改訂版
課題構造の問題解決に及ぼす効果のベイズ的分析 –確率更新課題における「データによる仮説の否定」の効果–

井原 二郎, 田村 佳彦

As a framework for analyzing the effects of task structures in problem solving, a probabilistic model of problem solving is formulated by introducing "probabilities of using problem representations." The effects of "undermining hypotheses by data (or evidence)" in probability updating tasks are experimentally examined by measuring the probabilities of using problem representations. "Undermining" here means both "direct undermining by data" and "indirect undermining via the likelihood function of which value is zero." The experimental analysis shows that (1) undermining is a strong obstacle to the Bayesian solutions of the probability updating tasks, and (2) there exist differences between the direct and the indirect undermining effects. A mathematical model, named "Probability Flow Model," is made which expresses how the probabilities of using problem representations depend upon the general tendencies of human information use. This Probability Flow Model is experimentally validated. The differences between the direct and the indirect undermining effects are examined on the basis of the Probability Flow Model. The analysis shows that the differences are due to the differences in the degree of realization of the general tendencies of human information use. An interpretation of the differences in the degree of realization of the general tendencies is given from the viewpoint of how to relate a datum to hypotheses in solving the probability updating tasks. A new approach to human inductive reasoning, in which there has been no theoretical progress during the last two decades, is also suggested from the viewpoint of belief fixation and belief perseverance. It is an old custom that the classical statistics in Neyman-Pearson school is used in psychological data analyses, although its application to them is unreasonable. In this paper, Bayesian statistics is adopted because of its appropriateness to psychological data.

Keywords: problem solving(問題解決), probability updating(確率更新), inductive reasoning(帰納推論), general tendencies of human information use(人間の情報使用の一般的傾向), Bayesian statistics (ベイズ統計学)

1. はじめに

Laplace は確率論の第 6 法則として帰納推論の法則を次のように定式化した (Laplace, 1814).

ある事象が観測されたとき，その由来として推定されるいろいろな原因のなかで，どれかを指摘しようとすれば，その原因が存在すると仮定したときに，この事象のおこる確率が大きければ大きいほど真相に近いといえよう．ところでこれらの諸原因の任意の一つ

A Bayesian Analysis of Effects of Task Structures on Problem Solving : Effects of "Undermining Hypotheses by Data" in Probability Updating Tasks by Jiro Ihara (Cognitive Science Section, Information Science Division, Electrotechnical Laboratory, 1-1-4 Umezono, Tsukuba, Ibaraki 305, Japan) and Yoshihiko Tamura (ditto).

> の存在の確率は，この原因から結果する事象の確率を分子とし，その他の原因に対してつくった同じような確率の和を分母とする一つの分数である．もしもア・プリオリに考察したいろいろな原因が同程度に可能なものでないならば，各原因のもとでの事象の確率のかわりに，この確率に原因それ自身の可能性を掛けたものを使わねばならない．これが偶然の解析の中で，**事象から原因へさかのぼる分野での基本法則**である〔ゴチック筆者〕．

これが帰納推論の規範解(ベイズ解)であることは，今日，よく知られている[1)] (繁桝, 1985; 松原, 1985, 1989).

帰納推論の問題の一つの具体例(以後，「確率更新課題」と呼ぶ)である 3 囚人問題 (Lindley, 1985) あるいはその同型的変形問題に対するベイズ解が困難であることが多くの心理実験 (市川・下條, 1986; 伊東, 1988; 守, 1988, 1989a, 1989b; Shimojo & Ichikawa, 1989; 高橋, 1990; Ichikawa & Takeichi, 1990; 高橋・井原, 1991; 寺尾, 1993; Shigemasu & Yokoyama, 1994) で示され，そのさまざまな阻害要因が提案されているが，それらは下記のように整理できるであろう．

(1) 確率に関わる要因

- 確率概念の解釈の多様性 (井原, 1988)
- 頻度的確率の適用の困難 (伊東, 1988)
- 一回生起事象の確率を考えることの困難 (守, 1988)
- 組み合わせ確率の適用の困難 (守, 1989b)
- 確率概念の中間レベルの表象(ビュー)の適用とビュー相互間の関連づけの困難 (伊東, 1992a)
- 事前確率が不確定であること (Shigemasu & Yokoyama, 1994)

