 つであり、どちらが実現されるか判定できない。

注意：ミニマックス原理では、W は T で、M は B を選択する。

じゃんけんゲームには純粋戦略ではナッシュ均衡は存在しない

		プレイヤー 2					
		ぐー		ちょき		パー	
プレイヤー 1	ぐー	0	0	1	-1	-1	1
	ちょき	-1	1	0	0	1	-1
	パー	1	-1	-1	1	0	0

§ 25.3. 定理：ミニマックス戦略

すべてのナッシュ均衡 s^* は以下の条件を満たす：

$$p_i(s^*) = \max_{s_i} \min_{s_{-i}} p_i(s_i, s_{-i})$$

§ 25.4.定義：最適反応関数

プレイヤー i の最適反応関数あるいは最適反応写像(あるいは最適反応コレスポネンス Best response mapping/best reply mapping/reaction correspondence) r_i とは、個々の戦略組合せ $s \in S$ に対してプレイヤー i にとって最適な戦略を関連付ける写像である。正確には以下のように定義される：

プレイヤー i の戦略空間 S_i の topological space を $P(S_i)$ と表し、コレスポネンスあるいは写像 $r_i : S \rightarrow P(S_i)$ を

$$r_i(s) = \operatorname{argmax}_{s_i \in S_i} p_i(s_i, s_{-i})$$

を定義すると、最適反応写像 $r : S \rightarrow P(S)$ は

$$r(s) = (r_1(s), r_2(s), \dots, r_I(s))$$

と定義される。ただし $P(S)$ は戦略空間 S の topological space。

注意：

写像を $r_i : S_{-i} \rightarrow P(S_i)$ と定義するより、上記定義の方が表示が簡単化される。
この定義の「戦略空間」は混合戦略空間も含む。

§ 25.5.定理：最適反応関数とナッシュ均衡

戦略組合せ $s^* \in S$ はナッシュ均衡

$s^* = r(s^*)$ すなわち、すべての戦略 s_i^* が最適反応となっている

§ 25.6.例：価格設定複占

2 企業(1 と 2) の需要関数を

$$q_1 = 10 - p_1 + p_2$$

$$q_2 = 20 - p_2 + 2p_1$$

と想定し、生産上限を共に 50 とすると、
利得関数は

$$\pi_1 = 10p_1 - p_1^2 + p_2p_1$$

$$\pi_2 = 20p_2 - p_2^2 + 2p_1p_2$$

となり、以下のように正規型ゲーム
が定義される：

プレイヤー集合 $I = \{1, 2\}$

戦略集合 $S_1 = [0, 50]$ 、 $S_2 = [0, 50]$

利得関数

$$\pi_1 = 10p_1 - p_1^2 + p_2p_1$$

$$\pi_2 = 20p_2 - p_2^2 + 2p_1p_2$$

このとき、最適反応関数 $r_j(p_1, p_2)$ は

$$r_j / p_j = 0 \quad \text{for } j=1, 2$$

より得られる。この場合には、

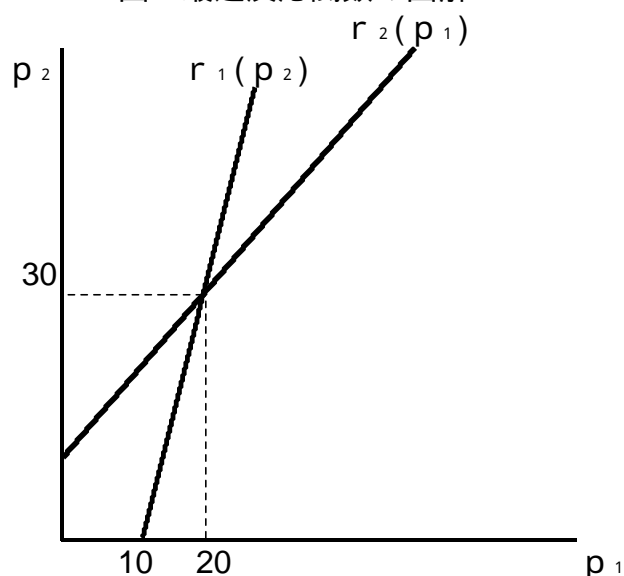
$$p_1 = 5 + p_2/2$$

$$p_2 = 10 + p_1$$

が最適反応関数となる。

これら 2 式を解いて得られる $p_1 = 20$ と $p_2 = 30$ がナッシュ均衡となる。

図 最適反応関数の図解



§ 25.7.例：Matching Pennies の例で混合戦略均衡の解き方を説明

Matching Pennies ゲームの利得行列は以下のように表示される：

表 1		プレイヤー 2	
		表	裏
プレイヤー 1	表	1, -1	-1, 1
	裏	-1, 1	1, -1

表 = 0, 裏 = 1 と表示すると、プレイヤー 1 の期待利得関数は

$$\begin{aligned}
 P_1((m_1(0), m_1(1)), (m_2(0), m_2(1))) &= p_1(0,0)m_1(0)m_2(0) + p_1(0,1)m_1(0)m_2(1) \\
 &\quad + p_1(1,0)m_1(1)m_2(0) + p_1(1,1)m_1(1)m_2(1) \\
 &= [p_1(0,0) \cdot m_2(0) + p_1(0,1) \cdot m_2(1)] \cdot m_1(0) \\
 &\quad + [p_1(1,0) \cdot m_2(0) + p_1(1,1) \cdot m_2(1)] \cdot m_1(1) \\
 &= [m_2(0) - m_2(1)] \cdot m_1(0) + [m_2(1) - m_2(0)] \cdot m_1(1) \quad \text{数字を代入} \\
 &= [m_2(1) - m_2(0)] \cdot [m_1(1) - m_1(0)] \\
 &= (2m_2(1) - 1)(2m_1(1) - 1) \quad m_i(0) + m_i(1) = 1
 \end{aligned}$$

利得を最大にするのが最適反応であるから、たとえば、 $m_2(1) > m_2(0)$ であれば、 $m_1(1) = 1$ が最適反応戦略となることが分かる。同様にして

$$P_2 = (2m_1(1) - 1)(2m_2(1) - 1)$$

これらの 2 式から、図のような最適反応関数が描かれる。したがって、 $(m_1^*, m_2^*) = ((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$ がナッシュ均衡。

§ 25.8. 定理：ナッシュ均衡の存在

正規型ゲーム $(I, (S_i)_{i \in I}, p)$ は以下の条件を満たすときナッシュ均衡を持つ：

純粋戦略集合 S_i は、空でなく、コンパクトで、convex な、ユークリッド空間 (n 次元実数値空間) の部分集合。

利得関数 p_i は $j : s_j$ について連続的であり、かつ、 s_i について quasi-concave。

§ 25.9. 例：Matching Pennies での純粋戦略均衡の存在

プレイヤー i の戦略集合は $S_i = \{0, 1\}$ となっており、純粋戦略集合はコンパクトであるが convex でない。したがって、純粋戦略では、ナッシュ均衡の存在は保証されない。

§ 25.10. 例：混合戦略の場合

プレイヤー i の混合戦略 M_i は

$$M_i = \{(m_i(0), m_i(1)) : m_i(0) \geq 0, m_i(1) \geq 0, m_i(0) + m_i(1) = 1\}$$

これは、 M_i が、傾きが -1 の直線の第 1 象限の部分の意味するから、コンパクトかつコンベックス。

利得関数は期待利得関数

$$\begin{aligned}
 P_1((m_1(0), m_1(1)), (m_2(0), m_2(1))) &= p_1(0,0)m_1(0)m_2(0) + p_1(0,1)m_1(0)m_2(1) \\
 &\quad + p_1(1,0)m_1(1)m_2(0) + p_1(1,1)m_1(1)m_2(1)
 \end{aligned}$$

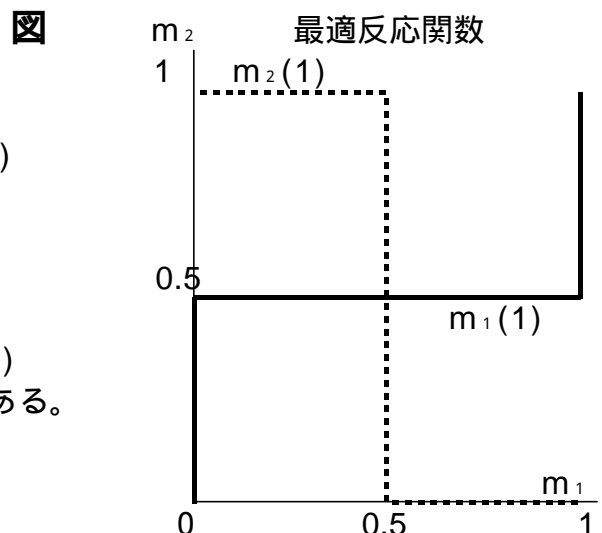
この関数は連続的である。また、

$$\begin{aligned}
 P_1((m_1(0), m_1(1)), (m_2(0), m_2(1))) &= [p_1(0,0) \cdot m_2(0) + p_1(0,1) \cdot m_2(1)] \cdot m_1(0) \\
 &\quad + [p_1(1,0) \cdot m_2(0) + p_1(1,1) \cdot m_2(1)] \cdot m_1(1)
 \end{aligned}$$

となり、 P_1 は m_1 の線形関数となって convex である。

したがって、Matching Pennies の場合でも

混合戦略でナッシュ均衡が存在する。



§ 25.11. 定理：ナッシュ均衡の存在 Glicksberg

正規型ゲーム $(I, (S_i)_{i \in I}, p)$ は以下の条件を満たすとき、混合戦略のナッシュ均衡を持つ：

純粋戦略集合 S_i は、空でなく、コンパクトな、ユークリッド空間の部分集合。

利得関数 p_i は $j : s_j$ について連続的。

§ 25.12.定義：対称ゲーム

すべての $i, j \in I$ について、以下の条件を満たすとき、ゲームは Symmetric と呼ばれる：

$$S_i = S_j$$

$$p_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_I) \\ = p_j(s_1, \dots, s_{i-1}, s_j, s_{i+1}, \dots, s_{j-1}, s_i, s_{j+1}, \dots, s_I)$$

注意：

条件は、 i と j の戦略を取り替えれば、 j の利得は i の利得に等しくなることを示す。

§ 25.13.定理：対称ゲームに関する定理

§ 25.11.の条件が成立すれば、Symmetric ゲームは Symmetric なナッシュ均衡組合せ s^* を持ち、 $i, j \in I : s_i^* = s_j^*$ となる。

§ 25.14.例：

Symmetric なクールノー寡占は、生産量が限界があり、利潤関数が quasi-concave で連続的であれば、すべての企業の生産量が等しいナッシュ均衡が存在する。

第2節 ナッシュ均衡のユニーク性

§ 25.15.説明：

§ 25.2.の Battle of Sexes ではナッシュ均衡が2つ存在した。ナッシュ均衡がユニークであるためには条件が必要である。

最適反応関数 $r(s) = (r_1(s), r_2(s), \dots, r_I(s))$ を2回連続微分可能であり、また $S \subset R^I$ とする。新しい関数 $g : S \rightarrow S$ を、 $g(s) = r(s) - s$ で定義すると、ナッシュ均衡は $g(s^*) = 0$ と表せる。

ナッシュ均衡がユニークであるためには、関数 $g(\cdot)$ が one-to-one であればよい。

§ 25.16.定義：首座小行列式

$A = [a_{ij}]$ を $n \times n$ 行列とする：

奇数階数の首座小行列式がすべてマイナス、偶数階数の首座小行列式がすべてプラスのときには、NP行列(第3部 § 3.18 では Hicksian)

奇数階数の首座小行列式がすべてプラスで、偶数階数の首座小行列式がすべてマイナスのときには、PN行列

首座小行列式がすべてプラスのときには、P行列

首座小行列式がすべてマイナスのときには、N行列

§ 25.17.定理：Nikaido, Convex Structure and Economic Theory, 1968, Chap.7

関数 $f : R^n \rightarrow R^n$ が、 $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ で定義され、2回連続微分可能とする。さらに R^n の部分集合(region) P は長方形で、 $f(x)$ のヤコビアン $F(x)$ がすべての $x \in P$ において

NP行列、PN行列、P行列、N行列

のいずれかであれば、関数 $f(x)$ はすべての $x \in P$ について one-to-one となる。

§ 25.18.定理：ユニーク性

最適反応関数 $r(s)$ が2回連続微分可能で、ナッシュ均衡が存在するものとする。このとき、 R^n の長方形の部分集合(region)のすべての点で、 $r(s)$ のヤコビアン $R(s)$ が

NP行列、PN行列、P行列、N行列

のいずれかであれば、ナッシュ均衡はユニークである。

§ 25.19.定理：ナッシュ均衡のユニーク性

関数 $r(s)$ のヤコビアンが、 $N \times P$ 行列か $P \times N$ 行列か P 行列か N 行列であれば、ナッシュ均衡は、もし存在すれば、ユニークとなる。

§ 25.20.例：価格設定複占

2 企業 (1 と 2) の需要関数を

$$q_1 = a_1 - p_1 + b_1 p_2$$

$$q_2 = a_2 - p_2 + b_2 p_1$$

と想定し、2 企業とも費用がゼロで生産上限を q_{\max} とすると、利得関数は

$$1 \quad a_1 p_1 - p_1^2 + b_1 p_2 p_1$$

$$2 \quad a_2 p_2 - p_2^2 + b_2 p_1 p_2$$

となり、最適反応関数を陰関数で表せば

$$a_1 - 2p_1 + b_1 p_2 = 0$$

$$a_2 - 2p_2 + b_2 p_1 = 0$$

したがって、首座小行列は

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & \text{と} & 2 & \text{と} & H & \left| \begin{array}{cc} 2 & b_1 \\ b_2 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

となり、 $H = 0$ すなわち $b_1 b_2 = 4$ が成立しないかぎり、ナッシュ均衡はユニークである。

§ 25.21.定義：縮小写像

以下の条件を満たす関数、写像 $r(s)$ は縮小写像と呼ばれる：

$$s, s' \in S \quad [\quad R : 0 < \quad < 1] :$$

$$d(r(s), r(s')) \leq d(s, s')$$

ただし、 $d(\cdot)$ は距離関数 metric あるいは distance (第 1 部 § 2.5 参照)。

§ 25.22.定理：縮小写像のユニークな不動点

最適反応関数 $r(s)$ が縮小写像であれば、ユニークな不動点 $s^* = r(s^*)$ 、すなわちユニークなナッシュ均衡が存在する。

§ 25.23.例：

§ 25.20.の例で考える。 $x, y \in R^n$ とするとき、距離関数を

$$d(x, y) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i - y_i|$$

と定義すると、最適反応関数は

$$p_1 = a_1/2 + b_1 p_2/2$$

$$p_2 = a_2/2 + b_2 p_1/2$$

であるから

$$d(r(p_1, p_2), r(p_1', p_2'))$$

$$= \max\{ |r_1(p_1, p_2) - r_1(p_1', p_2')|, |r_2(p_1, p_2) - r_2(p_1', p_2')| \}$$

$$= \max\{ |b_1/2 \cdot (p_2 - p_2')|, |b_2/2 \cdot (p_1 - p_1')| \}$$

$$\max[b_1/2, b_2/2] \cdot \max\{ |p_2 - p_2'|, |p_1 - p_1'| \}$$

したがって、 b_1 も b_2 も 2 より小さければ、縮小写像となって、ユニークなナッシュ均衡が存在する。

第 3 節 完全均衡 Perfect Equilibrium

§ 25.24.説明：人間はミスをするし、気まぐれである

以下の正規型ゲームではナッシュ均衡は (T, L) と (B, R) の 2 つ存在する：

上下 (T B) 左右 (L R) ゲーム	プレイヤー 2
-----------------------	---------

		L	R
プレイヤー 1	T	1, 1	0, 0
	B	0, 0	0, 0

しかし、もしプレイヤー 1 が『プレイヤー 2 が、(なんらかの理由で) L の行動をとる確率がある』と考えれば、T と B の期待利得は

$$E[T] = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 > 0$$

$$E[B] = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 0 = 0$$

となるから、たとえ p がどれほど小さくても、T の期待値が B より大きい。同様にして、プレイヤー 1 が T の行動をとる確率が少しでもあれば、プレイヤー 2 には L が最適行動となる。

ところが、人間はミスもするし、気まぐれでもあるから、常に最適な行動をするとはかぎらない。

§ 25.25.定義：正規型ゲーム

正規型ゲーム $(I, (M_i)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I})$ を定義する。ただし、 M_i はプレイヤー i の混合戦略の集合、 P_i は期待利得関数である。

§ 25.26.定義： Γ の定義

プレイヤーが I 人おり、プレイヤー i の n_i 個の純粋戦略に対して、以下の確率を定義する：

$$(p_i^1, \dots, p_i^{n_i})$$

ただし、

$$p_i^k \geq 0 \quad (k=1, \dots, n_i)$$

また、

$$p_i^k > 0 \quad \text{かつ} \quad \sum_{j=1}^{n_i} p_i^j = 1$$

§ 25.27.定義： Γ - 乖離混合戦略

Γ - 乖離混合戦略 Γ -perturbed mixed strategy の集合を以下のように定義する：

$$M_i = \{m_i \in M_i : m_i^k > 0 \text{ for } k=1, \dots, n_i\}$$

これを使って、 Γ - 乖離混合戦略ゲームを以下のように定義する：

$$(\Gamma, (M_i)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I})$$

注意： Γ - 乖離混合戦略ゲームでは、すべてのプレイヤーは、すべての純粋戦略 s_i^k に、最低でも p_i^k の(プラスの)確率を付与する という原則に従う。

§ 25.28.例：上下左右ゲーム(続き)

プレイヤー 1 と 2 が T, B, R, L に付与する確率を $m_1^T, m_1^B, m_2^R, m_2^L$ とすると、

Γ - 乖離混合戦略は、たとえば、以下のように定義される：

$$M_1 = \{(m_1^T, m_1^B) \in \mathbb{R}^2 : m_1^T > 0.05, m_1^B > 0.1, m_1^T + m_1^B = 1\}$$

$$M_2 = \{(m_2^R, m_2^L) \in \mathbb{R}^2 : m_2^R > 0.01, m_2^L > 0.2, m_2^R + m_2^L = 1\}$$

§ 25.29.定義：Selten の完全均衡

ナッシュ均衡 m^* M は以下の条件を満たすとき (trembling-hand) 完全均衡と言われる：

Γ - 乖離混合戦略ゲーム (Γ) のナッシュ均衡を $m^*(\Gamma)$ とし、

$$0 \text{ のとき } m^*(\Gamma) = m^*$$

注意：

列 $\{m^*(\Gamma)\}$ はすべての Γ についてナッシュ均衡

§ 25.30.例： Γ - 型上下左右ゲーム

2 人のプレーヤーが混合戦略 $m_1^T, m_1^B, m_2^R, m_2^L$ を取るときの期待利得は

$$P_1(m_1^T, m_1^B, m_2^R, m_2^L) = m_1^T \cdot m_2^L$$

$$P_2(m_1^T, m_1^B, m_2^R, m_2^L) = m_1^T \cdot m_2^L$$

注意：

純粋戦略組合せ (T, L) のときには利得は 1 で、それ以外の組合せは、利得はゼロ。

- 乖離原則によって、

$$m_1^B = 1 - m_1^T \quad \text{および} \quad m_2^R = 1 - m_2^L$$

となる。よって、プレーヤー 1 の最適戦略は

$$r_1(m_1^T, m_1^B) = (1 - m_1^B, m_1^B) \quad \text{式 25.1}$$

と言う確率を T と B に配分することで、プレーヤー 2 の最適戦略は

$$r_2(m_2^L, m_2^R) = (1 - m_2^R, m_2^R) \quad \text{式 25.2}$$

と言う確率を R と L に配分することである。

§ 25.31.説明：完全均衡の確認

> 0 であるかぎり、最適反応関数は式 25.1 および式 25.2 で表される。

> 0 であるかぎり、

$$(m_1^*(), m_2^*()) = (1 - m_1^B, m_1^B, 1 - m_2^R, m_2^R)$$

は、() のユニークなナッシュ均衡となる。

ナッシュ均衡 $(m_1^*(), m_2^*()) = (1 - m_1^B, m_1^B, 1 - m_2^R, m_2^R)$ は、0 につれて、 $(m_1^*, m_2^*) = (1, 0, 1, 0)$ に収束する。

