

人間はベイズの確率更新ができないか？
- 尤度評価と情報統合 -

Cannot people answer Bayesian solutions to
probability updating problems?: Estimation of
likelihood and information integration

井原二郎¹

1992 年 12 月 15 日 受付

Abstract

It is believed that people cannot answer Bayesian solutions to Bayesian probability updating problems. But, wait! Is it really true? The essential requirement of the traditional experiments on Bayesian probability updating is the calculation of the conditional probability. The idea of Bayesian scheme for probability updating, however, has nothing to do with the calculation of the conditional probability. The key information-processing of Bayesian scheme for probability updating is

- Estimation of the likelihood of hypotheses, and
- Integration of the following two kinds of information, i.e., a prior probability and likelihood with the mathematical multiplication.

This paper presents the results of the experiment using a variant version of Taxi Problem which show the following:

- People could answer Bayesian solution,
- People could estimate the likelihood of the hypotheses, and
- People could integrate the two kinds of information with the multiplication.

¹情報科学部 認知科学研究室 Eamil: ihara@etl.go.jp

1 はじめに

3 囚人問題等の問題で良く知られているベイズ的確率更新問題にベイズ解を出すことは極めて困難であることが多くの実験的研究で示され、人間はベイズ的確率更新ができないことが定説となっている [1]。

しかしながら、それは本当であろうか？ ベイズ的確率更新問題に関する従来の実験の実質は条件つき確率の計算の技能のテストであったと考えられるが、ベイズ的確率更新の発想と条件つき確率の計算とは、2 節で述べるように、無関係である。したがって、2 節で述べるベイズ的確率更新の鍵である情報処理、

1. 仮説の尤度評価
2. 事前確率と尤度の積による統合

ができる可能性は残されている。

本稿では、これらの情報処理およびベイズ的確率更新ができるか否かをあらたに調べた実験の結果を報告する。実験にはタクシー問題の変形版を用いた。

2 ベイズ的確率更新

ベイズ的確率更新の発想は2種類の情報、すなわち、事前確率と尤度の積による統合である [2]、[3]。つまり、

$$\text{事後確率} = \quad \times \text{事前確率} \times \text{尤度} \quad (1)$$

である。ここで、 \quad は正規化のための比例係数である。(1) 式は、「事前確率の尤度による重み付け」とも「尤度の事前確率による重み付け」とも読むことができる。本稿では、両者を表すために「統合」という用語を用いる。

尤度とはデータから仮説へ向かう関係であり、データが仮説を支持する度合を表す量である。仮説からデータへ向かう関係を「演繹的關係」と呼ぶならば、尤度は「帰納的關係」と呼ぶことができる。この演繹的關係をデータ D の関数である条件つき確率 $P(D|H)$ (H : 仮説) で表すならば、尤度は $L(H|D)$ と表される仮説 H の関数であり、 $P(D|H)$ に比例している。ここで注意すべきことは尤度は確率ではないことである。

この演繹的關係を表す情報を「関係情報」と呼ぶことにする。関係情報を逆方向に見て尤度を読みとることを「仮説の尤度評価」と呼ぶことにする。

ベイズ的確率更新では、この関係情報が担っている尤度を利用してデータから情報を取り込み事前確率を帰納的に修正する。

ベイズ的確率更新の鍵となる情報処理は、

1. 関係情報を逆向きに読むことが必要な仮説の尤度評価
2. 2種類の情報、すなわち、事前確率と尤度を積で統合する処理

である。

3 実験

3.1 方法

タクシー問題の変形版からなる 6 種類の冊子 1 ~ 6 を使って集団実験を行なったが、冊子 1、2、4 の結果を取り上げる。冊子 1 はベイズ的確率更新の発現の程度を調べることを目的とした問題（教示無し条件）、冊子 2 は仮説の尤度評価を調べることを主目的とした問題であり、冊子 4 は「重み付け」の教示の効果を調べることを目的とした問題である。

冊子 2 では、仮説の尤度評価の後で、「証言能力検査の結果を考慮して」という教示（証言能力検査教示と呼ぶ）を与えて冊子 1 と同じ問題の回答を求めた。冊子 4 では、「証言能力検査の結果で事故統計を重み付けする方法を工夫して」という教示（重み付け教示と呼ぶ）を与えて冊子 1 と同じ問題の回答を求めた。各冊子とも、（1）事後確率の比、および、（2）（1）の比の正規化の 2 種類の回答を求めた。また、各冊子とも回答の直後（次頁）で理由を尋ねた。