(2) 問題解決の様式に関わる要因

- バグのある命題的信念 (heuristics) の使用 (市川・下條, 1986; 市川, 1988; Shimojo & Ichikawa, 1989; Ichikawa & Takeichi, 1990)
- 問題表象の中間的抽象性 (市川, 1989)
- 「『同時並行的な読解と問題理解』による問題表現の形成と，これに続く，この問題表現を利用した『全体－部分割合関係スキーマ』に基づく正規化の計算」という処理様式の使用 (高橋, 1990)

(3) 課題構造に関わる要因

- 焦点(「釈放」と「処刑」)の変動と視点(「囚人 A」と「看守」)の不明確さ (佐伯, 1987; 守, 1989a)
- 囚人 B と C が処刑される場合の看守の選択確率が明示されていないこと (守, 1988)
- 「データのメタ性」(井原, 1988, 1989)
- 「データ事象(データ)がオリジナル事象(仮説)の生起に関する言明であること」(市川, 1989)
- 「対象を制限した質問の存在」(市川, 1988, 1989; 守, 1989a) あるいは「話題の限定」(市川・久保, 1992)

(4) 情報使用に関わる要因

- 2 値的 (0 あるいは 1) でない尤度[2)] (関係情報) の使用の困難 (高橋・井原, 1991; 寺尾, 1993)

寺尾 (1992) も指摘しているように確率更新

1) 松原 (1985, p.191) はベイズ統計学と帰納論理の関係について次のように述べている．“今日，ベイズ統計学の立場はさまざまな形で主張されているが，その本質は要するに，次の 2 点につきる．(a) 経験事実が与えられたという状況のもとで，その原因の確率をベイズの定理を用いて計算する．(b) 確率の主観確率の概念を許す．(a) は (広義の) 帰納論理 inductive logic である．帰納論理は統計学の真髄であり精神である”

2) 尤度の概念は Fisher (1959) により導入されたものであるが，Laplace の第 6 法則の下記の部分がそれに対応している．“ある事象が観測されたとき，その由来として推定されるいろいろな原因のなかで，どれかを指摘しようとすれば，その原因が存在すると仮定したときに，この事象のおこる確率が大きければ大きいほど真相に近いといえよう”

課題の解決の実態の解明はあまり進捗していない．それには，検討対象に関する理由と方法論上の理由がある．検討対象に関する理由は，課題構造に関わる要因と情報使用に関わる要因を確定することが実態を解明するための必要不可欠の前提条件であるにも関わらずこれらに関する検討が十分になされなかったことである．とくに，(3) 課題構造に関わる要因のうち，理論的な考察から提案された「データのメタ性」あるいは「データ事象がオリジナル事象の生起に関する言明であること」は確率更新の最も強力な阻害要因の一つであると考える．したがって，この阻害要因の問題解決に及ぼす効果を実験的に明確にすることが必要である．これらは同じ阻害要因の別表現であり，その実質的な内容はつぎのとおりである．3 囚人問題におけるデータ事象「看守は『囚人 B は処刑される』と答えた」が仮説 (オリジナル事象)「囚人 B は釈放される」に直接言及していることが，尤度情報を無視しやすくし，ベイズ的確率更新を困難にしているという考えである．また，(4) 情報使用に関わる要因については，2 値的でない尤度情報 (仮説 H が真の場合にデータ D が生起する条件付確率が，0 あるいは 1 ではなく，例えば，0.5 である場合) の使用が困難であることが実験的に示されている (高橋・井原，1991; 寺尾，1993)．しかしながら，これだけでは不十分であり，さらに一歩踏み込んで，課題構造の問題解決に及ぼす効果を，問題解決における情報使用に関する人間の一般的な傾向との関係で捉えることが重要であると考える．方法論上の理由は，課題構造の問題解決に及ぼす効果を分析するための枠組の不備と不適切なデータ分析法にあると思われる．