ナッシュ均衡 (B, R) は - 乖離混合戦略ゲームで、実現することはできない。

§ 25.32.定理：

純粋戦略数が有限な、すべての正規型ゲームは、少なくとも 1 個の完全均衡を持つ。

§ 25.33.定理：

すべての完全均衡は undominated である。

§ 25.34.定理：

2 人ゲームでは、

完全均衡 undominated ナッシュ均衡

第 2 6 章. 不完備情報ゲームとベイズ・ナッシュ均衡

第 1 節 不完備情報ゲーム Games with Incomplete Information

§ 26.1.例：

参入ゲーム		既存企業	
		受入れ a	戦う f
参入企業	参入 e	1, 1	-1, k
	参入しない ne	0, 3	0, 3

パラメータ k は、既存企業のタイプ、例えば 高コストタイプか低コストタイプか に依存するが、参入企業は既存企業のタイプは分からず、k については完全な情報を持たない。

§ 26.2.例：不完備情報=価格設定複占ゲーム

2 企業 (1 と 2) の需要関数を

$$q_1(p_1, p_2) = \max\{0, a - p_1 + 0.5 p_2 / p_1\}$$

$$q_2(p_1, p_2) = \max\{0, b - p_2 + 0.5 p_1 / p_2\}$$

と想定し、2 企業とも費用がゼロとすると、利得関数は

$$_1(p_1, p_2) = [a - p_1 + 0.5 p_2 / p_1] p_1$$

$$_2(p_1, p_2) = [b - p_2 + 0.5 p_1] p_2$$

ただし、プレイヤー 1 は b を知らず、プレイヤー 2 は a を知らない。パラメータ a, b は、企業のタイプ、例えば 高需要タイプか低需要タイプか に依存するが、企業はライバル企業のタイプは分からず、プレイヤー 1 は b の、プレイヤー 2 は a の完全な情報を持たない。

§ 26.3.定義：

T_i プレイヤー i のタイプの集合、たとえば、 $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ir_i}$

μ 各プレイヤーのタイプに関する確率分布すなわち、

$T_1 \times T_2 \times \dots \times T_I$ 空間で定義された確率分布とする。

注意：

タイプの集合 T_i の要素が有限個であれば、 $\mu(t)$ は、 I 人のプレイヤーのタイプの組合せ $t = (t_1, t_2, \dots, t_I)$ に関する確率分布となる。

利得関数はタイプにも依存するから、 $p_i(s, t)$ と表される。

プレイヤーは自分のタイプは知っているが、ライバルのタイプについては、確率分布しか分からないで、行動する。

§ 26.4.定義：

不完備情報ゲームは以下のように定義される：

$$(I, (S_i)_{i=1}^I, (p_i(s, t))_{i=1}^I, (T_i)_{i=1}^I, \mu)$$

§ 26.5.例：不完備情報価格設定複占ゲーム(続き)

価格設定複占ゲームで、パラメータ a は 2 つのタイプ、すなわち a_H か a_L とし、 b は b_H か b_L とする。また、 μ は以下のように定義されるものとする：

$$\mu(a_H, b_H) = 0.5, \mu(a_H, b_L) = 0.125,$$

$$\mu(a_L, b_H) = 0.125, \mu(a_L, b_L) = 0.25$$

したがって、 $T_1 = \{a_H, a_L\}$ 、 $T_2 = \{b_H, b_L\}$ で、戦略集合は $S_1 = S_2 =$ となる。また t

$(a_i, b_j) \in T_1 \times T_2, s = (p_1, p_2) \in S_1 \times S_2$ と定義すると、利潤は

$$_1(s, t) = [a_i - p_1 + 0.5 p_2 / p_1] p_1$$

$$_2(s, t) = [b_j - p_2 + 0.5 p_1] p_2$$

であるから、ゲームは

$$(\{1, 2\}, (S_1, S_2), (_1(s, t), _2(s, t)), (T_1, T_2), \mu)$$

と表される。

第 2 節 ベイズ決定理論 Bayesian Decision Theory

§ 26.6.定義：

ベイズ決定理論は、意志決定者のある行動の結果が、意志決定者の行動だけでなく、情報が不完全な外生的状況にも依存する場合に利用できる。例えば、ある人が傘を携帯するという意志決定によって得られる効用は、雨が降るかどうかにも依存する。

§ 26.7.例：

例の想定

今日が晴れを H 、雨を L 、昨日が晴れを w_H 、雨を w_L とし、以下のような確率分布を想定する：

$$\mu(H, w_H) = 0.6, \mu(H, w_L) = 0.1,$$

$$\mu(L, w_H) = 0.1, \mu(L, w_L) = 0.2$$

効用を以下のように定義する：

傘無ケース { 晴れ = 10、雨 = -10 }、傘有ケース { 晴 = 2、雨 = 4 }

確率の計算方法

今日の天気(晴雨)の確率は、普通に計算すれば

$$P(H) \text{ 今日晴} = P(H, W_H) + P(H, W_L) = 0.6 + 0.1 = 0.7$$

$$P(L) \text{ 今日雨} = P(L, W_H) + P(L, W_L) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

しかし、ベイズ決定理論では、昨日の天気(晴れ W_H)というシグナル情報を利用する：

$$P(H|W_H) \text{ 今日晴確率} = P(H, W_H) / [P(H, W_H) + P(L, W_H)] = 0.6 / 0.7 = 0.86$$

$$P(L|W_H) \text{ 今日雨確率} = P(L, W_H) / [P(H, W_H) + P(L, W_H)] = 0.1 / 0.7 = 0.14$$

ベイズ決定関数 Bayesian decision function

$$\text{期待効用(傘有)} = 2 \cdot 0.86 + 4 \cdot 0.14 = 2.28$$

$$\text{期待効用(傘無)} = 10 \cdot 0.86 + (-10) \cdot 0.14 = 7.2$$

となって、傘を持って行かない。

§ 26.8.定義：ベイズ定理/ベイズ法則

選択できる行動を a 、その集合を A (例：傘有と傘無) とし、外生的状況を w 、その集合を W (例：晴と雨) とし、外生的状況が w のときに、行動 a を取ったときの期待効用を

$$u(a, w), u: A \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

と定義する。

外生的状況 w と相関関係があるシグナル情報 W が存在すると仮定し、 w と W の共同確率分布が $\mu(w, W)$ で与えられていれば、 w が起こる確率は、一般的には

$$P(w) = \sum_{W \in W} \mu(w, W)$$

で与えられる。しかし、シグナルとなる情報 W が入手できるとすれば、

$$P(W|w) = \mu(w, W) / P(w) \quad \text{式 26.1}$$

となる。

注意：式 26.1 はベイズの定理あるいはベイズの規則と呼ばれる。

§ 26.9.定義：ベイズ決定関数

ベイズ決定理論では、行動 a の期待効用の計算に式 26.1 を用いる：

$$u(a, w) \cdot P(W|w)$$

最適行動はシグナル w に依存するから、関数 $a(w)$ 、 $a: W \rightarrow A$ が定義できる。これをベイズ決定関数 Bayesian Decision function と呼ぶ。これは行動の signal-contingent plan と呼べる。

§ 26.10.例：不完備情報価格設定複占ゲーム(続き)

企業のタイプを決めるパラメータである a には 2 つの可能性が存在ものとする。すなわち a_H か a_L とし、 b は b_H か b_L とする。また、 μ は以下のように定義されるものとする：

$$\mu(a_H, b_H) = 0.5, \mu(a_H, b_L) = \mu(a_L, b_H) = 0.125, \mu(a_L, b_L) = 0.25$$

このときには、プレーヤー 1 は自分が a_H であることを知っていれば

$$P(b_H|a_H) = \mu(a_H, b_H) / [\mu(a_H, b_H) + \mu(a_H, b_L)] = 0.5 / 0.625 = 0.8$$

$$P(b_L|a_H) = \mu(a_H, b_L) / [\mu(a_H, b_H) + \mu(a_H, b_L)] = 0.125 / 0.625 = 0.2$$

と計算できる。自分が a_H であるというシグナル情報を利用しなければ

$$P(b_H) = \mu(a_H, b_H) + \mu(a_L, b_H) = 0.5 + 0.125 = 0.625$$

$$P(b_L) = \mu(a_H, b_L) + \mu(a_L, b_L) = 0.125 + 0.25 = 0.375$$

であるから、シグナル情報によって、ライバルが b_H であるという確信が高まる。

第3節 ベイズ・ナッシュ均衡

§ 26.11.定義：

プレーヤー i のタイプを t_i 、その集合を T_i 、純粋戦略を s_i 、その集合を S_i とし、ベイズ決定関数を $s_i(t_i)$ 、 $s_i: T_i \rightarrow S_i$ とする。

ライバルのタイプ組合せを t_{-i} 、その集合を T_{-i} と表し、シグナル情報 t_i のときの(ベイズ)確率を

$$(t_{-i} | t_i)$$

と表す。また、ライバルのベイズ決定関数を

$$s_{-i}(t_{-i}) = (s_1(t_1), \dots, s_{i-1}(t_{i-1}), s_{i+1}(t_{i+1}), \dots, s_I(t_I))$$

と表し、プレイヤー i のタイプが t_i で戦略が s_i 、ライバルのタイプが t_{-i} で戦略が s_{-i} のときの利得関数を

$$p_i(s_i, s_{-i}, t_i, t_{-i})$$

と表す。

§ 26.12.定義：ベイズ・ナッシュ均衡

ベイズ・ナッシュ均衡は、以下の条件を満たすようなベイズ決定関数の組合せ (s_1^*, \dots, s_I^*) である：

$$i \in I, t_i \in T_i:$$

$$t_{-i} \in T_{-i} \quad p_i(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i}) \geq (t_{-i} | t_i)$$

$$t_{-i} \in T_{-i} \quad p_i(s_i, s_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i}) \geq (t_{-i} | t_i)$$

が、すべての $s_i \in S_i$ について成立している。

§ 26.13.説明：

この定義の意味は、以下のようなものである：ライバルプレイヤーに関する情報が不完備である(例えば、どんなタイプが不明な)とき、シグナルを考慮してベイズ的に改訂した確率予想を用いて期待利得を計算し、その期待利得で比較したときに、全タイプのプレイヤーの戦略が最適反応となる戦略組合せを、ベイズ・ナッシュ均衡としている。

ただし、これが可能であるためには、シグナル情報(例えば、自分のタイプ)とライバル情報(例えば、ライバルのタイプ)とが相関している必要がある。

注意：確率予想は beliefs の訳であるが、これは普通「信念」と訳される。

§ 26.14.例：ベイズ・ナッシュ均衡 単純なケース

モデル：参入企業, 既存企業の利益組合せ表

既存企業には、HとLの2タイプ。Hは強く、Lは弱い。

不完備情報参入ゲーム

			既存企業	
確率 =			受入れ a	戦う f
参入企業	参入 e		1, 1	-1, k_H
	参入しない ne		0, 3	0, 3
			既存企業	
確率 = 1 -			受入れ a	戦う f
参入企業	参入 e		1, 1	-1, k_L
	参入しない ne		0, 3	0, 3

注意：

k_H は、既存企業が強い場合の既存企業の利益で、 k_L は既存企業が弱い場合の利益。

ベイズ決定関数・確率・期待利得

この例では、

参入企業のタイプは1種類でベイズ決定関数は、 $s_e(t)$

既存企業のベイズ決定関数は、タイプ2種類で

$$(s_M(k_H), s_M(k_L))$$

で、2タイプの企業が選択できる組合せは、 $(a, a), (a, f), (f, a), (f, f)$ である。

参入企業が予想するベイズ確率は、

$$(k_H|t) = \quad, \quad (k_L|t) = 1 -$$

で(既存企業のタイプが1つのため、ベイズ定理を使っていない)、期待利得は

$$p_E(s_E(t), s_M(k_H), t, k_H) (k_H|t) + \\ p_E(s_E(t), s_M(k_L), t, k_L) (k_L|t)$$

参入企業の期待利得表

2タイプの既存企業の4つの行動の組合せに対する参入企業の期待利得は以下のように表示される。

		参入企業の期待利得		
		参入企業の行動		
		$s_M(k_H), s_M(k_L)$		
			e	n e
2タイプの 既存企業の 行動の組合せ	a	a	$1 + 1(1 -) = 1$	0
	a	f	$1 + (-1)(1 -) = 2 - 1$	0
	f	a	$-1 + 1(1 -) = 1 - 2$	0
	f	f	$-1 + (-1)(1 -) = -1$	0

参入企業のタイプ別 Type-contingent 最適反応

2タイプの既存企業の行動が

(a, a)であれば、参入企業の最適反応は e 期待利得 = 1

(f, f)であれば、参入企業の最適反応は n e 期待利得 = 0

(a, f)、(f, a)のケースは確率 に依存するから、0.75 とすると

(a, f)であれば、参入企業の最適反応は e 期待利得 = 0.5

(f, a)であれば、参入企業の最適反応は n e 期待利得 = 0

注意： < 0.5 であれば、最適反応は変わる。例えば、 = 0.25 なら

(a, f)であれば、参入企業の最適反応は n e 期待利得 = 0

(f, a)であれば、参入企業の最適反応は e 期待利得 = 0.5

既存企業の利得表。ただし、 $k_H = 2$ 、 $k_L = -1$ とする。

		$s_M(k_H)$		$s_M(k_L)$	
		a	f	a	f
$s_E(t)$	e	1	2	1	-1
	n e	3	3	3	3

既存企業の最適反応

タイプHの既存企業の最適反応は f で、タイプLの最適反応は a である (dominant strategy となる)。

ベイズ・ナッシュ均衡

= 0.75 の場合には、唯一のベイズ・ナッシュ均衡は

$$(s_E^*, s_M^*) = ((n e), (f, a)) \quad \text{式 26.2}$$

となる。

注意：

既存企業の最適反応は(参入企業の行動に関係なく)タイプHが f で、タイプLが a。

既存企業の行動が (f, a) のときの、参入企業の最適反応は n e。

したがって、式 26.2 では、いずれも最適反応となっている。

< 0.5 であれば

$$(s_E^*, s_M^*) = ((e), (f, a))$$

がベイズ・ナッシュ均衡。

§ 26.15.例：ベイズ・ナッシュ均衡 不完備情報=価格設定複占ゲーム
モデル

2企業(1と2)の需要関数を

$$q_1(p_1, p_2) = \max\{0, a - p_1 + 0.5 \cdot p_2 / p_1\}$$

$$q_2(p_1, p_2) = \max\{0, b - p_2 + 0.5 \cdot p_1\}$$

と想定し、2企業とも費用がゼロとする。パラメータ a は2つのタイプ、すなわち a_H が a_L とし、 b は b_H が b_L とする。また、 μ は以下のように定義される：

$$\mu(a_H, b_H) = 0.5, \mu(a_H, b_L) = 0.125, \mu(a_L, b_H) = 0.125, \mu(a_L, b_L) = 0.25$$

利潤は

$$\begin{aligned} \pi_1(p_1, p_2, a_i) &= [a_i - p_1 + 0.5 \cdot p_2 / p_1] p_1 \\ \pi_2(p_1, p_2, b_j) &= [b_j - p_2 + 0.5 \cdot p_1] p_2 \end{aligned}$$

である。ただし、 $i = H, L$, $j = H, L$ 。

ベイズ確率の計算(再掲 § 26.10.)

プレーヤー 1 が a_H の場合に、プレーヤー 2 が b_H の確率と b_L の確率

$$(b_H | a_H) = \mu(a_H, b_H) / [\mu(a_H, b_H) + \mu(a_H, b_L)] = 0.5 / 0.625 = 0.8$$

$$(b_L | a_H) = \mu(a_H, b_L) / [\mu(a_H, b_H) + \mu(a_H, b_L)] = 0.125 / 0.625 = 0.2$$

プレーヤー 1 が a_L の場合に、プレーヤー 2 が b_H の確率と b_L の確率

$$(b_H | a_L) = \mu(a_L, b_H) / [\mu(a_L, b_H) + \mu(a_L, b_L)] = 0.125 / 0.375 = 0.33$$

$$(b_L | a_L) = \mu(a_L, b_L) / [\mu(a_L, b_H) + \mu(a_L, b_L)] = 0.25 / 0.375 = 0.67$$

ベイズ期待利得

a_H の場合は

$$\begin{aligned} \pi_1(p_1, p_2(b_H), a_H) &= (b_H | a_H) \cdot \pi_1(p_1, p_2(b_H), a_H) + (b_L | a_H) \cdot \pi_1(p_1, p_2(b_L), a_H) \\ &= \{[a_H - p_1 + 0.5 \cdot p_2(b_H) / p_1] \cdot p_1\} \cdot 0.8 + \\ &\quad \{[a_H - p_1 + 0.5 \cdot p_2(b_L) / p_1] \cdot p_1\} \cdot 0.2 \\ &= a_H \cdot p_1 + 0.4 \cdot p_2(b_H) + 0.1 \cdot p_2(b_L) - p_1^2 \end{aligned} \quad \text{式 26.3}$$

注意：この関数は p_1 の concave function。

タイプ a_H のプレーヤー 1 の最適反応関数

式 26.3 を p_1 で偏微分してゼロとおくと、タイプ a_H のプレーヤー 1 の最適反応関数が得られる：

$$p_1(a_H) = 0.5 \cdot a_H \quad \text{式 26.4}$$

タイプ a_L のプレーヤー 1 の最適反応関数

a_L の場合は

$$\begin{aligned} \pi_1(p_1, p_2(b_H), a_L) &= (b_H | a_L) \cdot \pi_1(p_1, p_2(b_H), a_L) + (b_L | a_L) \cdot \pi_1(p_1, p_2(b_L), a_L) \\ &= \{[a_L - p_1 + 0.5 \cdot p_2(b_H) / p_1] \cdot p_1\} \cdot 0.33 + \\ &\quad \{[a_L - p_1 + 0.5 \cdot p_2(b_L) / p_1] \cdot p_1\} \cdot 0.67 \\ &= a_L \cdot p_1 + 0.17 \cdot p_2(b_H) + 0.33 \cdot p_2(b_L) - p_1^2 \end{aligned}$$

よって最適反応関数は

$$p_1(a_L) = 0.5 \cdot a_L \quad \text{式 26.5}$$

注意：

プレーヤー 1 の最適反応関数はドミナント戦略となっている。

タイプ b_L のプレーヤー 2 の最適反応関数

$$\begin{aligned} \pi_2(p_1(a_H), p_2, b_L) &= (a_H | b_L) \cdot \pi_2(p_1(a_H), p_2, b_L) + (a_L | b_L) \cdot \pi_2(p_1(a_L), p_2, b_L) \\ &= \{[b_L - p_2 + 0.5 \cdot p_1(a_H)] \cdot p_2\} \cdot 0.33 + \\ &\quad \{[b_L - p_2 + 0.5 \cdot p_1(a_L)] \cdot p_2\} \cdot 0.67 \\ &= b_L \cdot p_2 + [0.17 \cdot p_1(a_H) + 0.33 \cdot p_1(a_L)] p_2 - p_2^2 \end{aligned}$$

よって最適反応関数は

$$p_2(b_L) = 0.5 \cdot [b_L + 0.17 \cdot p_1(a_H) + 0.33 \cdot p_1(a_L)] \quad \text{式 26.6}$$