冊子 2 の仮説の尤度評価では、（1）定性的評価として、事故を起こしたタクシーの色を尋ねた、（2）定量的評価として、証言が各仮説（青と黒）を支持する度合の比を尋ねた。回答の直後（同じ頁）で理由を尋ねた。

3.2 題材

冊子 1

1 頁

タクシーといえば、青色のものと黒色のものだけしか走っていない都市での話である。

ある雨の夜、1 台のタクシーが事故を起こし、逃走した。警察の努力により、ついに、この事故の目撃者を 1 人だけ見つけることができた。この目撃者は、タクシーの色について、『青色だったと思う』と証言した。

裁判所は、以下のような証言能力検査を実施した。

この目撃者に、当夜と同様な状況で、それぞれの色のタクシーを見せては色を尋ねるというテストを多数回繰り返した。その結果、この目撃者が「青色だと思う」と答える比率は、青色のタクシーを見せた場合には 80 %、黒色のタクシーを見せた場合には 30 %であることが分かった。

なお、この都市での当夜と同様なタクシー事故の統計によると、青のタクシーの事故数と黒のタクシーの事故数の比は、1 : 2 である。

問 1 事故を起こしたタクシーが青である確率と黒である確率を求めて下さい。

（1）答を比で書いて下さい。

青である確率 : 黒である確率 = :

（2）（1）の比の和が 1 になるように工夫して確率を求めて下さい。

青である確率 =

黒である確率 =

2 頁

質問 1 問 1 の確率をどのように考えて求めたか説明して下さい。

冊子 2

1 頁

問題文は冊子 1 の 1 頁の問題文から下記の部分を削除したものである。

『なお、この都市での当夜と同様なタクシー事故の統計によると、青のタクシーの事故数と黒のタクシーの事故数の比は、1 : 2 である。』

問 1 事故を起こしたタクシーは何色だと思いますか？

答 _____

そう考える理由を教えてください。

2 頁

問 2 事故を起こしたタクシーの色には青と黒の 2 つの可能性があります。『青色だったと思う』という目撃者の証言は、それぞれの可能性をどの程度支持していると思いますか？ 答を比で示して下さい。ただし、支持の度合が 0 であるのは、証言が可能性を完全に否定している場合です。

青色のタクシーが事故を 起こした可能性を支持し ている度合	：	黒色のタクシーが事故を 起こした可能性を支持し ている度合	=	：
-------------------------------------	---	-------------------------------------	---	---

上で答えた比に決めた理由を教え下さい。

3 頁

問題文は冊子 1 の 1 頁の問題文と同じである。

問 3 証言能力検査の結果を考慮して、事故を起こしたタクシーが青である確率と黒である確率を求めて下さい。

回答欄は冊子 1 の 1 頁の回答欄と同じである。

4 頁

質問 1 問 3 の確率をどのように考えて求めたか説明して下さい。

冊子 4

1 頁

問題文は冊子 1 の 1 頁の問題文と同じである。

問 1 証言能力検査の結果で事故統計を重み付けする方法を工夫して、事故を起こしたタクシーが青である確率と黒である確率を求めて下さい。

回答欄は冊子 1 の 1 頁の回答欄と同じである。

2 頁

質問 1 問 1 の確率をどのように考えて求めたか説明して下さい。特に、「重み付け」の意味を

どのように考て確率を求めたか教えて下さい。

3.3 被験者

体育系の学部学生 150 名が集団実験に参加した。各冊子とも 50 名の被験者を割り当てた。

4 結果と考察

冊子 1、2、4 の有効回答者数は、それぞれ、43 名（42 名が 1 年生、1 名が 4 年生）、48 名（全員 1 年生）、48 名（全員 1 年生）であった。

4.1 更新解

回答、回答時のメモおよび理由記述に基づいて更新解を同定した。事後確率の比の正規化は半数以上の被験者が出来ていなかったのもので事後確率の比を答とした。冊子 1、2、4 で、それぞれ、35 名、40 名、45 名の更新解を同定できた。