本論文の分析対象である「データによる仮説の否定」なる課題構造は市川 (1989) の「データ事象がオリジナル事象の生起に関する言明であること」および井原 (1988, 1989) の「データのメタ性」をデータの働きの観点から発展させたものである．すなわち，「データによる仮説の否定」は，(A)「データによる仮説の**直接否定**」と (B)「データによる尤度を経由しての仮説の**間接否定**」の二つの課題構造を意味している．(A) は「データ事象がオリジナル事象の生起に関する言明であること」および「データのメタ性」をデータの働きの側面から捉え直したものである．

本論文の目的は，(1)「データによる仮説の否定」なる課題構造が確率更新課題の解決に及ぼす効果，および (2) この課題構造が存在しない場合における確率更新課題の解決のされ方，を心理実験で定量的に明らかにすることである．

本論文の構成は下記の通りである．まず，問題解決における課題構造の効果を分析するための枠組として，「問題表象を使用する確率 (使用率)」を導入し問題解決の確率モデルを定式化する．ここで，「問題表象」とは，問題解決で使用される可能性のある情報のことである．次に，この問題解決の確率モデルに基づき確率更新課題における「データによる仮説の否定」の効果を問題表象の使用率で計量して分析する．さらに，問題表象の使用率の「情報使用に関する人間の一般的な傾向」への依存性を表す数理モデル (確率流モデル) を作成し，直接否定と間接否定の効果の差異について定量的に分析する．この分析結果を「確率更新課題におけるデータと仮説の関連付け」の観点から解釈する．本論文では，心理学のデータの分析に適したベイズ統計学の方法を用いる (付録 A 参照)(繁桝，1985; 宮沢，1973; Berger, 1985)．

2．問題解決の確率モデル

課題構造が問題解決に及ぼす効果を分析するための枠組である問題解決の確率モデルを定式化する．

(1) 基本構造

問題解決者は，課題のある問題表象を使用し，これにある演算を施し，一つの解を出す．ここで，課題が入力で，問題表象と演算は問題解決者の内部に属し，解が出力である．

(2) 確率の導入

問題解決者の集団は，課題 $i(i = 1, ..., I)$ に対して一つの問題表象 $j(j = 1, ..., J)$ を確率 $P(j|i)$ で使用する．問題表象 j に対して一つの演算 $l(j)(l(j) = 1, ..., L(j))$ を確率 $P(l(j)|j)$ で適用し，確率 1 で一つの解 $s(j, l(j))$ を出す．
ここで，下記のことが仮定されている．

(a) 問題表象 $j(j = 1, ..., J)$ は排反網羅的とする．つまり，課題 i に対して $j = 1, ..., J$ の問題表象のいずれかが必ず使用される．

$$\sum_{j=1}^{J} P(j|i) = 1 \qquad (1)$$

(b) 問題表象 j に対して $l(j) = 1, ..., L(j)$ の演算のいずれかが必ず適用される．

$$\sum_{l(j)=1}^{L(j)} P(l(j)|j) = 1 \qquad (2)$$

(c) $s(j, l(j))$ は 問題表象 j と 演算 $l(j)$ から得られる一意な解である．

(d) 条件付独立性の仮定[3)]

$$P(l(j)|j\&i) = P(l(j)|j) \qquad (3)$$

(e) 問題表象 j から得られる解集合 $S(j)$ と問題表象 j' から得られる解集合 $S(j')$ $(j \neq j')$ は共通部分を持たない．

$$S(j) \cap S(j') = \phi \ (j \neq j') \qquad (4)$$

ここで，$S(j)$ は次式で定義される．

$$S(j) \equiv \bigcup_{l(j)=1}^{L(j)} s(j, l(j)) \qquad (5)$$

課題 i から解 $s(j, l(j))$ が得られる確率 $P(s(j, l(j))|i)$ は，(3) 式を用いると，次式で表すことができる．

$$\begin{aligned} P(s(j, l(j))|i) &= P(j\&l(j)|i) \\ &= P(l(j)|j\&i)P(j|i) \\ &= P(l(j)|j)P(j|i) \qquad (6) \end{aligned}$$