同様にして

$$p_2(b_H) = 0.5 \cdot [b_H + 0.4 \cdot p_1(a_H) + 0.1 \cdot p_1(a_L)] \quad \text{式 26.7}$$

ベイズ・ナッシュ均衡

4つの最適反応関数式 26.4 から式 26.7 を使って、ベイズ・ナッシュ均衡となるタイプ別最適価格が決められる：

$$\begin{aligned}
p_1^*(a_H) &= 0.5 \cdot a_H \\
p_1^*(a_L) &= 0.5 \cdot a_L \\
p_2^*(b_L) &= 0.5 \cdot b_L + 0.04 \cdot a_H + 0.08 \cdot a_L \\
p_2^*(b_H) &= 0.5 \cdot b_H + 0.1 \cdot a_H + 0.025 \cdot a_L
\end{aligned}$$

注意：一般的には

$$\begin{aligned}
p_1(a_L) &= F^{1L} \cdot [a_L, p_2(b_H), p_2(b_L)] \\
p_1(a_H) &= F^{1H} \cdot [a_H, p_2(b_H), p_2(b_L)] \\
p_2(b_L) &= F^{2L} \cdot [b_L, p_1(a_H), p_1(a_L)] \\
p_2(b_H) &= F^{2H} \cdot [b_H, p_1(a_H), p_1(a_L)]
\end{aligned}$$

の4方程式から、 $p_1^*(a_H)$ 、 $p_1^*(a_L)$ 、 $p_2^*(b_L)$ 、 $p_2^*(b_H)$ を得る。

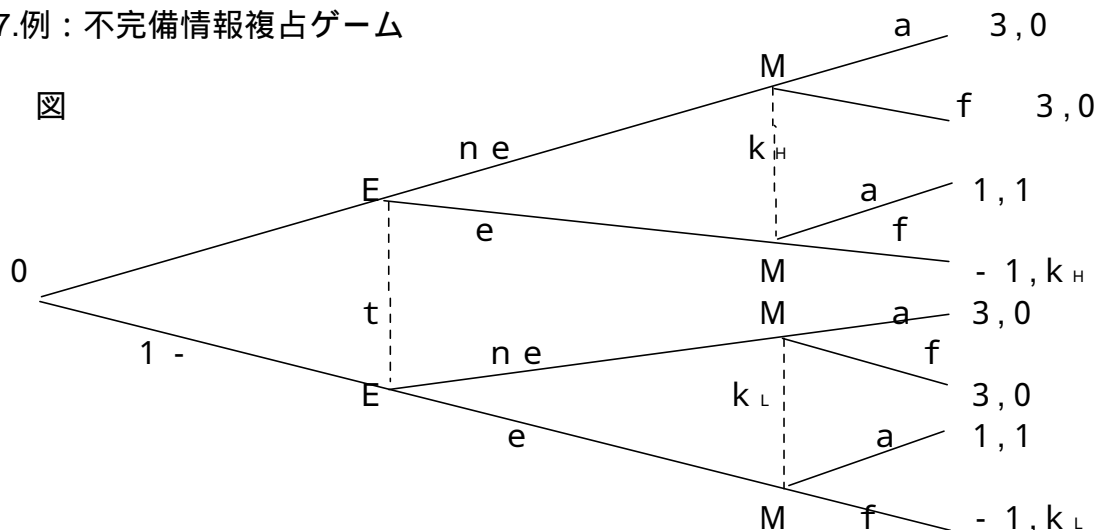
第4節不完備情報ゲームと展開型ゲーム

§ 26.16.説明：

不完備情報ゲームは、自然がプレーヤーとしてゲームに参加して、最初に、プレーヤーのタイプを決め、その後で、プレーヤーが同時に行動する と考えれば、展開型ゲームとなる。

ライバルプレーヤーのタイプを知らないという状況は情報集合によって表される。例えば、プレーヤーが3タイプであれば、その情報集合は3つの分岐点より形成され、自然というプレーヤーが、どの分岐点かを決める と考える。

§ 26.17.例：不完備情報複占ゲーム



この展開型ゲームでは、プレーヤー自然 の分岐点が0で示されている。

第5節タイプが無限のゲーム

§ 26.18.説明：

タイプ集合 T_i の要素が有限個の場合には、タイプ別戦略 $s_i(\cdot)$ は、有限個のタイプに最適な純粋戦略を割り当てる関数であった。しかし、タイプが無限にあるときには、一般的に関数 $s_i: T_i \rightarrow S_i$ となる。

注意：混合戦略は、このような関数をランダムに選択することになるが、一般的に関数をランダムに選択することは困難である。したがって、以下では、純粋戦略のみを考える。

§ 26.19.定義：

T_i を R の閉区間とする。タイプ組合せは、 $T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_I$ となる。したがって、ライバルプレーヤーのタイプ空間は $T_{-i} = T_1 \times \cdots \times T_{i-1} \times T_{i+1} \times \cdots \times T_I$ となる。

タイプ組合せの確率分布は $\mu(\cdot)$ で、密度関数は $f(\cdot)$ 表されるものとする：すなわち、

Tとするとき、 $\mu(t)$ は t の確率。

プレイヤー i のタイプ情報 t_i が分かったときの、ライバルのタイプの条件付き確率は、 $\mu(t_{-i} | t_i)$ と表される。ただし、 $t_{-i} \in T_{-i}$ 。

§ 26.20.定義：ベイズ・ナッシュ均衡

ライバルプレイヤーのタイプ別戦略 s_{-i} が与えられると、プレイヤー i が戦略 s_i を選択したときの、プレイヤー i の期待利得は以下のように定義される：

$$T_{-i} p_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i}) (t_{-i} | t_i) d t_{-i}$$

したがって、ベイズ・ナッシュ均衡は

$$s_i \in S_i$$

$$T_{-i} p_i(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i}) (t_{-i} | t_i) d t_{-i}$$

$$T_{-i} p_i(s_i, s_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i}) (t_{-i} | t_i) d t_{-i}$$

すなわち最適反応が、すべてのプレイヤー $i \in I$ とタイプ $t_i \in T_i$ について成立する状態。

注意：プレイヤーが多い一般的ケースでは、タイプが無限のときの、ベイズ・ナッシュ均衡を求めるのは極めて困難である。

§ 26.21.例：Mas-colell, Whinston, and Green, Microeconomic Theory, 1995, p.256

研究開発ゲーム

(a) 複占産業で、企業 i ($i = 1, 2$) が開発費用 c ($0, 1$) を投資して、新製品を開発するか模倣するかを決定する状況を考える。

(b) 企業 i のタイプはある指標 θ_i (例えば、需要量あるいはシェア) で表される。ただし、 θ_i ($i = 1, 2$) は区間 $[0, 1]$ に、一様、かつ、それぞれ独立して分布されているものとする (したがってベイズ定理を使う必要がない)。

(c) 新製品が開発されると 2 企業とも利潤を得るが、その大きさは θ_i^2 ($i = 1, 2$) となるものとする。

(d) 企業は自分のタイプを知って行動するが、ライバルのタイプは分からず同時に行動するものとする。

開発の利得

タイプ θ_i の企業 i が開発する戦略を

$$s_i(\theta_i) = \text{開発}$$

と表し、模倣する戦略を

$$s_i(\theta_i) = \text{模倣}$$

と表すと、 i 企業が開発したときの i 企業の利潤は、 j 企業が開発したかどうかに関係なく

$$\theta_i^2 - c$$

と表される。

模倣の期待利得

一方、 $(s_j(\theta_j) = \text{開発})$ を、タイプ θ_j の j 企業 (ただし $j \neq i$) が開発する確率とすると、自分で開発しなかったときの期待利得は

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\theta_i^2) (s_j(\theta_j) = \text{開発}) d \theta_j \\ &= \theta_i^2 \int_0^1 (s_j(\theta_j) = \text{開発}) d \theta_j \\ &= \theta_i^2 \cdot \text{Prob}(s_j(\theta_j) = \text{開発}) \end{aligned}$$

最適反応

開発が最適反応であるためには

$$\theta_i^2 - c \geq \theta_i^2 \cdot \text{Prob}(s_j(\theta_j) = \text{開発})$$

である必要がある。したがって、開発が最適反応となる条件は

$$\theta_i \geq \{ c / [1 - \text{Prob}(s_j(\theta_j) = \text{開発})] \}^{1/2} \quad \text{式 26.8}$$

となる。式 26.8 が等式で成立する θ_i を臨界値 cutoff value θ_i^* とすると、 $\theta_i > \theta_i^*$ のと

きには開発を行うが、 $s_i < s_i^*$ であれば行わない。

ベイズ・ナッシュ均衡

例えば、 $s_1 < s_1^*$ かつ $s_2 < s_2^*$ であれば、2企業とも開発するのが、ベイズ・ナッシュ均衡となる。

ベイズ・ナッシュ均衡での臨界値 s_i^* を s_i^* と表すと、 s_i が一様分布されていることより

$$\text{Prob}(s_j(s_j) = \text{開発}) = 1 - s_j^*$$

となるから、式 26.8 より

$$s_1^{*2} - s_2^{*2} = c$$

同様にして

$$s_2^{*2} - s_1^{*2} = c$$

となつて、 $s_1^* = s_2^* = c^{1/3}$ を得る。したがって、ベイズ・ナッシュ均衡で

2企業とも開発する確率は $(1 - s^*)^2$ 、開発しない確率は s^{*2} である。

どちらかが開発する確率は $1 - (1 - s^*)^2 - s^{*2} = 2s^*(1 - s^*)$ となる。

第27章.逆(方向)帰納法によるナッシュ均衡の限定

§ 27.1.説明：

ゲームのある段階での戦略が、ゲームの後の段階でのプレーヤーの動機と矛盾しないという基準を、逆(方向)帰納法の原則という。

これは、実際には実行しない行動(最適でない行動)で、ライバルプレーヤーを脅して、行動に影響を与えることはできない(信用性がない incredible)とする考え方である。すなわち、こけ脅かし incredible threat がゲームの均衡を決める可能性を排除する。

第1節 Subgame Perfect Equilibrium サブゲーム完全均衡

§ 27.2.定義(復習)：

プレーヤー集合 I 、最終点集合 $T(N)$ 、行動分岐集合 $D(N)$ 。

すべての行動の集合を A 。

利得関数 $r: T(N) \rightarrow R^I$ 。したがって、最終点 n の利得は $r_i(n)$ 。

$i: N \rightarrow N$ を個々の分岐点とその1つ前の分岐点を関連付ける関数とする。

(m) を分岐点 m に到達する行動とする。

情報集合 $u \subseteq U_i$ における行動の集合は $A(u)$ 。

情報集合の集合 U 。

展開型のゲームは以下のような一覧表で完全に表される：

$$(I, (N_i), (A_i), (N_i)_{i \in N}, U, (A(u)_{u \in U}), r)$$

プレーヤー i が情報集合 u で行動 a を選択する確率を $b_i^u(a)$ と表示。

行動戦略組合せ $b = (b_1, \dots, b_I)$ によって、最終点 n が到達される確率を $q_b(n)$ 。

行動戦略組合せ b におけるプレーヤー i の期待利得 $R_i(b)$ ：

$$R_i(b) = \sum_{n \in T(N)} r_i(n) \cdot q_b(n)$$

§ 27.3.定義：確率予想

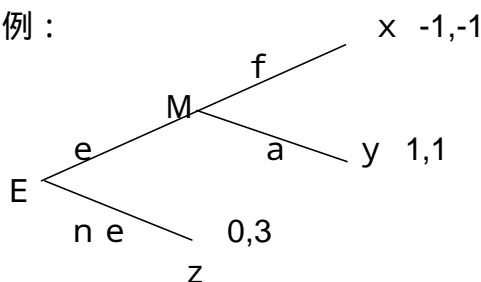
戦略組合せ b が選択されたときに、ゲームの途中の分岐点 x から最終点 n が実現される確率を

$$q_b(n|x)$$

と表す。同様に、戦略組合せ b のときに、ゲーム途中の分岐点 x に到達したときの、プレーヤー i の期待利得は、以下のように定義される：

$$R_i(b|x) = \sum_{n \in T(N)} r_i(n) \cdot q_b(n|x)$$

§ 27.4.例：



$$\begin{aligned} q_b(x|E) &= b_E(e) b_M(f) \\ q_b(x|M) &= b_M(f) \\ q_b(z|M) &= 0 \\ R_E(b|M) &= -1 \cdot q_b(x|M) + 1 \cdot q_b(y|M) + 0 \cdot q_b(z|M) \\ &= b_M(a) - b_M(f) \end{aligned}$$

$$R_E(b|E) = -1 \cdot q_b(x|E) + 1 \cdot q_b(y|E) + 0 \cdot q_b(z|E) = b_E(e) [b_M(a) - b_M(f)]$$

$$R_M(b|M) = -1 \cdot q_b(x|M) + 1 \cdot q_b(y|M) + 3 \cdot q_b(z|M) = b_E(e) [b_M(a) - b_M(f)]$$

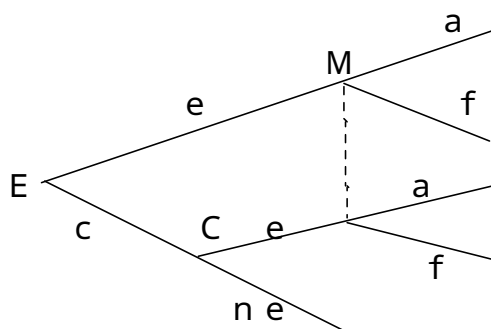
$$\begin{aligned} R_M(b|E) &= -1 \cdot q_b(x|E) + 1 \cdot q_b(y|E) + 3 \cdot q_b(z|E) \\ &= b_E(e) [b_M(a) - b_M(f)] + 3 \cdot b_E(ne) \end{aligned}$$

§ 27.5.定義：

展開型ゲームの一部を、分離独立したゲームとして分析できる場合には、サブゲームと呼ばれる。サブゲームの出発点となる情報集合は、

ただ1個の行動分岐点を持っている必要があり、
サブゲームの外部に出る情報集合を含まない必要がある。

§ 27.6.例： 図



分岐点Mは上記の条件を満たさないし、分岐点Cは条件を満たさない。このゲームにはゲーム全体以外にサブゲームは存在しない。このCの例より、単一分岐点であっても、サブゲームの出発点とならない可能性があることが分かる。

§ 27.7.定義：

展開型ゲーム

$$(I, (N_i)_{i \in I}, (A_i)_{i \in I}, (N_i)_{i \in I}, U, (A(u)_{u \in U}), r)$$

の分岐点 x から続く分岐点の集合を N_x とし、その補完集合を N_{-x} と表示すると、以下の条件を満たすとき、 N_x はサブゲーム Γ_x を形成する：

$\{x\} \cup N_x$ 分岐点 x は単一分岐点型の情報集合であること
情報集合 U が、 U_x と U_{-x} に分割でき、
 $u \in U_x : u \in N_x$ かつ
 $u' \in U_{-x} : u' \in N_{-x}$

注意：

条件は、サブゲーム内の情報集合がサブゲームの外に出たり、サブゲーム外の情報集合がサブゲームに入ってはならないとしている。

完全記憶ゲームでは、これらの条件は常に満たされる。過去を覚えていれば、過去に分岐してしまった経路と情報集合が交差する(どっちにいるか分からない)ということは起こりえない。

§ 27.8.定義：サブゲーム完全均衡

行動戦略組合せ $b^* = (b_1^*, \dots, b_I^*)$ は以下の条件を満たすとき、サブゲーム完全均衡と呼ばれる：

$$i \in I, x \in B_i : R_i(b_i^*, b_{-i}^* | x) \geq R_i(b_i, b_{-i}^* | x)$$

注意：

この条件は、すべてのサブゲームで全プレイヤーの戦略が最適反応となっていることを求めている。これによって、こけ脅かし incredible threat の可能性が排除される。

§ 27.9.例：

§ 27.4.の参入ゲームで、以下のような2つのナッシュ均衡を考える：

- (1) $b^* = (b_E^*, b_M^*)$ 。ただし、
 $b_E^* = (b_E^*(e), b_E^*(ne)) = (1, 0)$
 $b_M^* = (b_M^*(a), b_M^*(f)) = (1, 0)$
- (2) $b^{**} = (b_E^{**}, b_M^{**})$ 。ただし、
 $b_E^{**} = (b_E^{**}(e), b_E^{**}(ne)) = (0, 1)$
 $b_M^{**} = (b_M^{**}(a), b_M^{**}(f)) = (0, 1)$

ケース(1)の場合は、既存企業が行動する分岐点を x とすると、§ 27.4.より

$$b_M \text{ with } b_M(a) < 1 :$$

$$R_M(b^* | x) = 1 > R_M(b_M, b_E^* | x) = b_M(a) - b_M(f) = 2b_M(a) - 1$$

したがって、 b^* はサブゲーム完全均衡。

ケース(2)の場合には、

$$b_M \text{ with } b_M(a) > 0 :$$

$$R_M(b^{**} | x) = -1 < R_M(b_M, b_E^{**} | x) = b_M(a) - b_M(f)$$

したがって、 b^{**} はサブゲーム完全均衡ではない。

§ 27.10.説明：

サブゲーム完全均衡の計算方法

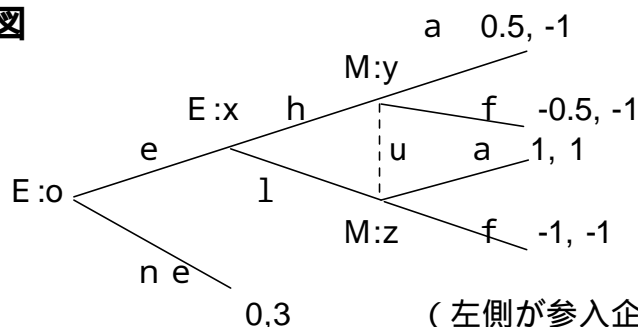
サブゲームを含まないサブゲーム x をすべて発見する 1番最後のサブゲーム

x のナッシュ均衡 $b^*(x)$ を発見し、均衡利得 $i : R_i(b^*(x) | x)$ を計算する

分岐点 x に、均衡利得 $i : R_i(b^*(x) | x)$ を配分して、最終点とみなし、新しいゲームを想定して、 x に戻る。

§ 27.11.例：投資選択参入ゲーム

参入企業が参入するかどうか選択し、参入する場合には、大規模投資 h か小規模投資 l かを選択するゲームを考える。



(左側が参入企業の利得、右側が既存企業の利得)

このゲームには 0 と x の2つのサブゲームがあるが、 x には2つのナッシュ均衡がある：

(1) 戦略組合せ

$$(b_E^*(h), b_E^*(l)) = (0, 1)$$

$$(b_M^*(a), b_M^*(f)) = (1, 0)$$

期待利得

$$(R_E(b^*|x), R_M(b^*|x)) = (1, 1)$$

(2) 戦略組合せ

$$(b_E^{**}(h), b_E^{**}(l)) = (1, 0)$$

$$(b_M^{**}(a), b_M^{**}(f)) = (q, 1-q) \text{ for } 0 \leq q \leq 0.5$$

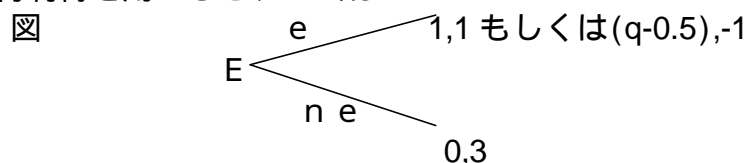
$$R_E(b^*|x) = 0.5q + (-0.5)(1-q) = q - 0.5$$

$$R_E(b_E, b_M^{**}|x) = q_E(h)(0.5q - 0.5(1-q)) + (1-q)(1 \cdot q - 1 \cdot (1-q)) \\ = -q_E(h)(q - 0.5) + 2q - 1 \text{ for } 0 \leq q \leq 0.5 \text{ \& } q_E(h) < 1$$