4.1.1 更新解の分類

更新解を、まず、2 つのカテゴリーに分類した：（1）統合解と（2）非統合解（表 1 参照）。さらに、統合解を統合の仕方にしたがって 3 つのサブカテゴリーに細分類した：（1）正則統合解、（2）変則統合解および（3）匙加減統合解。非統合解は 2 つのサブカテゴリーに細分類した：（1）尤度解および（2）不変解。

まず、非統合解について説明する。尤度解には、（1）正則尤度解、（2）変則尤度解、および、（3）主観的尤度解が含まれる。正則尤度解とは、いわゆる尤度のことで、本実験の場合には 8 : 3 である。変則尤度解とは、証言能力検査結果（関係情報）の 80 % と 30 % を四則演算で変形した解である。例えば、3 : 1（正答率：誤答率）、11 : 9（青と答える率：黒と答える率）など。主観的尤度解とは、証言能力検査結果に主観を交えて得られた解である。次のデータがこの解の 1 例である。5 : 5（理由記述：目撃者は青色と言っているけど、黒色のタクシーというのも 30 % の確率があるので確かではない）。不変解とは事故統計の比 1 : 2 である。

次に、統合解について説明する。正則統合解とは、任意の尤度解（正則尤度解、変則尤度解、および、主観的尤度解） $a : b$ と事故統計 1 : 2 を $a \times 1 : b \times 2$ のように積で統合した解である。使用される尤度解により 3 種類の正則統合解が得られる：（1）正則尤度正則統合解、（2）変則尤度正則統合解、および、（3）主観的尤度正則統合解。正則尤度正則統合解がベイズ的更新解であり、本実験の場合には 4 : 3 である。

変則統合解とは、任意の尤度解 $a : b$ と事故統計 1 : 2 を、正則統合解とは異なるやり方で、四則演算で統合した解である。例えば、 $a \times 2 : b \times 1$ 、 $a + 1 : b + 2$ など。使用される尤度解により 3 種類の変則統合解が得られる：（1）正則尤度変則統合解、（2）変則尤度変則統合解、および、（3）主観的尤度変則統合解。

匙加減統合解とは、事故統計と任意の尤度解を適当に増減して統合した解である。次のデータがこの解の 1 例である。7 : 3（理由記述：目撃者に対する証言能力検査の結果、青のタクシーを見

た時 80 %、黒のタクシーを見た時 30 % [「青」] と答えた。初めに、事故を起こしたタクシーの割合を 青：黒 = 8 : 3 としていたが、この都市の事故統計で 青：黒 = 1 : 2 という割合がでていたので、青：黒 = 7 : 3 とした。[] は引用者)。これからも、同様に、使用される尤度解にしたがって 3 種類の解が得られる。

統合解には、この他に、積和統合解がある。これは、

$$8 \times 1 + 3 \times 2 : 2 \times 1 + 7 \times 2 = 14 : 16 = 7 : 8 \quad (2)$$

という解である。証言が「青」の場合のベイズ的更新解が $8 \times 1 : 3 \times 2$ で、証言が「黒」の場合のベイズ的更新解が $2 \times 1 : 7 \times 2$ である。これらを和で統合した解が積和統合解である。

なお、以下の () 中の % の値は、特に断らない限り、同定された更新解の総計に対する割合である。

4.1.2 教示無し条件 (冊子 1) の特徴

教示無し条件の更新解の特徴は、ベイズ的更新解 (4 : 3) と正則尤度解 (8 : 3) の回答者が、それぞれ、14 名 (40 %) いたことである。タクシー問題で正則尤度解が発現し易いことは良く知られている [4]。Gigerenzer [5] は設問を頻度論的な表現にするとベイズ解が発現し易くなると報告しているが、本実験のように設問が頻度論的な表現でない場合にベイズ解が発現し易いという報告は見当たらない。

事後確率の比を正規化できない被験者は、有効回答者 43 名中 28 名 (65 %) で、ベイズ的更新解を出した被験者 14 名中 8 名いた。このことから、確率推定の 1 つの隘路は正規化にあると推測できる。