課題 i から $S(j)$ に属する解が得られる確率 $P(S(j)|i)$ は，(6) 式を用いると，次式で表される．

$$P(S(j)|i) = \sum_{l(j)=1}^{L(j)} P(s(j, l(j))|i) = P(j|i) \qquad (7)$$

課題 i から，m 個の解集合の和集合 $S([m])$ に属する解が得られる確率 $P(S([m])|i)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} P(S([m])|i) &= \sum_{j=1}^{m} P(S(j)|i) \\ &= \sum_{j=1}^{m} P(j|i) \\ &= P(j([m])|i) \qquad (8) \end{aligned}$$

$$j([m]) \equiv \bigcup_{j=1}^{m} j \qquad (9)$$

$$S([m]) \equiv \bigcup_{j=1}^{m} S(j) \qquad (10)$$

(7) 式と (8) 式は解集合のデータから問題表象が使用される確率の事後分布を求めるために用いられる．

3) これは「問題解決は課題そのものではなくその表象に基づく」という認知科学の基本仮定の確率論的表現である．

表 1　実験条件
Table 1　Experimental conditions

条件 i	直接否定	間接否定
1	有	有
2	無	有
3	無	無

3．課題

次の型の確率更新課題を考える．

「三つの仮説 A, B, C があり，これらの事前確率 P(A)，P(B)，P(C) が与えられている．データ集合 {D, ─ D} があり，尤度 P(D|A)，P(D|B)，P(D|C)，P(─ D|A)，P(─ D|B)，P(─ D|C) が与えられている．データ D が実現する．このとき，仮説 A, B, C の確率の比はどうなるか？」 [4)]

次の二つの課題構造の有無による三つの実験条件を考える (表 1)．

(1)　データ D による仮説 B の直接的否定 (「直接否定」と略記する)

(2)　データ D による，尤度 ($P(D|B) = 0$) を経由しての，仮説 B の間接的否定 (「間接否定」と略記する)

直接否定が存在する場合には必然的に間接否定も存在することに注意しよう．

実験に用いた課題と質問は付録 B に記載する．課題 i は実験条件 i に対応している．実験条件 1，実験条件 2，実験条件 3 を，各々，直接否定条件，間接否定条件，否定なし条件，とも表記する．全ての条件において $P(A) = 0.2$，$P(B) = 0.1$，$P(C) = 0.7$，$P(D|A) = 0.5$，$P(D|C) = 1$ である．これらの課題には次の特徴がある．

- 課題 1 〜課題 3 の事前確率の表現は同じで頻度的解釈は容易である．
- 全ての尤度が与えられている．
- 課題 1 の尤度の頻度的解釈は困難である．
- 課題 2，3 の尤度の頻度的解釈は容易である．
- 課題 2 と 3 は，尤度 $P(D|B)$ の値のみが異なる (課題 2：$P(D|B) = 0$，課題 3：$P(D|B) = 0.4$)．
- 「対象を制限した質問」は存在しない．
- 課題 1 には「話題の限定」が存在するが，課題 2, 3 には存在しない．
- 「焦点の移動」と「視点の不明確さ」は存在しない．

事前確率と課題 2, 3 の尤度について頻度的解釈が容易な表現を採用した理由は，確率の頻度的解釈が困難であることが確率更新の阻害要因になり得るという伊東 (1988) の結果に基づいている．「対象を制限した質問の存在」と「話題の限定」という課題構造が確率更新の阻害要因になり得るという市川説 (市川，1988，1989; 市川・久保, 1992) に基づいて，前者の課題構造をすべての課題から排除し、後者の課題構造を課題 2, 3 から排除した．「焦点の変動」と「視点の不明確さ」を排除した理由は，それらの存在により問題の理解が妨げられ，その結果，確率更新が阻害され得るという佐伯説 (佐伯，1987) に基づいている．

4．問題表象と解集合

次の 4 種類の排反網羅的な問題表象を考える．$j([m])$ を改めて $j(j = 1, ..., J = 4)$ で表す．

(1)　「データ一部分表象」($j = 1$)