期待利得

$$(R_E(b^*|x), R_M(b^*|x)) = (q - 0.5, -1) \text{ for } 0 \leq q \leq 0.5$$

これらの期待利得を用いるとゲームは



となる。したがって、このゲームには2個のサブゲーム完全な均衡がある：

$$b^* ((b_E^*(e), b_E^*(ne)), (b_E^*(h), b_E^*(l)), (b_M^*(a), b_M^*(f))) \\ = ((1, 0), (0, 1), (1, 0))$$

$$b^{**} ((b_E^{**}(e), b_E^{**}(ne)), (b_E^{**}(h), b_E^{**}(l)), (b_M^{**}(a), b_M^{**}(f))) \\ = ((0, 1), (1, 0), (q, 1-q)) \text{ for } 0 \leq q \leq 0.5$$

第2節 完全ベイズ均衡

§ 27.12. 定義：

ある情報集合に含まれている分岐点について定義されている確率分布のことを確率予想 beliefs (普通は「信念」と訳される) という。

確率予想体系 μ とは、情報集合にある分岐点に関する確率分布。正確には

$$\text{関数 } \mu: N \rightarrow [0, 1] \text{ with } \sum_{x \in u} \mu(x) = 1 \text{ for } u \in U$$

注意：

N は分岐点 x の集合。 U は情報集合 u の集合。

この定義では、すべてのプレーヤーが同じ確率予想を持つ。

§ 27.13. 説明：確率予想導入でナッシュ均衡が比較可能になる

§ 27.11. の情報集合 u にある分岐点 y が起こる確率予想を $\mu(y)$ 、分岐点 z が起こる確率を $\mu(z) = 1 - \mu(y)$ とすると、

$$R_M(b^*|u) = (-1)\mu(y) + 1 \cdot \mu(z) = \mu(z) - \mu(y)$$

(ただし、ここでの b^* は f の確率 = 1 のこと) 同様にして

$$R_M(b^{**}|u) = [(-1)q + (-1)(1-q)]\mu(y) + [1 \cdot q + (-1)(1-q)]\mu(z) \\ = q[\mu(z) - \mu(y)] + (-1)(1-q)$$

(b^{**} は f の確率 = q) したがって、 $q \in [0, 0.5]$ であれば、 $\mu(y) = 1$ でないかぎり、

$$R_M(b^*|u) > R_M(b^{**}|u)$$

となる($\mu(y) = 1$ であれば等号が成立する)。言い換えれば、

参入企業が大規模投資 h を選択するかぎり、既存企業は戦略 a と戦略 f でも利得が同じであるが、

参入企業が小規模投資 l を選択する可能性が少しでもあれば、既存企業は戦略 a を必ず選択する、

既存企業が戦略 a を選択する場合には、参入企業は小規模投資 l を選択、

したがって、均衡 b^{**} は、「参入企業が大規模投資 h を確率 1 で選択する」という既存企業の確率予想 (信念) に依存する。

したがって、たとえ僅か（たとえば、1%）でも「参入企業は小規模投資 1 を選択する可能性がある」と思えば、均衡 b^{**} は成立しない。

§ 27.14.説明：

確率予想は、行動戦略と矛盾しないものでなければならない。

例えば、行動戦略

$$b^* ((b_E^*(e), b_E^*(ne)), (b_E^*(h), b_E^*(l)), (b_M^*(a), b_M^*(f))) \\ = ((1, 0), (0, 1), (1, 0))$$

の場合には、参入企業は分岐点 o では、行動 e を、分岐点 x では行動 l を確率 1 で選択するから、 z の確率予想は 1 でなければならない。よって、行動戦略と首尾一貫する確率予想は $\mu(z)=1$ & $\mu(y)=0$ となる。

一方、行動戦略

$$b^{**} ((b_E^{**}(e), b_E^{**}(ne)), (b_E^{**}(h), b_E^{**}(l)), (b_M^{**}(a), b_M^{**}(f))) \\ = ((0, 1), (1, 0), (q, 1-q)) \text{ for } 0 \leq q \leq 0.5$$

の場合には、情報集合 u (あるいは分岐点 y と z) に到達する確率はゼロである。したがって、行動戦略は、分岐点 y と z における確率予想になんの制約も付加しない。

§ 27.15.定義：完全ベイズ均衡 Perfect Bayesian Equilibrium

行動戦略組合せ b^* と確率予想体系 μ は、以下の条件を満たすとき完全ベイズ均衡という：行動戦略は、与えられた確率予想のもとで、最適戦略となっている。

確率予想体系は、行動戦略と consistent である。

ただし、正確には、以下のように定義される：

$u \subseteq U, i \in I$:

$$b_i \in B_i : \sum_{x \in u} \mu(x) \cdot R_i(b_i^*, b_{-i}^* | x) \geq \sum_{x \in u} \mu(x) R_i(b_i, b_{-i}^* | x) \\ \mu(x) = \mu [(x)] b_{i((x))}^* [(x)] / \sum_{x' \in u} \mu [(x')] b_{i((x'))}^* [(x')]$$

ただし、 $\sum_{x' \in u} \mu [(x')] b_{i((x'))}^* [(x')] = 0$ のケースは除く。

注意：

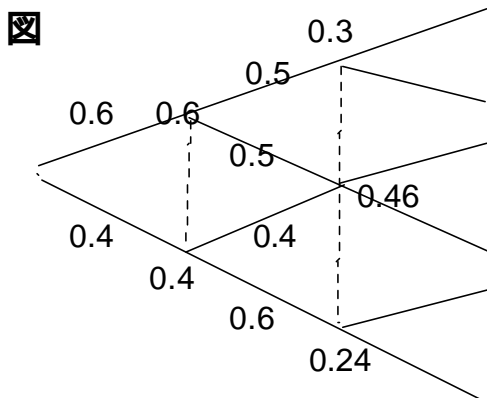
完全ベイズ均衡は、ベイズ・ナッシュ均衡とは異なる。ベイズ・ナッシュ均衡は、シグナルからライバルのタイプなどの情報を予想して、最適戦略を決定する方法である。

情報集合は分岐点が 1 つの場合も含むから、上記定義は、サブゲーム完全均衡を一般化している。すなわち完全ベイズ均衡ならサブゲーム完全である。

($\sum_{x' \in u} \mu [\dots] = 0$ のケースは除く) 均衡戦略で到達されない情報集合では、どんな確率予想でも行動戦略と矛盾しない。

§ 27.16.例：

以下のゲームの樹には、行動戦略と確率予想の関係が示されている。



§ 27.17.例：逆選択理論(自動車市場)

モデル

2 タイプ自動車：複数の売り手の評価 s_H と s_L ($s_H > s_L$)

買い手の評価は売り手の評価の μ 倍 ($\mu > 1$) : s_H と s_L

売り手が提案する価格は p_H s_H もしくは p_L s_L 。

高品質車の価格を $p(s_H)$ 、低品質車の価格を $p(s_L)$ と表す。

自動車が s_H の確率が q 、 s_L の確率が $1 - q$ とする。

買い手の行動

確率予想体系が μ , $\mu = 1 - \mu$ とする。ただし、 μ は s_L 、 $1 - \mu$ は s_H の予想確率。このときに提案される価格を p とすると、以下の条件が満たされれば購入する：

$$\mu [s_L - p] + (1 - \mu) [s_H - p] \geq 0$$

買い手の確率予想

(a) 2 タイプの売り手が異なる価格 ($p(s_H), p(s_L)$) = (p_H, p_L) を付ける場合

$$= \text{Prob}\{s_i = s_H | p\} = \begin{cases} 1 & \text{for } p = p_H \\ 0 & \text{for } p = p_L \end{cases}$$

(b) 2 タイプの売り手が同じ価格 $p(s_H) = p(s_L) = p$ を付ける場合

評価 s_H の自動車を売る条件は $p \geq s_H$ であるから

$$= \text{Prob}\{s_i = s_H | p\} = \begin{cases} q & \text{for } p \geq p_H \\ 0 & \text{for } p < p_H \end{cases}$$

売り手の行動

(a) 2 タイプの売り手が異なる価格 (p_H, p_L) を付けようとする場合

買い手が価格で、自動車の品質を識別するため、低品質車の売り手も p_H を設定する。したがって、このケースは実現しない。

(b) 2 タイプの売り手が同じ価格 p を付ける場合

価格は p_H となる。さもなければ、高品質車は売られない。

したがって

$$[q s_H + (1 - q) s_L] \geq p_H$$

なら購入される。

完全ベイズ均衡

$$p(s_H) = p(s_L) = p_H$$

$$\mu = q, \quad 1 - \mu = 1 - q$$

$$[q s_H + (1 - q) s_L] \geq p_H \text{ なら購入}$$

注意：

このときには、プレーヤーは最適戦略を行い、確率予想は行動戦略と矛盾しない。

§ 27.18.説明：完全ベイズ均衡を発見する方法

以下のゲームは、利得は異なっているが、構造は図 27.18 のゲームと同じである。この例を使って完全ベイズ均衡を発見する方法を示す。

戦略 a を選択する確率を μ 、 f を $1 - \mu$ 、 h を選択する確率を μ 、 l を $1 - \mu$ とすると情報集合 u での既存企業の最大化問題は

$$\max \{ (\mu e_{ha} + (1 - \mu) e_{la}) + (1 - \mu) (\mu e_{hf} + (1 - \mu) e_{lf}) \} \quad \text{式 27.1}$$

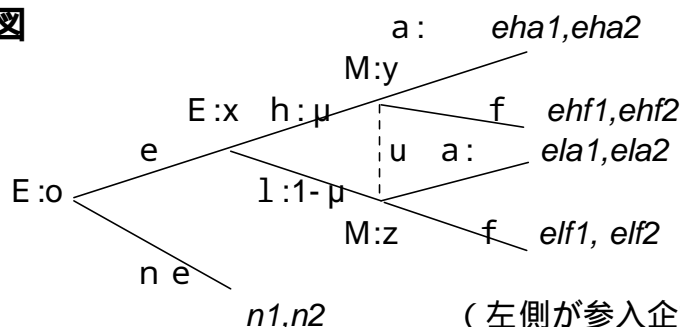
ノード x での参入企業の最大化問題は

$$\max_{\mu} \{ \mu (e_{ha} + (1 - \mu) e_{hf}) + (1 - \mu) (\mu e_{la} + (1 - \mu) e_{lf}) \} \quad \text{式 27.2}$$

これらの2つの最大化問題を同時に満たす値の組み合わせ (μ , μ) が、ノード x 以下のサブゲームにおける完全ベイズ均衡となる。このときの参入企業の利得を R^* 、参入を選択する確率を μ とおけば、ノード o での参入企業の最大化問題は

$$\max \{ R^* + (1 - \mu) n_1 \}$$

これらの問題を解けば、このゲームの完全ベイズ均衡が得られる。



注意：式 27. 1 で、既存企業の利得に μ や $(1-\mu)$ が掛けられているのは、参入企業の行動戦略の確率が、確率予想として用いられているためである。これによって、完全ベイズ均衡の確率予想に関する条件が満たされる。

§ 27.19.説明：

前節の例のサブゲームを、正規型で表示すると以下の表のようになる：

		既存企業	
		受入れ a	戦う f
参入企業	大規模投資 h	eha1, eha2	ehf1, ehf2
	小規模投資 l	ela1, ela2	elf1, elf2

大規模投資の確率を m 、受け入れ a の確率を r とすると、このゲームの混合戦略ナッシュ均衡は、以下の 2 式を解けば得られる：

$$m \max_r \{ r(m \text{eha2} + (1-m) \text{ela2}) + (1-r)(m \text{ehf2} + (1-m) \text{elf2}) \} \quad \text{式 27.3}$$

$$m \max_m \{ m(r \text{eha1} + (1-r) \text{ehf1}) + (1-m)(r \text{ela1} + (1-r) \text{elf1}) \} \quad \text{式 27.4}$$

これらの 2 式は、数学的には式 27. 1 および式 27. 2 と同じであるが、意味はまったく異なる。

式 27. 1 で μ の意味：完全ベイズ均衡では、

参入企業が行動戦略として与えた確率 = 既存企業の確率予想

となるために μ が用いられている。

式 27. 3 の m の意味：既存企業が、混合戦略として大規模投資 h に与える確率として用いられている。

第 3 節 逐次的均衡 Sequential Equilibrium

§ 27.20.説明：

完全ベイズ均衡の概念を用いれば、最適行動戦略の経路上の確率予想を決められるが、最適経路からはずれた情報集合では、確率予想を限定することができない。すなわち、均衡戦略で、到達されない情報集合では、どんな確率予想でも行動戦略と矛盾しないことになる。

これは 確率予想に対するちょっとした疑い や 極めて低いが、誤った行動をとる確率 の可能性を排除している。これらの可能性を考慮した均衡概念は、Sequential Equilibrium 逐次的均衡と言われる。

§ 27.21.定義：

行動戦略 b_i は、以下の条件を満たすとき、完全混合行動戦略あるいは完全に混合された行動戦略と言われる：

$$u \in U_i \cdot a \in A(u) : b_i^u(a) > 0$$

§ 27.22.定義：

行動戦略組合せ b^* と確率予想 μ^* は、以下の条件を満たすとき逐次的均衡と言われる：

(b^*, μ^*) は完全ベイズ均衡

ある完全に混合された行動戦略組合せの列 $(b^k)_{k=1}$ から、ベイズ定理によって導出される確率予想の列を $(\mu^k)_{k=1}$ とする。このときには、ある完全混合行動戦略組合せの列 $(b^k)_{k=1}$ が存在して、

$$\lim_k (b^k) = b^* \quad \text{かつ} \quad \lim_k (\mu^k) = \mu^*$$

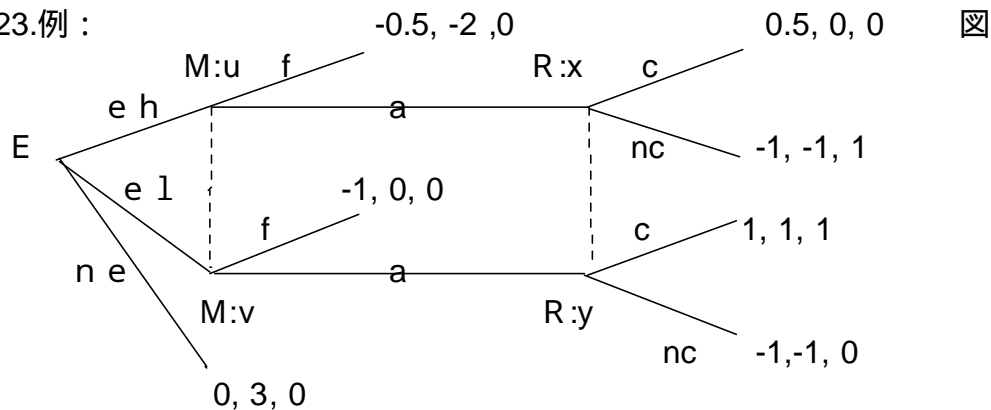
となる。

注意：

完全混合行動戦略組合せの列 $(b^k)_{k=1}$ は均衡戦略である必要はない。

均衡経路から外れた情報集合での確率予想を、均衡行動戦略からのごく小さい乖離で (ベイズ定理から) 得られるとしても、矛盾が生じない完全ベイズ均衡が逐次的均衡である。

§ 27.23.例：



モデル

利得は、参入企業、既存企業、政府の順番。

参入企業は e h (高投資) か e l (低投資) で参入するか、n e 参入しない。

既存企業は a (受け入れ) か f (戦う)。

既存企業が受け入れれば、政府は e h の時には規制するが、e l には規制しない。

既存企業は、参入企業が e h か e l か (u か v か) 分からない。

政府 G は、参入企業が e h か e l か (x か y か) 分からない。

完全ベイズ均衡

以下のような組合せは完全ベイズ均衡となる：

$$b = ((b_E(e h), b_E(e l), b_E(n e)), (b_M(a), b_M(f)), (b_G(c), b_G(nc))) \\ = ((0, 0, 1), (0, 1), (0, 1)) \quad (\text{参入しない, 戦う, 規制しない})$$

$$\mu = ((\mu(u), \mu(v)), (\mu(x), \mu(y))) = ((0, 1), (1, 0)) \quad \text{式 27.5}$$

v の確率予想=1 & x の確率予想=1 到達しないので確率予想は制約なし

分析

どんな列 $(b^k)_{k=1}$ でも、以下の条件を満たす：

$$\mu^k(v) = b_E^k(e l) / [b_E^k(e h) + b_E^k(e l)]$$

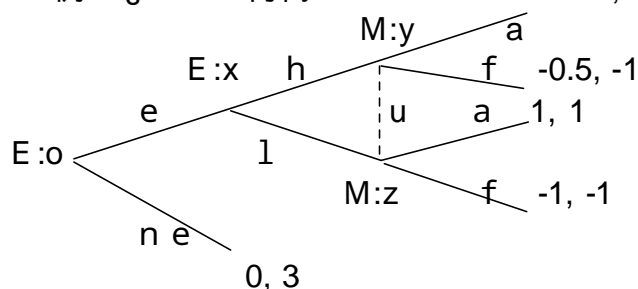
$$\mu^k(y) = b_E^k(e l) \cdot b_M^k(a) / [b_E^k(e h) b_M^k(a) + b_E^k(e l) b_M^k(a)]$$

よって、 $\mu^k(v) = \mu^k(y)$ 。したがって、

$$\lim \mu^k(v) = \mu(v) = 1 \quad \text{なら} \quad \lim \mu^k(y) = \mu(y) = 1$$

したがって、式 27.5 と矛盾する。戦略 b はこの確率予想の基では完全ベイズ均衡でなく、逐次均衡とならない。このときには、既存企業は e l を信じ、政府は e h を信じているため、矛盾が生じる。

第 4 節 Agent Normal Form Perfect Equilibrium 代理人正規型完全均衡



このゲームには2個の完全ベイズ均衡がある：

$$b^* ((b_E^*(e), b_E^*(ne)), (b_E^*(h), b_E^*(l)), (b_M^*(a), b_M^*(f))) \\ = ((1, 0), (0, 1), (1, 0)) \quad \text{と} \quad \mu^*(z) = 1$$

$$b^{**} ((b_E^{**}(e), b_E^{**}(ne)), (b_E^{**}(h), b_E^{**}(l)), (b_M^{**}(a), b_M^{**}(f))) \\ = ((0, 1), (1, 0), (q, 1-q)) \quad \text{for } 0 \leq q \leq 0.5 \quad \text{と} \quad \mu^{**}(y) = 1$$

b^* の場合(確率予想は $\mu^*(z) = 1$ となる)、

$$b^k ((b_E^k(e), b_E^k(ne)), (b_E^k(h), b_E^k(l)), (b_M^k(a), b_M^k(f))) \\ = ((1-1/k, 1/k), (1/k, 1-1/k), (1-1/k, 1/k))$$

と置けば、 b^k b^* であるし、ベイズ定理によれば

$$\mu^k(z) = b_E^k(e) b_E^k(l) / b_E^k(e) [b_E^k(h) + b_E^k(l)] \\ = b_E^k(l) / [b_E^k(h) + b_E^k(l)] = 1 - 1/k$$

となり、 $\mu^k(z) \rightarrow 1$ 。したがって、 b^* は逐次的均衡となる。

b^{**} の場合(確率予想は $\mu^{**}(y) = 1$ となる) § 27.13.参照

$\mu(y) = 1$ のケースでは、 $R_M(b^*|u) = R_M(b^{**}|u) (= -1)$ となるから完全ベイズ均衡である。一方、完全混合戦略では $\mu(z) > 0$ $R_M(b^*|u) > R_M(b^{**}|u)$ となるから、 b^{**} は完全ベイズ均衡でない。しかし逐次的均衡の定義では、最適戦略から乖離した完全混合行動戦略組合せの列 b^k は最適である必要はない。実際、

$$b^k ((b_E^k(e), b_E^k(ne)), (b_E^k(h), b_E^k(l)), (b_M^k(a), b_M^k(f))) \\ = ((1/k, 1-1/k), (1-1/k, 1/k), (q/k, 1-q/k))$$