統合解の回答者は 17 名 (49 %) で、ベイズ的更新解を除く統合解の回答者は 3 名 (9 %) であった。

全 14 種の更新解のうち最も多く発現した解の順位は、第 1 位がベイズ的更新解 (14 名) と正則尤度解 (14 名) で、第 3 位が正則尤度変則統合解 (3 名) であった。

4.1.3 証言能力検査教示条件 (冊子 2) の特徴

証言能力検査教示条件の更新解の特徴は、ベイズ的更新解が 7 名 (18 %) に、正則尤度解が 8 名 (20 %) に減り、新たに匙加減統合解の回答者が 8 名 (20 %) および主観的尤度解の回答者が 6 名 (15 %) 現れたことである。主観的尤度を用いる更新解が発現したことは他の 2 条件では見られないこの条件に固有の特徴である。

事後確率の比を正規化できない被験者は、有効回答者 48 名中 26 名 (54 %) で、ベイズ的更新解を出した被験者 7 名中 4 名いた。

統合解の回答者は 21 名 (53 %) で、ベイズ的更新解を除く統合解の回答者は 14 名 (35 %) であった。

全 14 種の更新解のうち最も多く発現した解の順位は、第 1 位が正則尤度解 (8 名)、第 2 位がベイズ的更新解 (7 名)、第 3 位が主観的尤度解 (6 名) であった。

表 1: 同定された更新解（単位：名）

（ A ）教示無し条件（冊子 1）の更新解 *

尤度	統合解				非統合解			
	正則統合解	変則統合解	匙加減統合解	小計	尤度解	不変解	小計	総計
正則尤度解	14	3	0	17	14	－	14	31
変則尤度解	0	0	0	0	2	－	2	2
主観的尤度解	0	0	0	0	0	－	0	0
－	－	－	－	－	－	2	2	2
計	14	3	0	17	16	2	18	35

* 統合解の 1 種である積和統合解（0 名）を除く。

（ B ）証言能力検査教示条件（冊子 2）の更新解 **

尤度	統合解				非統合解			
	正則統合解	変則統合解	匙加減統合解	小計	尤度解	不変解	小計	総計
正則尤度解	7	2	5	14	8	－	8	22
変則尤度解	3	0	0	3	0	－	0	3
主観的尤度解	0	1	3	4	6	－	6	10
－	－	－	－	－	－	5	5	5
計	10	3	8	21	14	5	19	40

** 統合解の 1 種である積和統合解（0 名）を除く。

（ C ）重み付け教示条件（冊子 4）の更新解 ***

尤度	統合解				非統合解			
	正則統合解	変則統合解	匙加減統合解	小計	尤度解	不変解	小計	総計
正則尤度解	13	3	2	18	6	－	6	24
変則尤度解	6	2	0	8	7	－	7	15
主観的尤度解	0	0	0	0	0	－	0	0
－	－	－	－	－	－	3	3	3
計	19	5	2	26	13	3	16	42

*** 統合解の 1 種である積和統合解（3 名）を除く。

4.1.4 重み付け教示条件（冊子4）の特徴

重み付け教示条件の特徴は、ベイズ的更新解が13名（29％）、変則尤度解が7名（16％）、変則尤度正則統合解が6名（13％）、正則尤度解が6名（13％）、積和統合解が3名（7％）いたことである。積和統合解は他の2つの条件では発現しなかった解である。

事後確率の比を正規化できない被験者は、有効回答者48名中24名（50％）で、ベイズ的更新解を出した被験者13名中6名いた。

統合解の回答者は29名（64％）で、ベイズ的更新解を除く統合解の回答者は16名（36％）であった。この条件の場合に統合解が最も多いのは、重み付け教示の効果と考えられる。

全14種の更新解のうち最も多く発現した解の順位は、第1位がベイズ的更新解（13名）、第2位が変則尤度解（7名）、第3位が変則尤度正則統合解（6名）と正則尤度解（6名）であった。

4.1.5 3条件に共通した結果

3条件に共通して言えることは、

1. ベイズ的更新解の回答者数は全14種（積和統合解を含む）の更新解のなかで第1位あるいは第2位であった。
2. ベイズ的更新解は10種（積和統合解を含む）の統合解のうち最も多く発現した解であった。
3. 正則統合解の回答者数は変則統合解の3倍以上いた。また、3種類の統合解（正則統合解、変則統合解、および、匙加減統合解）のうち正則統合解の回答者数が最も多かった。
4. 統合解において最も多く現れた尤度解は正則尤度解であった。また、全体において、最も多く現れた尤度解は正則尤度解であった。
5. 半数以上の被験者は事後確率の比を正規化できなかった。

