1　ガロア

1.1　ガロアの生涯

ガロア―エヴァリスト (Evarist Galois, 1811.10.25～1832.5.31) はフランス、パリ郊外のブール・ラ・レーヌ (Bourg-la-Reine) に生まれ、1832 年 5 月 31 日、パリにおいてわずか 20 年と 7 ヶ月という生涯を終えた。彼は革命と数学の為に生き、女の為に死んだ。

ガロアの両親は共にインテリでその頃重要だとされていた分野（哲学、古典文学、宗教）の優れた教育を受けていた。数学に長けたガロアを生んだ両親のどちらにも数学的才能に関する記録は無いそうだ。

1823 年 10 月 6 日、ガロアはパリの（現存する）有名な高等中学校ルイ・ル・グランの第 4 級[*1]に入学した。はじめの２年間は多くの学業上の成功を収めた。彼は全国作文コンクールで賞をもらい、３回入賞している。学業でもラテン語に最優秀賞のほか、３つの優秀賞を得るほどだ。第 3 級を終える頃は好成績であったのに、第 2 級での成績が思わしくなく校内の問題となっていたようだ。

そこで学校側は第 2 級の留年を勧めたがガロアの父親が成績の悪いのは健康上の理由であるとし進学を押し切った。しかし、学習意欲が湧かず、やはり留年することとなった。留年するまでガロアは数学には興味が持たず、数学クラスに顔を出していなかったらしいが、留年後、努力無しに成績は上がり、時間に余裕ができたガロアは、数学準備級[*2]授業に出席することにした。ここで幾何学の学習を始めてから、この学問に特別な才能を持っていたことを自覚し、数学にのめり込むようになる。当時使われていた教科書はルシャンドルの「幾何学原論」であったが、普通の人が少なくとも 1 年はかかるところを伝説によればたった 2 日ほどで小説のよ

[*1] ルイ・ル・グラン校は王立コレージュと呼ばれており、学年の呼び方が日本と逆で入学時の最低学級が第 6 球で、進級すると共に第 5 級、第 4 級 . . . と進み、第 1 級を終えて卒業する。

[*2] の

うに読み終え、しかもその内容を正確に記憶していたそうだ。演習問題も難なく解いていたようだ。ガロアは数学との出会いによってそれに夢中になり、他の科目を無視するようになる。フランスでは文書を大切に保存する習慣が古くからあり、どの先生が彼をどのように評価し、成績はどうであったかというような記録も半永久的に保存されているようで、留年して数学準備級に入った学期の代表的なコメントは：

宗教 ··· 良好	品行 ··· 良好
素質 ··· 恵まれている	学業 ··· 維持されている
進歩 ··· 著しい	性格 ··· 良、しかし奇異

であるが、その次の学期のコメントは：

宗教 ··· 良好	品行 ··· まあ良好
素質 ··· 恵まれている	学業 ··· 移り気

進歩 ··· あまり満足すべきものではない
性格 ··· 陰険 (caché) で奇異

となっている。さらに次の学期に性格は：

何かを隠しているようで変わり者である

とあって年月と共に評価は低下しているようである。

その後エコール・ポリテクニークの受験に 2 度も失敗し、何度も提出した論文は紛失にあってしまったり、パリ・アカデミーに提出した論文は、コーシーやフーリエにも理解されなかったという。

これだけ嫌な体験を重ねていったガロアは徐々に当時起こっていた革命の波にその身を投じたのです。過激な活動を行って要注意人物とされ、ガロアは二度も投獄を余儀なくされた。彼の最期もまた悲劇的なものだった。1932 年 5 月 30 日、女性問題のもつれから決闘を行い、それによって腹部に傷を負いそのまま放置されたのだった。翌日に発見されましたがそのまま死亡。20 歳の若さだった。

