

# 自動制御演習

fueta.munehiro

2004 年 2 月 3 日

## 目次

1	自動制御演習 ( 1 )	2
1.1	第一問 . . . . .	2
1.2	第二問 . . . . .	2
1.3	第三問 . . . . .	2
1.4	第 4 問 . . . . .	3
1.5	第 5 問 . . . . .	4

# 1 自動制御演習 ( 1 )

## 1.1 第一問

$\cos \beta t$  をラプラス変換する。

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos \beta t \cdot e^{-st} dt + j \int_0^{\infty} \sin \beta t \cdot e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} (\cos \beta t + j \sin \beta t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{j\beta t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-j\beta)t} dt = \left[ \frac{s}{-(s-j\beta)} e^{-(s-j\beta)t} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= 0 + \frac{1}{s-j\beta} = \frac{(s+j\beta)}{(s-j\beta)(s+j\beta)} = \frac{s+j\beta}{s^2+\beta^2} = \frac{s}{s^2+\beta^2} + j \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \end{aligned}$$

したがって、 $\cos \beta t$  のラプラス変換は  $\frac{s}{s^2+\beta^2}$  である。

## 1.2 第二問

単位ステップの重ね合わせ。1 は普通の単位ステップ関数なのでラプラス変換すると、 $\frac{1}{s}$  である。2 は 1 の  $t$  軸対称  $t = T$  だけ遅らせたものだから  $-\frac{1}{s}e^{-Ts}$  である。したがって

$$\frac{1}{s}(1 - e^{-Ts})$$

## 1.3 第三問

逆ラプラス変換を求めよ。

(1)

$$F_1(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+4)} \equiv \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

$$A_1 = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+4)} \cdot (s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{2}{1 \times 3} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+4)} \cdot (s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{-1 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_3 = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+4)} \cdot (s+4) \Big|_{s=-4} = \frac{-1}{-3 \times (-2)} = -\frac{1}{6}$$

$$F_1(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4}$$

$$f_1(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

(2)

$$F(t) = \frac{s+4}{(s+1)^2(s+3)(s+5)} = \frac{A_{11}}{s+1} + \frac{A_{12}}{(s+1)^2} + \frac{A_2}{s+3} + \frac{A_3}{s+5}$$

$$A_{11} = \frac{d}{ds} \frac{s+4}{(s+1)^2(s+3)(s+5)} \cdot (s+1)^2 \Big|_{s=-1} = \frac{-s^2-8s-17}{(s+3)(s+5)^2} \Big|_{s=-1} = -\frac{5}{32}$$

$$A_{12} = \frac{s+4}{(s+1)^2(s+3)(s+5)} \cdot (s+1)^2 \Big|_{s=-1} = \frac{3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$$

$$A_2 = \frac{s+4}{(s+1)^2(s+3)(s+5)} \cdot (s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{1}{2^2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

$$A_3 = \frac{s+4}{(s+1)^2(s+3)(s+5)} \cdot (s+5) \Big|_{s=-5} = \frac{-1}{-4^2 \times (-2)} = \frac{1}{32}$$

$$F_2(t) = -\frac{5}{32} \frac{1}{s+1} + \frac{3}{8} \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{8} \frac{1}{s+3} + \frac{1}{32} \frac{1}{s+5}$$

$$f_2(t) = \frac{5}{32} e^{-t} + \frac{3}{8} t e^{-t} + \frac{1}{8} e^{-3t} + \frac{1}{32} e^{-5t}$$

#### 1.4 第4問

(1)

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = 1, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} + 4sX(s) - x(0) + 3X(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 X(s) - 0 - 0 + 4sX(s) - 0 + 3X(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2 + 4s + 3)X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

$$= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+3}$$

$$A_1 = X(s) \cdot s \Big|_{s=0} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = X(s) \cdot (s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{(-1) \times 2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_3 = X(s) \cdot (s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{1}{(-3) \times (-2)} = \frac{1}{6}$$

$$X(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+3}$$

$$x(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{-2t}$$

(2)

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4x(t) = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = 2$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} + 4sX(s) - x(0) = \frac{s}{1+s^2}$$

$$s^2 X(s) - s - 2 + 4X(s) = \frac{s}{1+s^2}$$

$$(s^2 + 4)X(s) = \frac{s}{1+s^2} + 2 + s$$

$$X(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} + \frac{s+2}{s+4}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$x(t) = \frac{2}{3} \cos 2t + \sin 2t + \frac{1}{3} \cos t$$

## 1.5 第5問

1.

2.