の5点である。

4.2 仮説の尤度評価

4.2.1 定性的評価

定性的評価として、事故統計を与えずに、事故を起こしたタクシーの色の推定とその理由を求めた。表2に定性的尤度評価の結果を示す。尤度評価と整合的な「青」と推定した被験者は48名中40名（83％）いた。青と推定した被験者のうち、理由として証言能力検査結果を挙げている者が31名（ $31/40=78\%$ ）いた。また、理由として証言能力検査結果を挙げている被験者は48名中34名（71％）いた。これらの結果から、仮説の定性的評価は良く出来ると言える。

表 2: 仮説の尤度評価（単位：名）

（ A ）定性的評価

理由	事故タクシーの色の推定				
	青	黒	青あるいは黒	分からない	計
証言能力検査結果	31	1	1	1	34
その他	9	4	0	1	14
計	40	5	1	2	48

（ B ）定量的評価

理由	尤度評価										
	8:3	6:4	8:2	7:3	1:1	11:9	3:1	2:1	9:1	3:2	計
証言能力検査結果	13	0	3	0	0	3	2	0	0	0	21
その他	0	9	4	6	4	0	0	2	1	1	27
計	13	9	7	6	4	3	2	2	1	1	48

注 1：11:9 = 青と答える率：黒と答える率

注 2：3:1 = 正答率：誤答率

4.2.2 定量的評価

定量的評価として、事故統計を与えずに、目撃者の証言が各仮説（青と黒）を支持する割合の比とその理由を尋ねた。表 2 に定量的尤度評価の結果を示す。正則尤度解（8:3 と回答し、理由として証言能力検査結果を挙げている場合）の回答者は 13 名（27 %）いた。理由として証言能力検査結果を挙げている被験者は 48 名中 21 名（44 %）と定性的評価の場合より少なかった。しかし、理由として能力検査結果を挙げている被験者（21 名）のうち正則尤度解を回答した被験者（13 名）の割合は 62 % あった。これらの結果から、仮説の定量的尤度評価は、証言能力検査結果（関係情報）に注目する場合には、出来ると推測される。

4.3 おわりに

ベイズ的確率更新の鍵となるつぎの 2 つの情報処理：（1）仮説の尤度評価、（2）事前確率と尤度の積による統合、および、ベイズ的確率更新ができるか否かをタクシー問題の変形版を使って調べた実験の結果から、比の回答を求める場合には、

1. 人間はベイズ的確率更新ができる。
2. 関係情報に注目する場合には仮説の尤度評価ができる。
3. 事前確率と尤度の積による統合ができる。

ことが明らかになった。これらの結果から、ベイズ的確率更新の発想は自然なものであると考えられる。

今後の課題は、

1. さまざまなベイズ的確率更新問題に関して上記の結果を確かめる実験を被験者数を増やして実施すること、
2. 仮説の尤度評価および事前確率と尤度の積による情報統合を更に促進する方法を探ること、

などである。

謝辞

問題の作成にあたり、高橋和弘氏、小原健司氏、三島健稔氏、幸島明男氏、田村佳彦氏、坂本康治氏、保美周志氏、松田紀之氏、井原眞子に大変お世話になった。実験の実施に関して高橋氏の力をお借りした。田村氏には原稿を精読していただき有益なコメントを賜わった。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- [1] Kahneman, Slovic & Tversky (Edited): Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, Cambridge University Press(1982)
- [2] 井原 & 高橋：3 囚人問題と夕食問題のさまざまな解：理論的検討、日本認知科学会第 8 回大会予行集、PP.64-65（1991）
- [3] 井原 & 高橋：3 囚人問題群の更新解の予備的分析、日本認知科学会第 8 回大会配布資料（1991）
- [4] Lyon & Slovic: Dominance of accuracy information and neglect of base rates in probability estimation, Acta Psychologica, vol.40,pp.287-298 (1976)
- [5] Gigerenzer: How to make cognitive illusions disappear: Beyond “heuristics and biases,” draft, pp.12-50 (1991)