その決闘の前夜にガロアは共和主義者の友人たちに宛てて手紙を書いている。

> 愛国者諸君、ぼくの友人諸君、ぼくが祖国のため以外のことで死んでゆくことをせめないでほしい。
> ぼくは汚らしいコケットとこのコケットにだまされた 2 人の犠牲者となって死ぬ。ぼくの命が消え去るのは、このみじめなばか話のためである。
> おお*!*、なぜ、こんなつまらないことのために死なねばならないのか*!*
> ぼくは、あらゆる方策をとって、この挑発を払いのけようとしたが、できず、やむなく強いられ、これに屈したものであることを天に誓って言う。冷静に聞くような状態にほとんどない人びとに向って、痛ましい真実を告げたことをぼくは悔やんでいる。しかし結局、ぼくはそれを言ったのだった。ぼくは迷いと、そして愛国者の血のはっきりとした意識を持って墓へ行く。
> さようなら*!* ぼくは、民衆の幸福のためにもっと生きることができたであろうに。
> 僕を殺した人々を許したまえ。彼らは誠実な人たちなのだから。

また友人のシュヴァリエに送った手紙の中で、論文の内容を簡潔に述べられている。そのなかには、

> 拝啓（Mon cher Ami）
> ぼくは、解析学において、いくつかの新しい成果をあげた。

あるものは方程式論に関係しており、他のものは積分関数（fonction Intégrale）に関係している。

方程式論においては、どんなときに方程式が根号によって解けるかを探求した：こうしてぼくは、この理論を深めることができ、混合によって解きえないときでも方程式に対する可能な変換（transformation）のすべてを書き表すことができるようになった。

これらすべてから 3 つの論文を作ることができるだろう。

と書かれている。

のちに、ガロアの弟のアルフレッドと親友のシュバリエは数学の論文を苦労して書き写し、ガウスやヤコビなどにそれを送っている。それが死語 14 年経った 1846 年にリュービルの手に渡り、彼が数ヶ月かけてその「解読」を試みその重要性に気づき始めた。そして、再構築して出版する。実はこのときまでガロアの業績は世間に知られることはなかった。

ガロアが刑務所にいたときのみならず死の直前までに言った数学的研究の跡をとどめる断片もたくさん残っている。あれほどの激動の一生の中で業績を残しえたという事実は、ガロアの想像力の異常な豊かさを証明するものであるだろう。ガロアについては伝説や神話をデッチアゲたりしているが、ガロアが数学史上における最もオリジナルなアイデアの 1 つを生み出したのは事実であり本当に偉大な数学者である。

代数方程式の解の構造を調べるために置換群を利用し、群の有用性を示した。ガロア群、群、部分群、正規部分群、体、拡大という用語を導入した。

1.2 ガロア理論について

1 章に述べたように、1824 年、数学者アーベルは「5 次以上の一般の方程式を解くことはできない」ということを示した。この時彼は、同時に「5 次以上の方程式が解けるための必用十分条件」も求めてみようとしていた。しかし、この考えはアーベルの早すぎる死によって断たれてしまった。

これに光明を投じたのがガロアでした。2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ の解の公式は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

である。3 次、4 次の方程式の解の公式はカルダーノやフェラーリによって発見され、どんな 4 次以下の方程式も**代数的に解ける**[*3]ことが分かった。

5 次以上の方程式の中には代数的に解けないものがあり、公式が存在しないことを意味する。この結論を証明するためにガロアは方程式そのものを考えず、**方程式の背景に潜む軍**という集合を考えていった。現代では「ガロア理論」で知られており、これは容易にこのアーベルの残した問題を解いてしまうのだ。ガロア理論は今日での代数学の基礎となっている。

ここで、余談ですが、ガロアのノート書き残した短いノートを要約したものに次のように書かれている。

> この発見はアーベルとは独立であったことを主張するとともに、アーベルの死は「学問のための最も大きな損失の一つ (une des plus grandes pertes qu’aura faites la science)」であり、そのために自分がこの問題の解答者となったことは、自分にとっては「つらい (pénible または douloureux) 」ことなのである。

もしガロアとアーベルが共同で研究していたら、凄い発見が更にあったでしょうね。

[*3] 方程式の係数どうしの四則演算と n 乗根を用いて解くこと

1.3　5 次方程式を解こう

補題 1.11(可解拡大性)
もし、（有理数体（Q）上の）n 次代数方程式の「解の公式」があれば、そのアルゴリズムのみによる自然数 l があって、任意の n 次代数方程式の根の少なくとも 1 つは $Q(\zeta_l)$ 上のある可解拡大に含まれる。