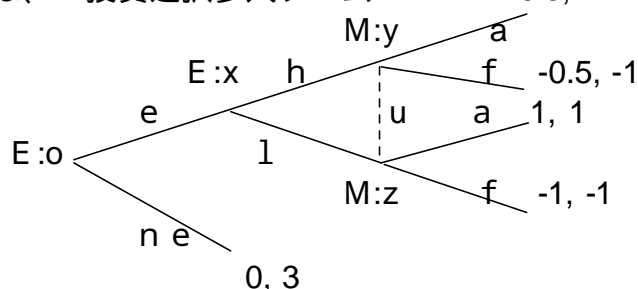
と置けば、 b^k b^{**} であるし(b^k は最適でないが、 b^{**} は最適戦略である)、

$$\mu^k(y) = \{b_E^k(h) / [b_E^k(h) + b_E^k(l)]\} = \{1 - 1/k\} \rightarrow 1$$

となって b^{**} は逐次的均衡となる。しかし、この結論は 参入企業はe h高投資で参入する に対する対する既存企業の予想確率が1のときしか成立しないから、いかなるエラーの可能性も認めない。この極端な均衡は Selten の完全均衡概念を使えば排除できるが、完全均衡は正規型ゲームで定義されている。そこで展開型ゲームを正規型に変換する方法を考える必要がある。

§ 27.25.説明：

各情報集合で、代理人が存在するかのように、展開型ゲームを正規型ゲームに変換する。例えば、投資選択参入ゲーム



であれば、参入企業には、情報集合がoとxの2個あるから、代理人はE oとE xの2人。既存企業は情報集合が1個で代理人はM 1人。

この展開型ゲームは、代理人正規型ゲームでは、以下のように表わされる：

表 1	E o n e				e			
		M				M		
		a	f			a	f	
	E x	h	0, 3	0, 3	E x	h	0.5, -1	-0.5, -1
		l	0, 3	0, 3		l	1, 1	-1, -1

代理人Mはaかfを選択し、代理人E xはhかlを選択し、代理人E oはどちらのゲームをplayするかを決める。

§ 27.26.定義：代理人正規型ゲーム

展開型ゲーム $(I, (N_i), (A_i), (N_i)_{i \in N}, U, (A(u)_{u \in U}), r)$ は、代理人正規型ゲームで以下のように表せる：

$$a_u = (U, (A(u))_{u \in U}, (p_u)_{u \in U})$$

ただし、情報集合Uが代理人=プレーヤーuの集合となり、情報集合での行動集合A(u)が、代理人=プレーヤーuの純粋戦略集合となり、代理人=プレーヤーuが行動a_uによって得る利得は、行動a_uによって到達する最終点での被代理人=プレーヤーiの利得、すなわち

$$p_u((a_u)_{u \in U}) = r_i(n((a_u)_{u \in U}))$$

となる。ただし、 $(a_u)_{u \in U}$ は、 $a_u \in A(u)$ となる純粋戦略組合せ。

§ 27.27.定義(再掲 § 25.29.)：

ナッシュ均衡 m^* Mは以下の条件を満たすとき完全均衡と言われる：

- 乖離混合戦略ゲーム (\cdot) のナッシュ均衡を $m^*(\cdot)$ とし、
0 のとき $m^*(\cdot) = m^*$

§ 27.28.定理：

代理人正規型ゲームの完全均衡はすべて逐次的均衡であり、したがって、完全ベイズ均衡である。

§ 27.29.例：

投資選択参入ゲーム § 27.11.には2個の完全ベイズ均衡がある：

$$b^* = ((b_E^*(e), b_E^*(ne)), (b_E^*(h), b_E^*(l)), (b_M^*(a), b_M^*(f))) \\ = ((1, 0), (0, 1), (1, 0))$$

$$b^{**} = b^\# = ((b_E^\#(e), b_E^\#(ne)), (b_E^\#(h), b_E^\#(l)), (b_M^\#(a), b_M^\#(f))) \\ = ((0, 1), (1, 0), (q, 1-q)) \text{ for } 0 \leq q \leq 0.5$$

これを代理人正規型ゲームの解に書き直すと

$$m^* = ((m_{Eo}^*(e), m_{Eo}^*(ne)), (m_{Ex}^*(h), m_{Ex}^*(l)), (m_M^*(a), m_M^*(f))) \\ = ((1, 0), (0, 1), (1, 0))$$

$$m^\# = ((m_{Eo}^\#(e), m_{Eo}^\#(ne)), (m_{Ex}^\#(h), m_{Ex}^\#(l)), (m_M^\#(a), m_M^\#(f))) \\ = ((0, 1), (1, 0), (q, 1-q)) \text{ for } 0 \leq q \leq 0.5$$

ところが、表1から明らかなように、行動戦略 $m_M^\#(f) > 0$ はdominated戦略となる(戦略 $m_M(a)=1$ がdominateする)。したがって、§ 25.34.定理より、完全均衡ではない。

§ 25.32.定理より、投資選択参入ゲームには完全均衡が存在するから、 b^* が完全均衡である。

第28章.順帰納法によるナッシュ均衡の限定

§ 28.1.説明：

ゲームのある段階でプレーヤーがいただく予想は、ゲームの前の段階でのほかのプレーヤー

の動機と矛盾しないという考え方を、順帰納法の原則という。

第1節シグナリングゲーム

§ 28.2.例：完全ナッシュ均衡の問題点

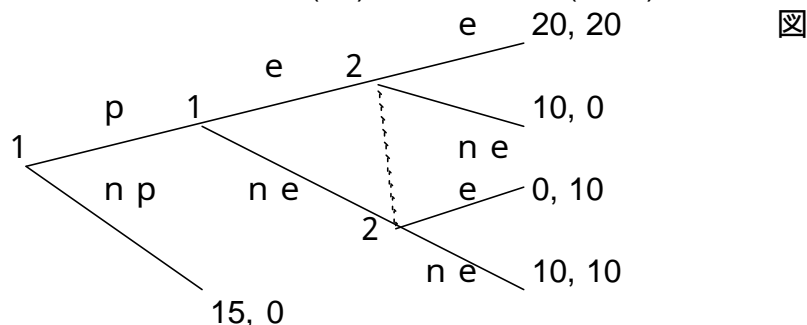
共同開発ゲーム

プレイヤー2人で、研究開発を共同で行うかどうかを決めるゲーム。

始めの分岐点では、プレイヤー1が共同研究に参加するか(p)、参加しないか(np)を決める。

参加を決めると、第2分岐点では、努力するか(e)、努力しない(ne)を決める。

プレイヤー1は、第2分岐点でのプレイヤー2の選択結果の情報は持たない状態で、第3分岐点で、努力するか(e)、努力しない(ne)かを定める。



あるいは正規型で表せば

		プレイヤー2	
		e	ne
プレイヤー1	分岐点1と2		
	p/e	20, 20	10, 0
	p/ne	0, 10	10, 10
	np/e	15, 0	15, 0
	np/ne	15, 0	15, 0

ただし、例えば、p/eはプレイヤー1の選択が第1分岐点でp、第2分岐点でeであることを示す。また、利得は左側がプレイヤー1、右側がプレイヤー2。

このゲームでのサブゲームは、第2番目の行動分岐点から始まり、このサブゲームのナッシュ均衡は(e, e)と(ne, ne)。したがって、サブゲーム完全均衡は

(I) : (np/ne, ne) と (II) : (p/e, e)

である。これらの均衡は、代理人正規型では、完全均衡となる。

しかし、プレイヤー1は、(I)で、共同開発に参加して(= p) 20の利得が得られるのであるから、(II)の行動戦略np/neを選択して、完全ナッシュ均衡(np/ne, ne)で利得15を得るという解は、疑問が生じる (I)を選ぶから(II)は解とはならない。

§ 28.3.定義：

以下の条件を満たすゲームはシグナリングゲームと呼ばれる：

(I) 2人ゲーム、 (II) 各プレイヤーは1度しか行動しない、

(III) 始めに行動するプレイヤー(以下ではプレイヤー1と呼ぶ)についての情報が不完備。

注意： 純粋戦略を分析するが、シグナリングゲームの多くは混合戦略でも均衡が存在する。

相手プレイヤーについて不完備な情報を持つプレイヤーが始めに行動するゲームはスクリーニングと言われる。例えば、労働者が教育水準を決めた後に、企業が教育水準で異なる賃金を提案するのがシグナリングで、企業が教育水準で異なる賃金を提案してから、労働者が教育水準を決めるのがスクリーニング(Rasmusen, Games and Information, Chap.10, 1994)。

§ 28.4.定義：

Tをプレイヤー1のタイプの集合

タイプの確率分布を μ

プレイヤー i の行動を a_i 、行動集合を A_i (すなわち $a_i \in A_i$)。ただし、 $i=1,2$ 。

プレイヤーの行動が (a_1, a_2) で、プレーヤ 1 のタイプが t のときのプレーヤ 1 の利得関数を、 $p_1(a_1, a_2, t)$ とする。

プレーヤ 1 の戦略は、各タイプによって異なるから、それぞれのタイプの戦略を表記する 2 次元ベクトルで $s_1 = ((s_1(t)))_{t \in T}$ と表せる。ただし、 $t \in T: s_1(t) \in A_1$

プレーヤ 2 の戦略は、プレーヤ 1 の行動によって異なり、 $s_2 = ((s_2(a)))_{a \in A_1}$ と表される。

プレーヤ 2 が、プレーヤ 1 の行動 a の後で抱くタイプ確率予想を $\mu(t|a)$ と表す。

ある行動戦略 $s_1 = ((s_1(t)))_{t \in T}$ が与えられたとき、行動 a を選択するタイプを $T(a) = \{t \in T: s_1(t) = a\}$ と表す。

もし $T(a) \neq \emptyset$ であれば、 $\sum_{t \in T(a)} \mu(t) > 0$ であるから、ベイズ定理によって、行動 a を取ったプレーヤ 1 のタイプに関するプレーヤ 2 の確率予想が以下のように得られる：

$$\mu(t|a) = \mu(t) / \sum_{t \in T(a)} \mu(t) \quad \text{式 28.1}$$

§ 28.5.定義：シグナリングゲームの完全ベイズ均衡

シグナリングゲームにおける、完全ベイズ均衡は、戦略組合せ

$$s^* = (s_1^*, s_2^*) = ((s_1^*(t)))_{t \in T}, ((s_2^*(a)))_{a \in A_1}$$

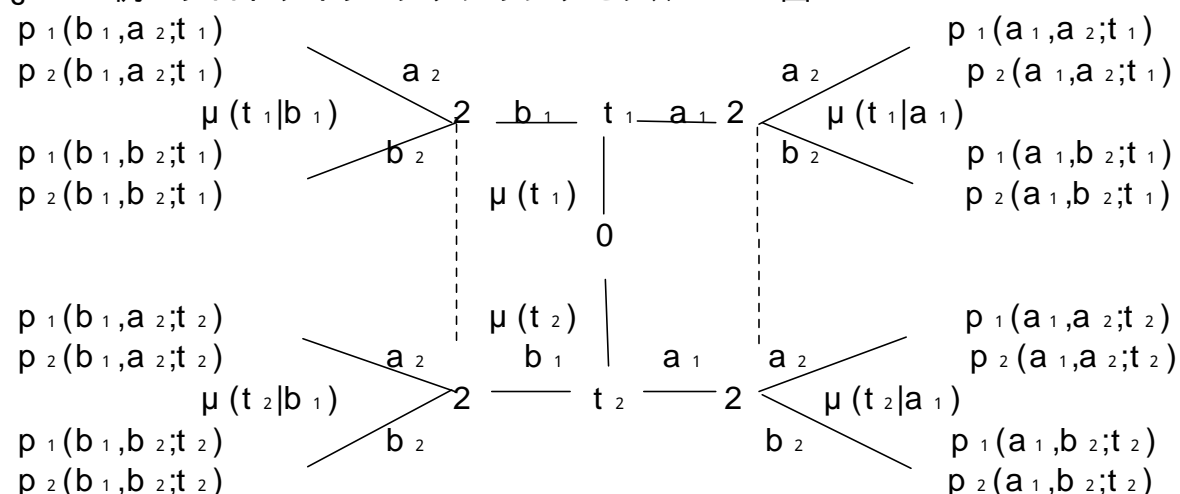
と確率予想体系 $\mu = \mu(\cdot | a)_{a \in A_1}$ によって表される。ただし、確率予想体系は、ベイズ定理式 28.1 によって決められ、純粋戦略 s^* は、与えられた確率予想のもとで、最適戦略となっている。すなわち：

$$\begin{aligned} & t \in T: \\ & a \in A_1: \\ & p_1(s_1^*(t), s_2^*(s_1^*(t)); t) \geq p_1(a, s_2^*(s_1^*(t)); t) \\ & a \in A_2: \\ & \sum_{t \in T} \mu(t) p_2(s_1^*(t), s_2^*(s_1^*(t)); t) \geq \sum_{t \in T} \mu(t) p_2(s_1^*(t), a; t) \end{aligned}$$

§ 28.6.説明：

シグナリングゲームには、タイプの異なるプレーヤ 1 が異なった行動を選択し、タイプを明らかにする均衡と、タイプの異なるプレーヤ 1 が同じ行動を選択して、タイプを明らかにしない均衡が考えられる。前者を、Separating Equilibrium 分離均衡、後者を Pooling Equilibrium 統合均衡と言う。

§ 28.7.例：プロトタイプ・シグナリングモデル



このゲームは典型的シグナリングゲームで、プレーヤ 2 人、タイプは 2 種類、すなわち、

$T=\{t_1, t_2\}$ で、選択できる行動も2タイプすなわち、 $A_1=\{a_1, b_1\}$ 、 $A_2=\{a_2, b_2\}$ である。

§ 28.8.例：

戦略組合せ $(s_1^*, s_2^*) = ((t_1), (t_2)), (a_1), (b_1))$ は、分離均衡のときには以下の条件を満たす：

(1) $(t_1) = (t_2)$ 。したがって、 $\mu(t_i | (t_i)) = 1 \quad i=1,2$

(2) $t_i, i=1,2 \cdot a \in A_1 :$

$$p_1((t_i), (t_i); t_i) \geq p_1(a, (t_i); t_i)$$

$t_i, i=1,2 \cdot a \in A_2 :$

$$p_2((t_i), (t_i); t_i) \geq p_2(a, (t_i); t_i)$$

同様に、戦略組合せ $(s_1^\#, s_2^\#) = ((t_1), (t_2)), (a_1), (b_1))$ は、統合均衡のときには以下の条件を満たす：

(1) $(t_1) = (t_2)$ 。

したがって、 $\mu(t_i | (t_i)) = \mu(t_i)$ 、 $i=1,2$ かつ、 $(t_i) = (t_i)$

(2) $t_i, i=1,2 \cdot a \in A_1 :$

$$p_1((t_i), (t_i); t_i) \geq p_1(a, (t_i); t_i)$$

$t_i, i=1,2 \cdot a \in A_2 :$

$$\mu(t_1) p_2((t_i), (t_i); t_1) + \mu(t_2) p_2((t_i), (t_i); t_2)$$

$$\geq \mu(t_1) p_2(a, (t_i); t_1) + \mu(t_2) p_2(a, (t_i); t_2)$$

§ 28.9.定義：直観的基準

プレイヤー1のタイプ数よりも、プレイヤー1の選択できる行動の数の方が多い場合には、均衡戦略から乖離した経路が必ず表れる。この均衡から乖離した経路での、行動がプレイヤー2に情報を提供する可能性がある。

プレイヤー1が、均衡から乖離した経路である行動を取るのには、均衡戦略よりも利得が大きい(小さくない)可能性が存在する ときだけだからである。したがって、プレイヤー2は、均衡から乖離する経路での行動から、プレイヤー1のタイプの確率を予想できる可能性がある。

プレイヤー1の均衡戦略から乖離した経路での行動に対し、プレイヤー2が最適な行動を選択するとき、プレイヤー1が実際に均衡戦略から乖離しない場合には、直観的基準 Intuitive Criterion を満たすと言う(以下で正確な定義を行う)。

§ 28.10.定義：

プレイヤー1の行動を a と表し、そのときのプレイヤー2の(T に関する)確率予想を、 $\mu(\cdot | a)$ と表す。

このときのプレイヤー2の最適反応戦略の集合を $BR(a, \mu(\cdot | a))$ と表す。

タイプ t のプレイヤー1が、行動 a を選択したときの、最大利得を

$$p_1^*(a, t) = \max_{b \in BR(a, \mu(\cdot | a))} p_1(a, b; t)$$

と表す。 $BR(a, \mu(\cdot | a))$ は、ベイズ定理と矛盾しないようなある確率予想 $\mu(\cdot | a)$ に基づくプレイヤー2の最適反応戦略であるが、均衡戦略から乖離した経路での行動に対しては、どのような確率予想もベイズ定理と矛盾しないため、いろんな値を取る可能性がある。上の式では、最大利得をもたらす確率予想 ($\mu(\cdot | a)$) 時の $BR(\cdot)$ によって p_1^* が決まる。

(均衡戦略から乖離した経路で) 行動 a をとると、利得が、必ず、均衡戦略組合せ

$$((s_1^*, s_2^*), \mu) = (((t_1), (t_2)), (a_1), (b_1)), \mu)$$

のときの利得より小さくなるタイプを以下のように定義する：

$$T^s(a) = \{t \in T : p_1((t_i), (t_i); t_i) > p_1^*(a, t)\}$$

§ 28.11.定義：

シグナリングゲームの完全ベイズ均衡($\{s_1^*, s_2^*\}, \mu$) $[\{(\sigma^*(t))_{t \in T}, (\sigma^*(a))_{a \in A}\}, \mu]$ は、以下の条件を満たすとき、直観的基準を満たすという：

プレーヤー 1 の 均衡戦略から乖離した 行動を a' (すなわち $a' \neq \sigma^*(t)$) と表す $T^s(a') \neq T$ とする (すなわち、均衡戦略から乖離することで均衡戦略より大きい利得を得る可能性があるプレーヤーが存在する)

すべてのタイプのプレーヤー 1 の 均衡戦略から乖離した どの行動 a' に対しても、プレーヤー 2 には、ある確率予想 $\mu'(\cdot | a')$ と最適反応戦略 $b' = BR(a', \mu'(\cdot | a'))$ が存在して、以下の 戦略と確率予想の組合せ も完全ベイズ均衡となる：

戦略 $[(\sigma^*(t))_{t \in T}, \{(\sigma^*(a))_{a \in A}, b'\}]$

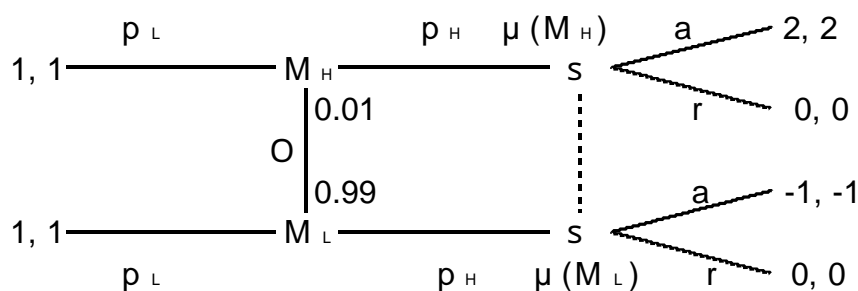
確率予想 $[\mu^*(\cdot | a)_{a \in A}, \mu'(\cdot | a')]$