- $D\&P(A)\&P(B)\&P(C)$
- $P(D|B)\&P(A)\&P(B)\&P(C)$
- D
- $P(D|B)$
- $P(D|A)\&P(D|B)\&P(D|C)$
- $P(D|C)\&P(C)$

(2)　「事前確率表象」($j = 2$)

- $P(A)\&P(B)\&P(C)$

4) $P(A)$, ⋯,$P(─\ D|C)$ は 2 節の確率とは別物である．

(3) 「完全表象」($j = 3$)

- $P(A)\&P(B)\&P(C)\&P(D|A)$
  $\&P(D|B)\&P(D|C)$

(4) 「その他の表象」($j = 4$)

- (1) 〜 (3) 以外の問題表象

「データ－部分表象」の $D\&P(A)\&P(B)\&P(C)$ は, 課題 1 に関して言えば,「研究助手が学生に『B には入れなかった』と教えた (D)」,「チンパンジーが 500 円硬貨を自販機 A に入れる可能性が 20% である ($P(A) = 20\%$)」,「チンパンジーが 500 円硬貨を自販機 B に入れる可能性が 10% である ($P(B) = 10\%$)」, および,「チンパンジーが 500 円硬貨を自販機 C に入れる可能性が 70% である ($P(C)$=70%)」が問題解決で使用される情報であることを意味している. また, $P(D|B)$ という問題表象は, 課題 1 に関して言えば,「チンパンジーが 500 円硬貨を自販機 B に入れた場合に, 研究助手が学生に『B には入れなかった』と教える可能性が 0% である ($P(D|B) = 0\%$)」が問題解決で使用される情報であることを意味している. その他の問題表象に対しても同様である.

「完全表象」は, ベイズ的確率更新課題を解決するための必要十分な情報がどの程度使用されるかを測定するための表象カテゴリーである. 確率更新課題の解決における基本的な情報である「データ」が, 他の部分的な情報と共に (「データ」のみの場合も含む) 使用される程度を測定するために「データ－部分表象」なる表象カテゴリーを設定した. また,「事前確率表象」は, 確率更新課題を確率の更新とは捉えない, 換言すると,「データ」が使用されない程度を測定するための表象カテゴリーである.

上記の各問題表象から生成可能な解集合は下記のとおりである. この解集合 $S([m])$ を改めて $S(j)$ で表す. [ ] 内に対応する問題表象を示す. これらの解集合をデータとして用いる. 解集合の要素となる解 (以後,「要素解」と呼ぶ) の定義は付録 C に記載する.

(1) 「データ－部分解」($S(1)$)

これは「データ－部分表象」から生成可能な解集合である.

- 等比率解 [$D\&P(A)\&P(B)\&P(C)$ あるいは $P(D|B)\&P(A)\&P(B)\&P(C)$]
- 配分解 [$D\&P(A)\&P(B)\&P(C)$ あるいは $P(D|B)\&P(A)\&P(B)\&P(C)$]
- 場合解 [D あるいは $P(D|B)$]
- 尤度解 [$P(D|A)\&P(D|B)\&P(D|C)$]
- 部分不変解 [$P(D|C)\&P(C)$]

(2) 「不変解」($S(2)$)

これは「事前確率表象」から生成可能な解である.

- 不変解

(3) 「統合解」($S(3)$)

これは「完全表象」から生成可能な解集合である.

- 非ベイズ的統合解
- ベイズ解

(4) 「その他の解」($S(4)$)

これは「その他の表象」から生成可能な解集合である.

- (1) 〜 (3) 以外の解

5. 実験

教養課程において心理学の講義を受講している学習院大学の 127 名の大学生が集団実験の被験者として参加した. 条件 1 〜 3 を被験者間条件として, 各条件 (A4 版の用紙に印刷した課題と質問) をランダムに被験者に割り当てた. その結果, 直接否定条件 (条件 1) の被験者数は 45 名, 間接否定条件 (条件 2) と否定なし条件 (条件 3) は各々 41 名となった.