命題 f を K_0 上 n 次既約多項式、ω_1 を $f(x) = 0$ の一つの根とする。$f(x) = 0$ の解を $\omega_1, \ldots, \omega_n$ とするとき、$L = K_0(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ は ω_0 を含む K_0 上の最小のガロア拡大である。また、$G(L/K_0)$ の元は $\omega_1, \ldots, \omega_n$ の置換として働き、単射準同型 $G(L/K_0) \to \Sigma_n$ を得る。

Proof. M を K_0 上のガロア拡大で ω_1 を含むとしよう。このとき、$\omega_1, \ldots, \omega_n$ は全て M に含まれることを示す。

$$\sigma_i : K_0[x]/(f) \ni x \mapsto \omega_i \in M$$

は K 準同型を定め、その像は $K_0(\omega_i)$ である。このとき、

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \circ \sigma_j^{-1} : K_0(\omega_j) \mapsto K_0(\omega_i)$$

は K 同型であるが、これは K 同型 $\bar{\sigma}_{ij} : \bar{K} \to \bar{K}$ に拡張する。M はガロアであるから、$\bar{\sigma}_{ij}(M) = M$、すなわち、$\omega_i = \sigma_{i1}\omega_1 \in M$ である。したがって、$L \subset M$ がいえる。また、任意の K 同型 $\tau : \bar{K} \to \bar{K}$ について、$\omega_1, \ldots, \omega_n$ を置換することが言えれば、L 自身がガロアであることはすぐ従う。しかし、その主張は $0 = \tau f(\omega_i) = f(\tau\omega_i)$ であることからすぐ従う。また、この置換が定まれば、K 同型 $\tau : L \to L$ はただ一つ決まるので、$G(L/K) \to \Sigma_n$ の単射性もよい。

補題と命題により、n 次代数方程式の解の公式があれば、有理数体上の

1.4　二つのプレート

最後に一つの話に触れておきます。
ガロアの父はブール・ラ・レーヌの町長を務めており、

> 感謝する住民より、15 年間町長であり 1829 年に亡くなられたガロア氏を記念して

と書かれたプレートが掛かっている。今もこの町にはガロア通り (rue Galois) と呼ばれる通りがあるが、それはエヴァリストではなく彼のニコラ・ガブリエル・ガロア氏を記念するためのものである。なお彼の経営していた学校、すなわちエヴァリストの生家は、当時の町名では単に「大通り」、今日ではルクレール将軍通り（ルクレール将軍は第 2 次世界大戦の英雄のなで、この名のついた町はフランスの多くの都市に見られる）と呼ばれる町の 20 番地であり、当時の建物は建て替えられたが、そこには

> 20 歳で亡くなった著名なフランスの数学者エヴァリスト・ガロア　1811-1832 ここに生まれる

と書かれたプレートが今日も見られる。
さらにガロア広場と呼ばれる広場にもエヴァリストのプレートがある。

参考文献

[1] http : //www.com.mie – u.ac.jp/ kanie/tosm/humanind/jinmei$_k$.htm

[2] http : //www80.sakura.ne.jp/ aozora/taiwa/node17.html
[3] http : //www.math.sci.osaka – u.ac.jp/ akitaka/jyugyo/jyoho/rep5.txt
[4]「ガロアの時代 ガロアの数学」 彌永昌吉著
[5]「ガロアの神話」 トニー・ロスマン他著作　山下順一/訳編

表 1: ガロアの生涯

時期	ガロアの年齢	出来事
1811 年 10 月 25 日	0 歳	ガロア生誕
1823 年 9 月	11 歳	パリのルイ・ル・グラン校第 4 級に入学。
1826 年 7 月	14 歳	修辞級に進学するが校長の判断により原級に復し、学業に余裕が生じたので数学準備級にも入る。数学への能力を自覚。