注意：

この定義によれば シグナルを送ること得をしないタイプ からシグナルが来ているという確率予想に基づいた均衡でない場合には、直観的基準を満たす。

§ 28.12.例：利得は左側がメーカー、右側が消費者

図==



高品質メーカー M_H と低品質メーカー M_L

高価格 p_H と低価格 p_L

消費者 a = 購入, r = 購入拒否

注意：低品質メーカーが高価格で販売すれば、消費者も -1 の損をするが、メーカーも低品質製品を高価格で売ると結局 -1 の損をする。

§ 28.13.説明：

分離均衡

$$b_{M^H} = (b_{M^H}(p_H), b_{M^H}(p_L)) = (1, 0)$$

$$b_{M^L} = (b_{M^L}(p_H), b_{M^L}(p_L)) = (0, 1)$$

$$b_S = (b_S(a), b_S(r)) = (1, 0)$$

$$\mu = (\mu(M_H), \mu(M_L)) = (1, 0)$$

統合均衡

$$b_{M^H} = (b_{M^H}(p_H), b_{M^H}(p_L)) = (0, 1)$$

$$b_{M^L} = (b_{M^L}(p_H), b_{M^L}(p_L)) = (0, 1)$$

$$b_S = (b_S(a), b_S(r)) = (0, 1)$$

$$\mu = (\mu(M_H), \mu(M_L)) = (q, 1-q)$$

ただし、消費者が 高価格での購入拒否したときの期待利得 は $E(r) = 0$ 、 購入したときの期待利得 は $E(a) = 2q + (1-q)(-1)$ である。よって、購入拒否が最適戦略であるためには、 $E(a) \leq E(r) \Rightarrow 2q - (1-q) \leq 0 \Rightarrow q \leq 1/3$ となる必要がある (均衡経路外のため確率予想は自由)。したがって、 $0 < q \leq 1/3$ でなければならない。

§ 28.14.定理：

命題：これらの均衡は代理人正規型ゲームの完全均衡である。

説明： M_H と M_L を異なったプレーヤーとして3人の代理人の行動戦略 (b_{M^H}, b_{M^L}, b_s) を考える。 $b_{M^H} = (m^H, m^H)$, $b_{M^L} = (m^L, 1 - m^L)$, $b_s = (s, s)$ を仮定すると、 π -乖離混合戦略となる。このとき、 m^i ($i=H,L$) と s が十分に小さければ、 π -乖離ゲームは以下のような均衡を持つ：

(イ) 分離均衡

$$\begin{aligned} b_{M^H} &= (1 - m^H, m^H) \\ b_{M^L} &= (m^L, 1 - m^L) \\ b_s &= (1 - s, s) \\ \mu(M_H) &= 0.25 \cdot b_{M^H}(p_H) / \{0.25 \cdot b_{M^H}(p_H) + 0.75 \cdot b_{M^L}(p_H)\} \\ &= [1 - m^H] / [1 - m^H + 3 \cdot m^L] \\ \mu(M_L) &= 1 - \mu(M_H) \end{aligned}$$

(ロ) 統合均衡

$$\begin{aligned} b_{M^H} &= (m^H, 1 - m^H) \\ b_{M^L} &= (m^L, 1 - m^L) \\ b_s &= (s, 1 - s) \\ \mu(M_H) &= 0.25 \cdot b_{M^H}(p_H) / \{0.25 \cdot b_{M^H}(p_H) + 0.75 \cdot b_{M^L}(p_H)\} \\ &= m^H / [m^H + 3 \cdot m^L] \\ \mu(M_L) &= 1 - \mu(M_H) \end{aligned}$$

ただし、 $q \in [0, 1/3]$: $q = m^H / [m^H + 3 \cdot m^L]$ が満たされるように m^i ($i=M_H, M_L$) を決める。

これら(イ)と(ロ)の π -乖離行動戦略組合せは完全ベイズ均衡となっているし、 m^i ($i=H,L$), $s \rightarrow 0$ につれて、それぞれ π と π の均衡に収束するから、 π と π は完全均衡となる。したがって定理 § 27.28.によって、逐次的均衡でもある。

§ 28.15.定義：

シグナリングゲームの表示方法では、 π と π の均衡は以下のように表示される：

分離均衡

$$\begin{aligned} \pi^*(M_{M^H}) &= p_H, \quad \pi^*(M_{M^L}) = p_L \\ \pi^* &= a, \quad \mu(M_H|p_H) = 1, \quad \mu(M_L|p_H) = 0 \end{aligned}$$

統合均衡

$$\begin{aligned} \pi^*(M_{M^H}) &= \pi^*(M_{M^L}) = p_L \\ \pi^* &= r, \quad \mu(M_H|p_H) = q, \quad \mu(M_L|p_H) = 1 - q, \quad 0 \leq q \leq 1/3 \end{aligned}$$

§ 28.16. Passive Conjectures (この節は Eric Rasmusen, *Games and Information*, Blacwell, Cambridge, MA, 1989 のセクション 6.2 を参照)

完全ベイズ均衡のもとでは、均衡経路から乖離した経路では、確率予想の形成に制約はないが、現在の例では、高品質メーカー M_H の事前の確率は 0.01 で、しかも、プレーヤーの行動 (= 2 タイプとも低価格設定) には、この事前確率を改訂するような情報は含まれていないから、この確率予想がそのまま維持されると考えてよい。この場合には、統合均衡の条件 $0 \leq q \leq 1/3$ が満たされ、統合均衡は実現される。すなわち、高品質メーカーは、「高価格で販売しても、ほとんどのすべて (99 %) のメーカーが低品質メーカーであるから、消費者は低品質メーカーと思って購入を拒否する」と予想して、始めから低価格で販売するのが、統合均衡である。

以上のように、均衡経路を離れた経路における確率予想として、事前確率をそのまま利用する方法は Passive Conjectures と呼ばれるが、この方法の問題は、均衡経路を離れた経路におけるプレーヤーの最適行動を無視していることにある。

§ 28.17.説明：直感的基準を満たすか？

均衡経路を離れた経路で、プレーヤーが最適行動をしているかどうかを分析するのが、直感

的基準の考え方である。そこで、この節では、均衡が直感的基準を満たすかどうかを分析する。現在の例では、統合均衡における均衡乖離経路は高価格政策 p_H であるから、このときのプレーヤの行動を分析する。

統合均衡でのメーカーの利得は、 $p_M(p_L, r; M_H) = p_M(p_L, r; M_L) = 1$ である。

高価格のときの消費者の確率予想を、

$$\mu = (\mu(M_H|p_H), \mu(M_L|p_H)) = (m, 1-m), m \in [0,1]$$

とする。このときの消費者の最適反応戦略は、 $E(a)=2m+(-1)(1-m)$ と $E(r)=0$ より

$$BR_s(p_H, (m, 1-m)) = \begin{cases} \{a\} & \text{for } m > 1/3 \\ \{a, r\} & \text{for } m = 1/3 \\ \{r\} & \text{for } m < 1/3 \end{cases}$$

したがって、メーカーが得られる最大の利得は

$$p_M^s(p_H, t) = \begin{cases} 2 & \text{for } t=M_H \quad (\mu > 1/3 \quad a) \\ 0 & \text{for } t=M_L \quad (\mu < 1/3 \quad r) \end{cases}$$

すなわち、低品質メーカーが高価格政策で得られる最も大きい利得=0 は、低価格政策で得られる利得=1 より小さい。

よって、直観的基準によれば、消費者は 低価格メーカーが高い価格を設定する とは信じない、すなわち、 $T^s(p_H) = M_L$ となる。

よって、消費者は 高価格を設定するメーカーは高品質メーカー と確率1で予想できるから、もし高価格で販売していれば購入する。

この状況では、高品質メーカーは、低価格で販売するのは、最適ではなくなり、直感的基準を満たす完全ベイズ均衡は のみとなる。

§ 28.18.補足：Complete Robustness (この節は Eric Rasmusen, *Games and Information*, Blackwell, Cambridge, MA, 1989 のセクション 6.2 を参照)

均衡経路を離れた経路における確率予想について、あらゆる可能性を考えるのが Complete Robustness である。たとえば、

$$\mu = (\mu(M_H), \mu(M_L)) = (0, 1)$$

から

$$\mu = (\mu(M_H), \mu(M_L)) = (1, 0)$$

の間のすべてのケースについて、プレーヤの選択が最適となっているかどうかを検討し、すべての可能な確率予想について最適反応であるときのみ、均衡とする。§ 28.12.の例では、統合均衡には、確率予想に関する条件 ($q < 1/3$) が必要であるから、Complete Robustness の条件は満たされない。

§ 28.19.説明：

直観的基準は、シグナリングゲームにおける順方向帰納法的な考え方の一つを表す。順方向帰納法的な考え方には、一般的に、以下のようなものがある：

正規型ゲームでは、均衡戦略は undominated な戦略であることが望ましい(許容性 Admissibility と呼ばれる)。

ゲームから dominated 戦略を除いても、均衡は変化しないことが望ましい(繰り返し支配性 Iterated Dominance)。

均衡戦略に対する最適反応でない戦略をゲームから除いても、均衡は影響を受けないことが望ましい(均衡支配性 Equilibrium Dominance)。

注意：

直観的基準は の考え方を反映している 上記の例では 低品質メーカーが高い価格を設定する という戦略を省くと統合均衡が影響を受ける。

§ 28.20.例：一般的なシグナリングゲームの例 (この節は、Cho & KrepsのQuarterly Journal of Economics)

l of Economics,1987の論文を参照)

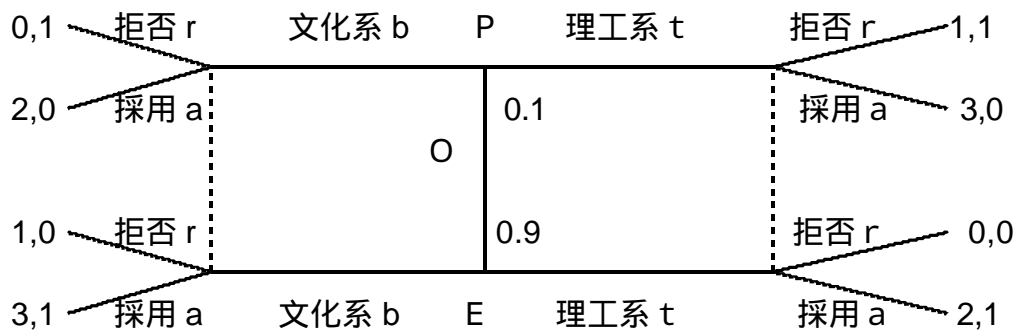
労働者Wが、企業(たとえば、F デパート)に就職を希望し、企業Fは、拒否 rするか、採用 aするかを決定するゲームを考える。

(イ)労働者には、2タイプEとPがあり、Eタイプの確率は0.9、Pタイプの確率は0.1とする。また、労働者が、どちらのタイプであるかは、労働者の Private information とする。

(ロ)労働者は、就職前に理工系学部 t を卒業するか、文化系学部 b を卒業するかを決める。

(ハ)企業は、卒業した学部をシグナルとして、採用するか採用を拒否するか決定する。

以下のゲームの樹では、右側が労働者の利得。



均衡をいくつかのケースに分けて分析する。

§ 28.21. ケース 1 (統合均衡) : E と P が同一行動で『理工系』を選択し、F は採用を選択するケース

F の最適行動の分析

同一行動であるため、WがどちらのタイプかFには識別できない。したがって、Fは既知の確率 0.9 と 0.1 を使って期待利得を計算する：

拒否の期待利得 = $0.1 \times 1 + 0.9 \times 0 = 0.1$

採用の期待利得 = $0.1 \times 0 + 0.9 \times 1 = 0.9$

したがって、採用が最適行動である。

F が採用の場合のWの最適行動の分析

理工系とEの利得は2、Pの利得は3 (1)

この行動が完全ベイズ均衡であるかどうかを知るためには、Wが均衡から乖離するとより大きい利得を得られるかどうかを分析する必要がある。そこで、均衡から乖離して文化系を選択するケースを分析する：

均衡から乖離しているから、FのWにタイプに関する予想には制約がない。したがって、WがPである確率を q と想定すると、Fの期待利得は

拒否の期待利得 = $q \times 1 + (1-q) \times 0 = q$

採用の期待利得 = $q \times 0 + (1-q) \times 1 = 1-q$

したがって、 q が 0.5 より大きければ、Fは拒否する。この場合のWのタイプ別の利得は

Eの利得は1、Pの利得は0

だから、(1)の結果と比較して両タイプとも低く、均衡から乖離する行動(文化系選択)は最適行動ではない。したがって、ケース1(=両タイプとも理工系)は、均衡経路から乖離したときのPタイプの予想確率が 0.5 以上であれば、完全ベイズ均衡となる。すなわち、

$$^*(E) = ^*(P) = t, \quad ^* = a, \quad \mu(E|t) = 0.9, \quad \mu(P|t) = 0.1, \quad \mu(P|b) = 0.5$$

は完全ベイズ均衡。

§ 28.22. ケース 2 (統合均衡) : WはEとPが同一行動で『文化系』を選択、Fは採用を選択するケース

Fの最適行動の分析

同一行動であるため、WがどちらのタイプかFには識別できない。したがって、Fは既知の確率0.9と0.1を使って期待利得を計算する：

$$\text{拒否の期待利得} = 0.1 \times 1 + 0.9 \times 0 = 0.1$$

$$\text{採用の期待利得} = 0.1 \times 0 + 0.9 \times 1 = 0.9$$

したがって、採用がFの最適行動である。

Fが採用の場合のWの最適行動の分析

文化系選択の場合、Eの利得は3、Pの利得は2 (2)

この行動が完全ベイズ均衡であるかどうかを知るためには、Wが均衡から乖離してもより大きい利得を得られないかどうかを分析する必要がある。そこで、均衡から乖離しているケース（理工系選択）を分析する：均衡から乖離しているから、FのWにタイプに関する予想には制約がない。したがって、WがPである確率をqと想定すると、Fの期待利得は

$$\text{拒否の期待利得} = q \times 1 + (1-q) \times 0 = q$$

$$\text{採用の期待利得} = q \times 0 + (1-q) \times 1 = 1-q$$

したがって、qが0.5より大きければ、Fは拒否する。この場合のWのタイプ別の利得は

Eの利得は1、Pの利得は0

だから、(2)の結果と比較して両タイプとも低く、均衡から乖離する行動（理工系選択）は最適行動ではない。したがって、ケース2（＝両タイプとも文化系）は、均衡経路から乖離したときのPタイプの予想確率が0.5以上であれば、完全ベイズ均衡となる。したがって、

$$^*(E) = ^*(P) = b, \quad ^* = a, \quad \mu(E|b) = 0.9, \quad \mu(P|b) = 0.1, \quad \mu(P|t) = 0.5$$

は完全ベイズ均衡。

§ 28.23. ケース3（分離均衡）：Eは『文化系』、Pは『理工系』を選択するケース

タイプで異なった行動をとるケースであるから、Fはタイプを識別できる。

Pの場合には、『理工系』でも『文化系』でも、Fの最適反応は拒否で、Pの利得は『理工系』で1、『文化系』で0となって、『理工系』が最適行動。一方、Eの場合には、『理工系』でも『文化系』でも、Fの最適反応は採用で、Eの利得は『理工系』で2、『文化系』で3となって、『文化系』が最適行動。したがって、Fは「文化系はEで、理工系はP」と信じるとすると「Pは『理工系』でFは『拒否』」、「Eは『文化系』でFは『採用』」の組み合わせ

$$^*(P) = t, \quad ^*(t) = r, \quad ^*(E) = b, \quad ^*(b) = a, \quad \mu(E|b) = 1, \quad \mu(P|t) = 1$$

は分離均衡の可能性がある。これが実際に均衡となるかを調べるため、Wが乖離するケースを考える。

Pが『理工系』を選択すれば、「理工系卒業者はP」とFが信じてるため、

Fの期待利得は、拒否は1、採用は0

したがって、拒否を選択。Fが拒否のとき、

Pが『理工系』を選択すると利得は1 (3)

一方、『文化系』卒業者はタイプEと企業が信じるのが、この分離均衡の前提条件で、しかも『文化系』卒業者を採用するから、

Pが『文化系』を選択すると利得は2。

よって(3)と比較すると、Pは『理工系』より『文化系』を選択するほうが利得が大きい。したがって、Pは『文化系』選択してタイプEのふりをするが最適反応となる。これはタイプによって異なった行動が最適反応となるという分離均衡の前提と矛盾する。したがって、この組み合わせは完全ベイズ均衡とはならない。

§ 28.24. 直感的基準を満たす？

ケース1が直感的基準を満たすかの分析：

Eの場合には、均衡から乖離して『文化系』を選択し、プレーヤ2が採用すればEの利得

は1、拒否すれば3、したがって、後者の場合には、均衡でのEの利得2を越える。

Pの場合には、均衡から乖離して『文化系』を選択し、プレーヤ2が採用すれば、Pの利得は2、拒否すれば0、したがって、いずれの場合でも、均衡でのPの利得3を越えない。

企業Fも以上の状況を知っているから、Eが『文化系』に乖離すれば、Fは、これがEであることを確率 = 1 で信じて採用 (= Fの最適行動) し、Eは利得を2から3に増加できる。したがって、ケース1の均衡は、直感的基準を満たさず実現されない。

ケース2が直感的基準を満たすかの分析：

Eの場合には、均衡から乖離して『理工系』を選択し、プレーヤ2が採用すれば、Eの利得は2、拒否すれば0、したがって、均衡での利得3を越えない。

Pの場合には、均衡から乖離して『理工系』を選択し、プレーヤ2が採用すれば利得は3、拒否すれば1、したがって、前者の場合には均衡での利得2を越える。

企業Fも以上の状況を知っているから、Pが『理工系』に乖離すれば、Fは、これがPであることを確率 = 1 で信じ、採用を拒否 (= 最適行動) する。このときにはPの利得は1で均衡の利得2より小さい。したがって、Pは乖離せず、ケース2の均衡は、直感的基準を満たす。

注意：どちらの統合均衡でも、タイプPの確率予想が0.5以上である必要があるが、Passive Conjecturesの基準では0.1であり、どちらの統合均衡もPassive Conjecturesの基準では、均衡でなくなる。

§ 28.25.例：Spenceのシグナリングゲーム（労働者教育ゲーム）

モデルと仮定

企業は労働者を雇用するかどうかを決定する

労働者には2つのタイプがある：生産性が高い労働者と低い労働者で、それぞれ生産性を θ_H と θ_L とする。

労働者の生産性が高いかどうかは労働者のPrivateな情報で、企業は生産性が高い確率が q であることしか分からないとする。

労働者は教育を受けることができるが、生産性の高い労働者の方が、教育費用が低い：教育水準を e とすると、生産性が高い労働者は、 $C(e_H) = c_H e_H$ 。一方、生産性が低い労働者は、 $C(e_L) = c_L e_L$ となる。ただし、 $c_H < c_L$ である。

労働者は、教育水準と賃金率の組み合わせ $(w, e) \in R^2$ を、企業に提案する。

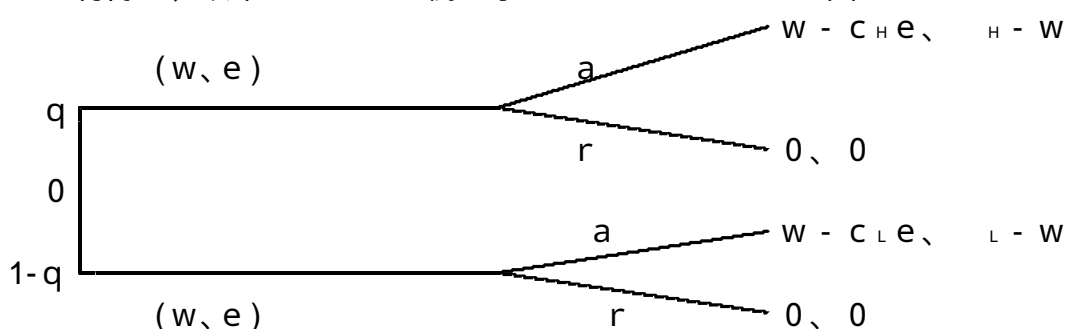
教育水準は、生産性には影響しない。

教育と賃金率の組み合わせから、企業が生産性が高いと予想する確率を $\mu(H|)$ 、低いと予想する確率を $\mu(L|)$ とすると、企業は、提案された賃金率のもとで、

$$\text{期待利潤} = \mu(H|) \theta_H + \mu(L|) \theta_L$$

がプラスであれば、労働者を採用(a)するが、マイナスであれば、採用しない(r)。

プレーヤの利得は、以下のゲームの樹に示されている： 図==



§ 28.26.分離均衡

以下の2条件を満たす θ_H と θ_L 、分離均衡となる：

- (i) $w^H - w^L \geq 0$ & $w^L = c_L e^L$ 利潤がマイナスでない
(ii) $w^H - c_H e^H \geq w^L - c_L e^H$ 低生産性には w^L が、高生産性には w^H が有利
また、分離均衡は以下のように定義される：

$$((s_1^*, s_2^*), \mu) = ((\pi^*(H), \pi^*(L)), (\mu(H|L), \mu(L|L)))_{R2},$$

ただし、 $\pi^*(H) = \frac{w^H - w^L}{c_H e^H - c_L e^H}$, $\pi^*(L) = \frac{w^L - c_L e^L}{c_H e^H - c_L e^L}$

$$\pi^*(e) = \begin{cases} a & \text{for } e \in \{e^H, e^L\} \text{ もしくは } w < c_L e \\ r & \text{その他} \end{cases} \quad \text{式 28.2}$$

$$\mu(H|L) = \begin{cases} 1 & \text{for } e = e^H \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{式 28.3}$$

注意：条件(ii)は、Incentive Constraint あるいは Self-selection Constraint と呼ばれます。

§ 28.27. 均衡の説明

$e^H = (w^H, e^H)$ の最適性

e^L は、(i)の左側より、 $w = w^L$ の水平線 e^H より下で、企業にはプラスの利潤

(ii)の左側より、直線 $w = c_H e + (w^H - c_H e^H)$ より上で、 w^L より大きい利得したがって、高生産性労働者が、 e^H を提案すれば企業は雇い、高生産性労働者は、 w^L より e^H を選択。

e^L の最適性

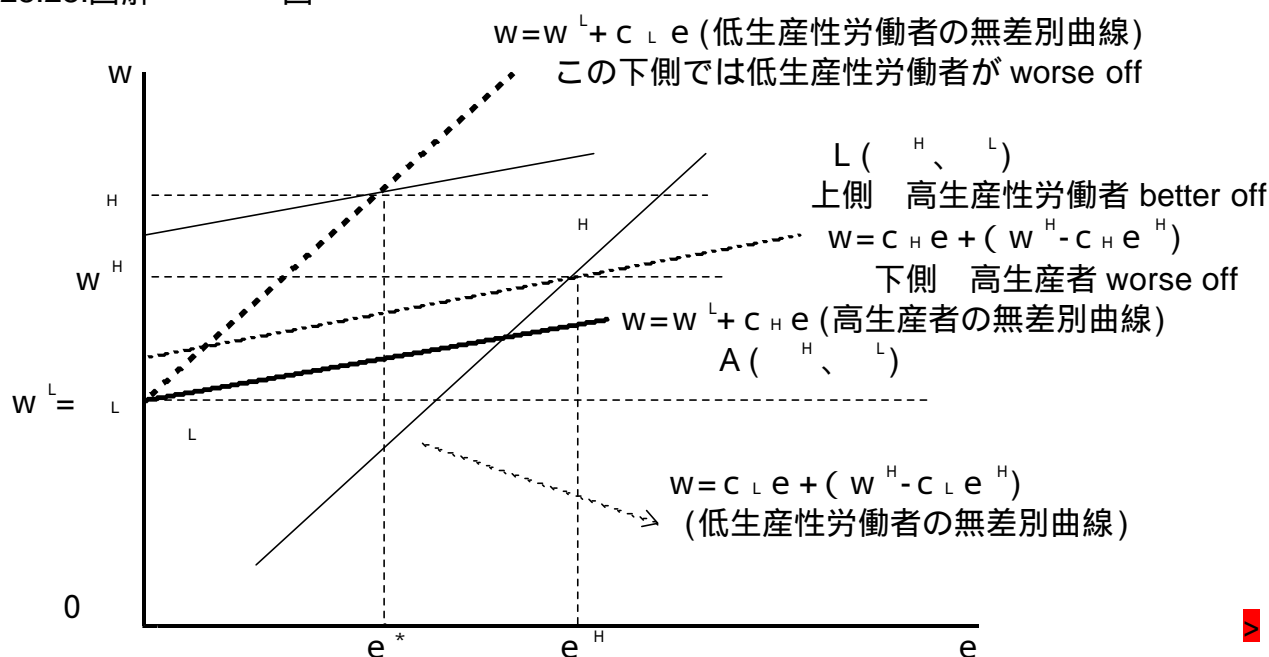
e^L は、(i)の右側より、 $w = w^L$ の水平線 e^L 線上で、企業には非負の利潤

(ii)の右側より、直線 $w = c_L e + (w^H - c_L e^H)$ より上で、 e^H より大きい利得したがって、低生産性労働者が、 e^L を提案すれば企業は雇い、低生産性労働者は、 e^H より e^L を選択。

注意：この分離均衡では、 e^H 以外のすべての w と e の組み合わせは、低生産性労働者からの提案と予想する（式 28.3）ため、 $w < w^L$ でないかぎり、雇用しません。そこで、この確率予想が、直感的基準を満たすかが問題となります。

§ 28.28. 図解

図 28.28



§ 28.29. 直感的基準を満たす均衡

組み合わせ(w^H, e^L)より、2タイプ共に、利得が悪化する領域は

$$A(w^H, e^L) = \{(w, e) | w^H - c_H e^H > w - c_H e, w^L > w - c_L e\}$$

1番目の条件は、直線-----の下側を示し、2番目の条件は、直線-----の下側を示し、1番目は高生産性労働者、2番目は低生産性労働者が worse off する条件となる。

一方、組み合わせ(w^H, e^L)より、低生産性労働者のみ悪化する領域は

$$L(w^H, e^L) = \{(w, e) | w^H - c_H e^H > w - c_H e, w^L > w - c_L e\}$$

1番目の条件は、直線-----の上側を示し、2番目の条件は、直線-----の下側を示し、1番目は高生産性労働者が better off、2番目は低生産性労働者が worse off する条件。

したがって、集合Lにあり、集合Aにない点(直線-----の上で、直線-----の下領域)は、低生産性労働者が提案することはないから、企業は確率予想 = 1 で、高生産性労働者が提案していると予想でき、雇用する。したがって、図==の点 w^H は、完全ベイズ均衡であるが、直感的基準を満たさない。高生産性労働者は、 w^H より低く(さもないと雇用されない)、 w^H より高い w を好むから、直感的基準を満たす点は、高生産性労働者の賃金が w^H に等しくなる組み合わせ(w^*, e^L)のみである。

§ 28.30.統合均衡

以下の2条件を満たす w^{**} 、統合均衡となる：

- (i) $\{q_H + (1-q)L\} - w^{**} \geq 0$ 期待利潤がマイナスでない
 - (ii) $w^{**} - c_L e^{**} \geq L$ 低生産性労働者が($L, 0$)より w^{**} を選択
- また、統合均衡は以下のように定義される：

$$((s_1^{**}, s_2^{**}), \mu) = ((w^{**}(H), w^{**}(L)), (p^{**}(H), p^{**}(L)))_{R2},$$

$$(\mu(H|L), \mu(L|L))_{R2}$$

ただし、 $w^{**}(H) = w^{**}(L) = w^{**}$

$$w^{**}(L) = \begin{cases} a & \text{for } w^{**} \leq w^L \\ r & \text{その他} \end{cases} \quad \text{式 28.4}$$

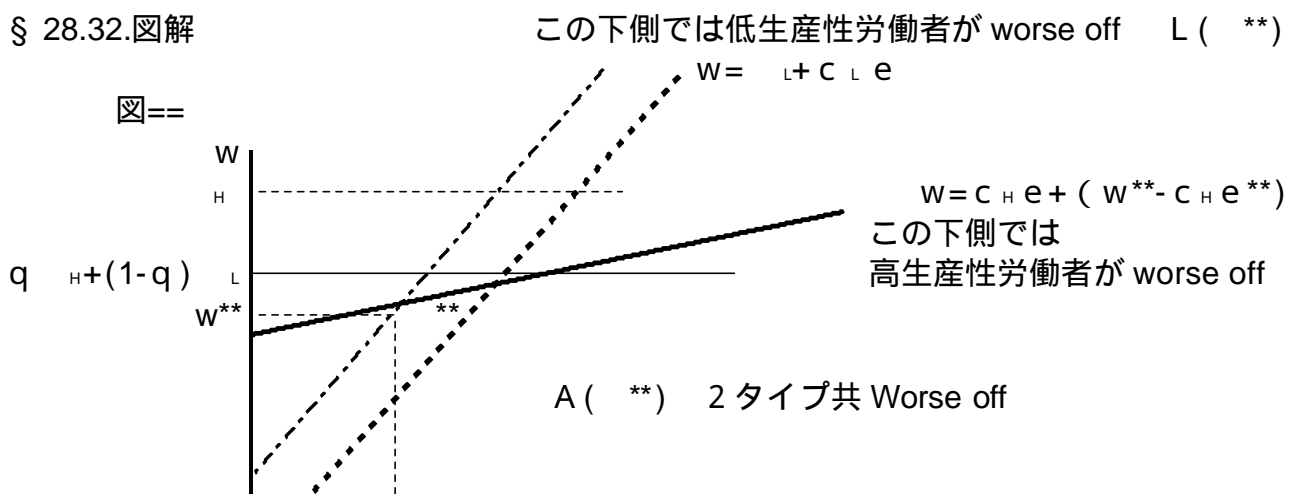
$$\mu(H|L) = \begin{cases} q & \text{for } w^{**} \leq w^L \\ 0 & \text{その他 (均衡以外のため確率予想は自由)} \end{cases} \quad \text{式 28.5}$$

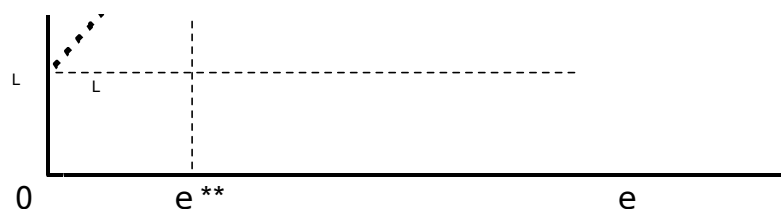
§ 28.31.均衡の確認

条件(i) (図==で、 w^{**} は直線 $q_H + (1-q)L$ より下) により、企業は雇用する。

条件(ii) (w^{**} は直線-----より上) により、低生産性労働者は $L = (L, 0)$ より w^{**} を選択する。また、式 28.5 によって、 $w^{**} \leq w^L$ 以外は、低生産性労働者と確率 1 で予想される (均衡外のため確率予想は自由) ため雇用されず、両タイプ共に w^{**} の提案が最適となる。

§ 28.32.図解





§ 28.33.直感的基準を満たす均衡

統合均衡では、 $L(**)$ は直線-----の下側で、直線——の上側の領域、 $A(**)$ は、直線-----と直線——の下側の領域で定義される。

$L(**)$ にある組み合わせ (w, e) で、条件 $w^{**} < w_H$ を満たす点は、企業によって高生産性労働者と識別されるし、高生産性労働者が bettr off する。したがって、図==の点 (w^{**}, e^{**}) は、直感的基準を満たさない。また、どのような統合均衡でも、集合 $L(**)$ が、nonempty となるため、直感的基準を満たす統合均衡は存在しない。

注意：逐次均衡や完全均衡は、純粹戦略数が有限のケースで統合されているため、現在の例のように戦略が無限に存在場合には適用できない。

第2節 安定的均衡

§ 28.34.定義：

これまでに2つの原則が登場した：

ゲームのある段階での戦略が、ゲームの後の段階でのプレイヤーの動機と矛盾しないという基準を、逆帰納法(逐次的均衡)の原則という。

ゲームのある段階でプレイヤーがいただく予想は、ゲームの前の段階での他のプレイヤーの動機と矛盾しないという考え方を、順帰納法の原則という。

そこで、問題は、これら2つの原則を同時に満たす均衡が存在するかどうかである。

注意：これらの2原則を満たす均衡は、均衡経路から乖離(deviate)するいろいろなケースを考えても、均衡は均衡のままであり、したがって、安定均衡と呼ばれる。

§ 28.35.定理：

ナッシュ均衡は、戦略組合せが連結している集合(構成要素 component という)に分解できる。

§ 28.36.例：以下のような参入ゲームを考える
左側が参入企業、右側が既存企業の利得

		既存企業	
		a	f
参入企業	参入 e	1, 1	-1, -1
	参入しない n e	0, 3	0, 3

混合戦略を

$$(m_1(e), m_1(ne)) = (p, 1-p)$$

$$(m_2(a), m_2(f)) = (q, 1-q)$$

とすると、最適反応関数は

右図のようになり、ナッシュ均衡は

$$A \{ (p, q) : p=1, q=1 \}$$

$$B \{ (p, q) : p=0, q=1/2 \}$$

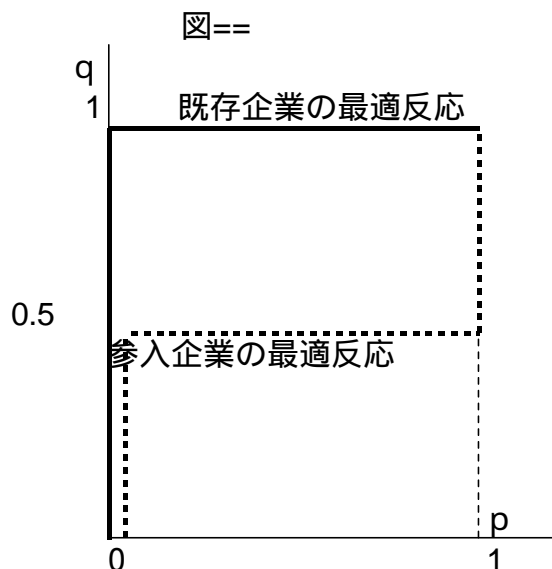
の2つの構成要素からなる。

注意：最適反応関数の導出方法 利得関数を最大化する

$$p \text{ を決める } P_1 = p q - p(1-q) = p(2q-1)$$

$$q \text{ を決める } P_2 = (p+3(1-p))q + (-p+3(1-p))(1-q) = 2pq - 4p + 3 \quad \text{式 28.6}$$

構成要素Aは1個の要素からなる集合であるが、構成要素Bは連結した集合となる。



§ 28.37.定義：安定均衡

以下の条件を満たす集合を 均衡の安定な集合 と呼ぶ(不正確)：

ナッシュ均衡の一つの構成要素の部分集合

逆帰納法原則を満たす集合を含む

順帰納法原則(許容性 Admissibility, 繰り返し支配性 Iterated Dominance, 均衡支配性

Equilibrium Dominance)を満たす集合を含む

注意：安定均衡は、同一のナッシュ均衡に存在するから、同一の利得を持つ。

§ 28.38.定理：

すべてのゲームには、安定集合均衡が存在する

安定集合のすべての均衡は、正規型ゲームでの完全均衡である

あるゲームの安定集合均衡は、dominated 戦略を排除してできるゲームの安定集合均衡を含む(繰り返し支配性を満たす)

あるゲームの安定集合均衡は、均衡戦略の最適反応でない戦略を排除してできるゲームの安定集合均衡を含む(直感的基準を満たす)

安定集合均衡は逐次的均衡を含む

注意：

(1)完全均衡は undominated であるから(§ 25.33.)、条件 により許容性条件が満たされる。

(2)条件 と と を同時に満たす均衡が存在するとはかぎらない。すべて別々の均衡の可能性もある。

§ 28.39.例：

参入ゲーム § 28.36.を考えると、均衡Bでは、既存企業の戦略は dominated 戦略である

(式 28.6 より、戦略 $q=1$ が $q \in [0, 0.5]$ を dominate する)。したがって、§ 28.38.定理の条件を満たさない。よって、均衡Bは安定的でなく、条件 より均衡Aが安定的となる。

第29章.繰り返しゲームと民衆定理 Repeated Games and Folk Theorems

第1節 繰り返しゲーム

§ 29.1.定義：戦略歴史

戦略型ゲーム (I, S, p) が、 T 回繰り返されるゲームを、**繰り返しゲーム** と呼ぶ。

繰り返されるゲームを、**基底ゲーム** Constituent game と呼ぶ。

繰り返される回数 T は無限であってもよい。

t 期目 (t 回目のゲーム) までの、戦略歴史 h^t (t - 歴史) は

$$h^t = (s^1, s^2, \dots, s^{t-1})$$

と表され、 $S^{t-1} = S \times S \times \dots \times S$ ($t-1$ 回) とすると、 $h^t = S^{t-1} \times S$ となる。戦略歴史 h^t の情報は、すべてのプレイヤーが持っている。

注意：

この章では、純粋戦略のみを考える。混合戦略の場合には、あるプレイヤーがどのような混合戦略をとったかを他のプレイヤーが知ることができないため、取り扱いが困難となる。

§ 29.2.定義：

プレイヤー i が、戦略歴史 h^t を知った上で t - 期 (すなわち、 t - 回目のゲーム) にとる行動を $a_i^t(h^t)$ と表す。ただし、初期分岐点では $h^0 = \emptyset$ である。

繰り返しゲームに対する戦略 σ_i は以下のように表される：

T 回繰り返しゲーム

$$\sigma_i = (a_i^1(h^1), a_i^2(h^2), \dots, a_i^T(h^T))$$

無限繰り返しゲーム

$$\sigma_i = (a_i^1(h^1), a_i^2(h^2), \dots)$$

また、 t - 期で可能なすべての行動は、以下のような関数の集合として定義される：

$$A_i^t = \{a_i^t : (a_i^t : S^{t-1} \times S_i)\}$$

§ 29.3.定義：

戦略集合 Σ_i は、以下のように定義される：

$$\Sigma_i = A_i^1 \times A_i^2 \times \dots \times A_i^T$$

戦略組合せを $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_I)$ と定義し、 Σ の集合を表す。すなわち $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \dots \times \Sigma_I$ となる。

戦略組合せ σ は、繰り返しゲームで実際に行われる行動を決める。繰り返しゲームで、実際に行われる行動を $(a^1(\sigma), a^2(\sigma), \dots, a^T(\sigma))$ と表す。

t - 期の行動組合せ $a^t(\sigma)$ は以下のように定義される：

$$a^1(\sigma) = (a_1^1(h^1), a_2^1(h^1), \dots, a_I^1(h^1))$$

$$a^2(\sigma) = (a_1^2(a^1(\sigma)), a_2^2(a^1(\sigma)), \dots, a_I^2(a^1(\sigma)))$$

$$a^3(\sigma) = (a_1^3(a^1(\sigma), a^2(\sigma)), a_2^3(a^1(\sigma), a^2(\sigma)), \dots, a_I^3(a^1(\sigma), a^2(\sigma)))$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a^t(\sigma) = (a_1^t(a^1(\sigma), \dots, a^{t-1}(\sigma)), a_2^t(a^1(\sigma), \dots, a^{t-1}(\sigma)), \dots, a_I^t(a^1(\sigma), \dots, a^{t-1}(\sigma)))$$

§ 29.4.定義：

戦略組合せ σ のときの t - 期のプレイヤー i の利得を、 $p_i(a^t(\sigma))$ と表し、割引係数をとると、 T が有限のときの平均利得現在価値 $V_i^T(\sigma)$ は

$$V_i^T(\sigma) = \left[\sum_{t=1}^T \delta^{t-1} p_i(a^t(\sigma)) \right] / \left[\sum_{t=1}^T \delta^{t-1} \right]$$

また、 T が無限のとき、 $\delta < 1$ ならば

$$V_i^T(\sigma) = \left[\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} p_i(a^t(\sigma)) \right] \cdot [1/(1-\delta)]$$

注意： 割引係数 δ はすべてのプレイヤーで同一とする。

割引率を r とすると、 $r = (1 - \delta) / \delta$ あるいは $\delta = 1 / (1 + r)$
 $[0, 1]$ であるが、 $\delta = 1$ ($r = 0$) の場合でも、収束すると仮定する。
 経済学では、普通は平均でなく合計なので、分母 ($\sum_{t=1}^T \delta^{t-1}$ や $1 / (1 - \delta)$) は省略する。

§ 29.5. 定義：

割引係数 δ のとき、正規型ゲーム G の T 回繰り返しゲームは
 $G^T(\delta) = (I, S, u)$

と表される。ただし、

$$u = (u_1^T(\cdot), u_2^T(\cdot), \dots, u_I^T(\cdot))$$

§ 29.6. 定義：単純なナッシュ戦略

基底ゲーム G でナッシュ均衡を達成する戦略の組合せを s^* とし、繰り返しゲームで、この基底ゲームのナッシュ戦略を繰り返す戦略を s^* と表す。すなわち

$$s_i^* \in S_i, \quad t \in [0, T] : a_i^t(h^t) = s_i^*$$

と定義する。これを単純なナッシュ戦略と呼ぶことにする。

§ 29.7. 定理：基底ゲームのナッシュ均衡と繰り返しゲームのナッシュ均衡

すべての割引係数 $\delta \in [0, 1]$ と、すべての繰り返し回数 $T \in [2, \infty)$ について、単純なナッシュ戦略 s^* は、繰り返しゲーム $G^T(\delta)$ のナッシュ均衡となる。

注意：

この定理より、基底ゲームにナッシュ均衡が存在すれば、繰り返しゲームにおけるナッシュ均衡の存在も保証される。

第2節 無限繰り返しゲームのナッシュ均衡

基底ゲームのナッシュ均衡以外の戦略組合せも、繰り返しゲームではナッシュ均衡となる可能性がある。この節では、この問題を分析する。

§ 29.8. 定義：懲罰戦略

プレイヤー i のライバルプレイヤーが、プレイヤー i の利得を最小にする行動は以下のように定義される：

$$w_i = \min_{s_{-i}} \max_{s_i} p_i(s_i, s_{-i})$$

このときの利得 w_i を懲罰利得と呼ぶ。

プレイヤー i のライバルが取る戦略 r_{-i}^i は

$$r_{-i}^i = \arg \min_{s_{-i}} \max_{s_i} p_i(s_i, s_{-i})$$

と定義される。ライバルの戦略が最も望ましくないケースでも、プレイヤー i は w_i の利得は確保できる。

すべてのプレイヤーが w_i 以上の利得を得ている状況を考えると、以下のような集合を定義できる：

$$S = \{p_1(s), p_2(s), \dots, p_I(s) : s \in S, p_i(s) > w_i \text{ for all } i \in I\}$$

§ 29.9.例：クールノー寡占 モデル

限界費用 c は一定とする。

また、線形逆需要関数を仮定

$$p(q_1, q_2) = a - bq$$

ただし、 $q = q_1 + q_2$ とする。利潤は

$$\pi_i(q_1, q_2) = (a - bq - c)q_i$$

ただし、 $i=1,2$ である。これを微分すると、

以下の最適反応関数

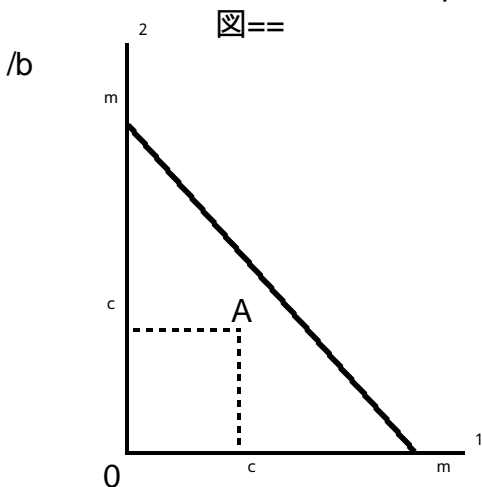
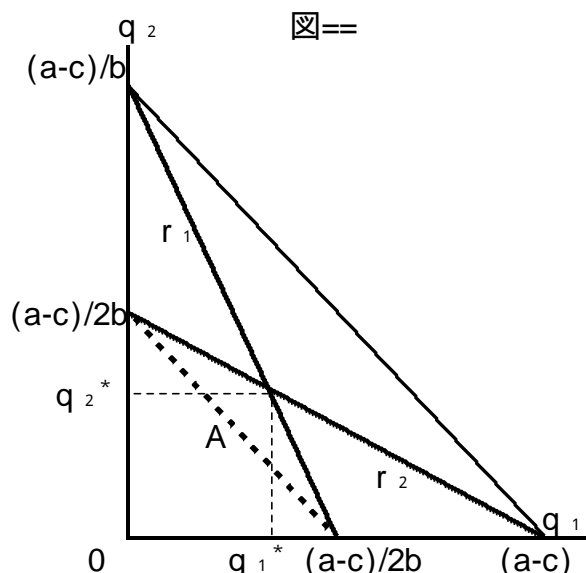
$$r_i(q_j) = [(a - c)/b - q_j]/2, \quad i = j$$

を得る。ただし、 $a > c$ とする。

これらの図解が左図である。

q_1^* と q_2^* がクールノー生産量

線分 A 上の点は独占生産量 $q^m = (a - c)/2b$



一方、左図は、2 企業の利潤である。

c はクールノー生産量の利潤

m は独占利潤

点 A がクールノー均衡利潤組合せ

線分 $m - m$ が独占利潤を 2 分している

クールノー複占での懲罰は

生産量を $q^{MP} = (a - c)/b$

とすることで、このときには

価格=限界費用となって、

ライバルの最適反応生産量 = ゼロとなる。したがって、懲罰利潤の組合せは原点で示され、懲罰利得以上の利得集合 () は原点を除く三角形 $m 0 m$ で示される。

§ 29.10.例：クールノー寡占

2 寡占企業が、生産量 (q_1^*, q_2^*) を生産することに合意したとする。ただし、生産量合計 $q^m = q_1^* + q_2^*$ とする。このときには、利潤合計は $\pi_1^* + \pi_2^* = \pi^m$ となっている。

このときには、戦略歴史は

$$h^t = ((q_1^1, q_2^1), (q_1^2, q_2^2), \dots, (q_1^{t-1}, q_2^{t-1}))$$

と表される。さらに、 $t-1$ 期の生産量組合せを

$$h^t(t-1) = ((q_1^{t-1}, q_2^{t-1}))$$

と示す。

§ 29.11.定理：クールノー寡占版のフォーク定理

以下の戦略組合せ (π_1^*, π_2^*) は、 ϵ が 1 に十分近ければ、() のナッシュ均衡となる：

$$\pi_1^* = (a_1^1(h^1), (a_1^2(h^2), (a_1^3(h^3), \dots$$

$$\pi_2^* = (a_2^1(h^1), (a_2^2(h^2), (a_2^3(h^3), \dots$$

ただし、

$$a_i^t(h^t) = \begin{cases} q^{MP} & \text{for } q_j : h^t(t-1) = (q^{MP}, q_j) \text{ or} \\ & \text{for } q_j = q_j^* : h^t(t-1) = (q_i^*, q_j) \\ q_i^* & \text{for その他のケース} \end{cases}$$

注意：

この戦略では、前期に q^{MP} を生産しているか、ライバルプレーヤーが協定生産量 q_j^* から乖離した(裏切った)ときには、 q^{MP} を生産する。したがって、一度でも、ライバルが協定生産量から乖離すれば、永久に q^{MP} を生産することになる。

このような戦略は trigger 戦略と呼ばれる。

§ 29.12.証明：

戦略組合せ (q_1^*, q_2^*) のときのプレーヤ i の利潤は $\pi_i(q_1^*, q_2^*)$ で示されるから、

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1^*, q_2^*) &= \pi_1(q_1^*, q_2^*) \\ \pi_2(q_1^*, q_2^*) &= \pi_2(q_1^*, q_2^*) \end{aligned}$$

であれば、ナッシュ均衡となる。

協定生産量 q_i^* を生産し続けたときの各期の利潤は π_i^* であるから

$$\pi_i(q_1^*, q_2^*) = \pi_i^* / (1 - \delta)$$

一方、協定生産量から乖離し(裏切って)、ライバルが懲罰生産量を生産し始めるまでの期間に得る利潤を π_i^s とすると、それ以降は利潤はゼロであるから、たとえば、プレーヤー 1 の乖離したときの利潤合計の現在価値は

$$\pi_1(q_1^s, q_2^*) = \pi_1^s$$

よって、 $\pi_i^* / (1 - \delta) = \pi_i^s$ となるほどに δ が 1 に近ければ、戦略組合せ (q_1^*, q_2^*) はナッシュ均衡となる。

§ 29.13.説明：

この証明は、条件 $q^m = q_1^* + q_2^*$ には依存していないから、この定理は、集合 (q_1^*, q_2^*) のどの点、すなわち懲罰状態(原点)以外の生産量の組合せ (q_1^*, q_2^*) に対しても成立する。言い換えれば、ナッシュ均衡という概念だけでは、どのような協調戦略 (q_1^*, q_2^*) がサポートされるかは、決められない。

§ 29.14.定理：民衆(みんな知ってる)定理 Folk Theorem

すべての基底ゲーム G とすべての利得ベクター $p = (p_1, p_2, \dots, p_I)$ $(p_i \in (0, 1))$ に対して、

(p_i) はナッシュ均衡 q^* を持ち、すべての $i \in I$ について $\pi_i(q^*) = p_i$

注意： すべてのプレーヤーが w_i を超える大きさの利得を得ている。

この定理の証明には trigger 戦略が用いられる。定理 § 29.11. を参照。

第3節無限繰り返しゲームのサブゲーム完全ナッシュ均衡

§ 29.15.説明：

前節の分析では、ライバルが協定生産量から乖離すれば、永久に生産量 q^{MP} を生産し続けることになるが、このときには、罰している企業の利潤はゼロであり、この脅し行動は、最適反応戦略ではない可能性がある。

§ 29.16.定義：

戦略歴史

$$h^t = (s^1, s^2, \dots, s^{t-1}) \in S^{t-1} \times S \times S \times \dots \times S$$

が与えられたときの、続く $T - t + 1$ 期間の未来歴史 continuation history $h^t = (h^t, s^{t+1}, \dots, s^T)$ を以下のように定義する：

$$h^t = (h^t, s^{t+1}, s^{t+2}, \dots, s^T)$$

このときのプレーヤー i の未来戦略は以下のように定義される：

$$\sigma_i(h^t) = (\sigma_i^t(h^t), \sigma_i^{t+1}(h^{t+1}), \sigma_i^{t+2}(h^{t+2}), \dots)$$

このとき、戦略歴史 h^t 以降の戦略組合せは

$$(h^t) = (\sigma_1(h^t), \sigma_2(h^t), \dots, \sigma_I(h^t))$$

と表され、利得も

$$(u_i(h^t)) = (u_1(h^t), u_2(h^t), \dots, u_I(h^t))$$

と定義される。

§ 29.17.定義：サブゲーム完全ナッシュ均衡

無限繰り返しゲーム (G) に対する戦略組合せ s^* が、以下の条件を満たすとき、サブゲーム完全ナッシュ均衡と言われる：

$s_i^*(h^t) = (s_1^*(h^t), s_2^*(h^t), \dots, s_I^*(h^t))$ が、すべての (t) (過去も未来も含む) 戦略歴史 $h^t \in S^{t-1}$ に対して、すべての $t \geq 1$ で、ナッシュ均衡となっている。

注意：これは、どんな歴史に対しても、未来戦略が、どの時点でもナッシュ均衡となることを求めているから、こけ脅かし 戦略の可能性を排除している。

§ 29.18.定理：Friedman

s^* を基底ゲーム G のナッシュ均衡とし、そのときのプレーヤー i の利得を $u_i(s^*)$ とする。このときには、

条件 $u_i^* > u_i(s^*)$ を満たす、 i のどんな利得ベクターに対しても、

ある割引係数 δ^0 が存在し、条件 δ^0 が成立するときには、

無限ゲーム (G) には、 $s_i^* = u_i^*$ となるような、サブゲーム完全ナッシュ均衡 s^* が存在する

§ 29.19.説明：

クールノーゲームでは、点 A より上の点は、サブゲーム完全なナッシュ均衡として実現することができる。このケースでは、乖離した場合には、以後はクールノー均衡点 (= ナッシュ均衡) が永久に続くことになる。

この理論の問題点は、基底ゲームのナッシュ均衡は、普通は 裏切り に対する懲罰にならない点である。

§ 29.20.定義：Abreu の Stick and Carrot 原則 (JET, 1993?)

裏切り行為に、より厳しい懲罰 を与えるサブゲーム完全戦略は、以下のように定義される：

あるプレーヤー i が (協調価格より低い価格を設定して) 裏切った場合は、一定期間 (懲罰期間)、すべてのライバルプレーヤーは懲罰戦略 (min-max 戦略 r_{-i}^i) を行う。

その期間の後には、協調価格に戻って、高い利潤 を得る。

§ 29.21.説明：

Stick and Carrot 戦略が、サブゲーム完全になる理由

懲罰戦略の期間が有限で、その後の 高い利潤 を得る期間が無限であるため、割引係数が 1 に近ければ、後者の方が大きくなる。

懲罰戦略期間は低利潤であるが、懲罰戦略がその後の 高い利潤 期間が永久に続くことを保証するから、 δ^0 が成立すれば、サブゲーム完全戦略となる。

注意：

プレーヤーが 3 人以上の場合で、懲罰期間中に、懲罰戦略中のプレーヤーが懲罰戦略から乖離すれば (裏切れば)、このプレーヤーに対しても、Stick and Carrot 戦略が取られる。

したがって、サブゲーム完全均衡でも、民衆定理が成立する。

§ 29.22.例：ベルトラン・パドックス (価格設定寡占ゲーム)

同質財市場で価格を設定する寡占を考える。平均費用は一定で限界費用に等しいとする。このときには、唯一のナッシュ均衡は、すべての企業が、価格 = 平均費用としている (したが

って利潤ゼロの状態にある)ときである(この正確な証明は Tirole, Industrial Organization にある)。

§ 29.23.例：価格設定寡占無限繰り返しゲームのサブゲーム完全均衡

価格設定寡占繰り返しゲームでは、懲罰戦略は価格 = 平均費用とすることで、これはナッシュ均衡であるから、Friedman の定理 § 29.18.によって、価格 > 平均費用となるようななどのような協調戦略も、サブゲーム完全なナッシュ均衡となる可能性がある。

第4節 有限繰り返しゲーム

§ 29.24.定理：

基底ゲーム G に、ユニークなナッシュ均衡戦略 s^* が存在して、
すべての $i \in I$ について、条件 $p_i(s^*) = w_i(\min_{s_{-i}} \max_{s_i} p_i(s_i, s_{-i}))$ が成立するときには、
有限回数繰り返しゲームのナッシュ均衡で達成される利得組合せは $(p_1(s^*), \dots, p_I(s^*))$ のみである。

§ 29.25.例：

ベルトランパラドックスによって、価格設定寡占ゲームでは、ナッシュ均衡は利潤ゼロ価格のみである。よって有限繰り返し価格設定寡占ゲームでも、ナッシュ均衡は全企業が平均費用に等しい価格を設定して利潤ゼロを得るゲームの繰り返しである。

§ 29.26.定理：有限繰り返しゲームのナッシュ均衡（サブゲーム完全ではない）

基底ゲーム G に、ナッシュ均衡戦略 s^* が存在して、
すべての $i \in I$ について、 $p_i(s^*) > w_i$ が成立するときには、
集合 $(\cdot)(\{p_1(s), \dots, p_I(s) : s \in S, p_i(s) > w_i \text{ for all } i \in I\})$
のどの点も、
が 1 に充分近く、 T が十分に大きければ、
有限繰り返しゲームのナッシュ均衡の利得となる。

注意：

繰り返しゲームのナッシュ均衡として支持される利得は、 $p_i(s^*)$ ではなく、 (\cdot) の任意の点である。ただし、1 番最後のゲームでは、基底ゲームのナッシュ均衡が実現される(懲罰戦略をとる機会がないため、協調戦略はサポートされない)。

この定理の懲罰戦略行動はサブゲーム完全な戦略ではないし、有限繰り返しゲームでは Stick and Carrot 戦略は成立しない。

§ 29.27.定理：有限繰り返しゲームのサブゲーム完全ナッシュ均衡

基底ゲーム G のナッシュ均衡 s^* がユニークであれば、有限繰り返しゲーム G^T のサブゲーム完全なナッシュ均衡 s^{*T} は、単純なナッシュ均衡(s^* の繰り返し)のみで、すべてのプレイヤー $i \in I$ について、

$$u_i(s^{*T}) = p_i(s^*)$$

となる。

§ 29.28.説明：

ユニークなナッシュ均衡を持つゲームが有限回繰り返される場合には、信用される credible 方法でライバルを脅すことはできない。しかし、以下の定理にあるように、ナッシュ均衡が 2 個以上ある場合には、脅しは credible となり、サブゲーム完全となる。

§ 29.29.定理：

s^* と s^{**} を、基底ゲームの2つのナッシュ均衡とし、すべてのプレーヤー $i \in I$ について $p_i(s^*) > p_i(s^{**})$ を満たすものとする。

このときには、ある割引係数 δ^0 と、期間 T^0 と (ただし $T^0 > 0$ で、 T^0 は δ^0 の関数) が存在し、条件 δ^0 と T^0 () が成立する有限ゲーム $\Gamma(T^0, \delta^0)$ に対しては、以下の命題が成立する：

ゲームのはじめの T^0 回で、 $i \in I : p_i > p_i(s^*)$ が成立する どのような利得組合せ s でも、サブゲーム完全なナッシュ均衡とすることができる。

§ 29.30.例：

以下のような2人ゲームを考える：

		プレーヤー 2		
		T	M	B
プレーヤー 1	T	4, 4	1, 5	0, 2
	M	5, 1	3, 3	0, 0
	B	2, 0	0, 0	1, 1

このゲームには、ナッシュ均衡は、(M,M)と(B,B)の2つある。

しかし、戦略組合せ(T,T)が、2人のプレーヤーに best の利得組合せ(4,4)をもたらすが、これはナッシュ均衡ではないから、1度かぎりのゲームであれば、実現されない。

しかし、このゲームが2回繰返されるときには、以下のような戦略で、始めのゲームで戦略組合せ(T,T)が実現される：

$s^* = (s_1^*, s_2^*)$ 、ただし、 $s_i^* = (a_i^1(h^1), a_i^2(h^2))$ 、 $i=1,2$

ただし、 $i=1,2$ に対して

$$a_i^1(h^1) = T$$

$$a_i^2(h^2) = \begin{cases} M & \text{for } h^2 = (T, T) \\ B & \text{for 其他} \end{cases}$$

この戦略に対する 最適な乖離戦略 $s^\#$ は

1回目にM、2回目にB

である。このときのプレーヤー1の利得合計 $v_1^\#$ は

$$v_1^\# = p_1(M, T) + p_1(B, B) = 5+1=6$$

一方、戦略 s^* の利得合計 v_1^* は

$$v_1^* = p_1(T, T) + p_1(M, M) = 4+3=7$$

となる。同じ議論はプレーヤー2にも成立するから、戦略 s^* は、サブゲーム完全なナッシュ均衡となって、ゲームの始めの段階では、戦略(T,T)が支持される。