要素解の同定基準を設定して, 2 人の評定者が独立に同定し, 同定が一致しなかった回答は協議して決定した. 直接否定条件 (条件 1) の同定の一致率は 0.889, 間接否定条件 (条件 2) と

表 2　要素解の分類結果 (x_{ij})
Table 2　Classification of elementary solutions

条件 i	データー部分解 $S(1)$	不変解 $S(2)$	統合解 $S(3)$	その他の解 $S(4)$	計
1	30	4	5	6	45
2	16	9	11	5	41
3	2	17	12	10	41

否定なし条件 (条件 3) は各々 0.927 であった.

要素解の分類結果 (各条件における各解集合に属する観測度数 x_{ij}) を表 2 に示す. 要素解の同定基準は付録 D に記載する. 各条件における要素解の観測度数は付録 E に記載する.

表 2 のデータには次のような傾向が認められる.「データー部分解」$S(1)$ を回答した被験者数は直接否定条件 (条件 1)→ 間接否定条件 (条件 2)→ 否定なし条件 (条件 3) の順に減少している. とくに, 否定なし条件 (条件 3) で極めて少ない. 一方,「不変解」$S(2)$ は直接否定条件 (条件 1)→ 間接否定条件 (条件 2)→ 否定なし条件 (条件 3) の順に増加している. とくに, 否定なし条件 (条件 3) で極めて多い. これは「不変解」の発現要因の「話題の限定」説 (市川, 1989; 市川・久保, 1992) に対して否定的な証拠であり,「確率概念の頻度的解釈」説 (井原, 1988) に対して肯定的な証拠であることを示唆している. 詳細は **6.4** で述べる.「統合解」$S(3)$ については, 直接否定条件 (条件 1) で少なく, 間接否定条件 (条件 2) と否定なし条件 (条件 3) で同程度に多くなっている.「その他の解」$S(4)$ は直接否定条件 (条件 1) と間接否定条件 (条件 2) で同程度に少なく, 否定なし条件 (条件 3) で多くなっている.

6. 問題表象の使用率の分析

ベイズ統計学の方法を用いて問題表象の使用率と条件との関係を分析する.

6.1 分析法

ベイズ統計学では, 分析対象であるパラメータ (本論文では, 問題表象の使用率 $P(j|i)$) の事前分布によって, 分析者が実験をする前に持っている主観的事前情報を表現する. 一方, 実験によってもたらされる客観的情報 (本論文では, 表 2 のデータに含まれている) は, このパラメータの尤度 (データ発生モデル) により表現する. そして, これらの 2 種類の情報をベイズの定理で統合し, このパラメータの事後分布として表現し, これに基づいてデータ分析を行う (繁桝, 1985).

条件 i のもとでの問題表象 j の使用率 $P(j|i)$ の事後分布を求めるためには, (1) 表 2 のデータの発生モデルを特定すること, および, (2) 事前分布を特定することが必要である.

データ発生モデルとしては, 本実験のデザインから次式の層別多項モデルが妥当である (松田, 1988; 廣津, 1982).

$$Prob(\ldots, x_{ij}, \ldots|\ldots, P(j|i), \ldots) = \prod_{i=1}^{I} \frac{N_i!}{\prod_{j=1}^{J} x_{ij}!} \prod_{j=1}^{J} P(j|i)^{x_{ij}} \tag{11}$$

ここで, I : 条件の総数 (3), J : 問題表象の総数 (4), x_{ij} : 観測度数, $N_i = \sum_{j=1}^{J} x_{ij}$: 条件 i の被験者数.

事前分布としては, (11) 式を $P(j|i)$ の関数と見た問題表象の使用率の尤度関数に対する自然共役事前分布である下記の層別 Dirichlet 分布

を採用する (Box & Tiao, 1973; Epstein & Fienberg, 1992).

$$\pi(..., P(j|i), ...|..., K_i, \eta_{ij}, ...)$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^{I} \Gamma(K_i)}{\prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} \Gamma(K_i \eta_{ij})} \times \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} P(j|i)^{(K_i \eta_{ij} - 1)} \quad (12)$$

ここで, $\Gamma(\ )$ はガンマ関数, K_i, $\eta_{ij} > 0$, $\sum_{j=1}^{J} \eta_{ij} = 1$.

同時事後分布である (16) 式から分かるように, K_i は事前標本数, $K_i \eta_{ij}$ は事前期待度数と解釈できる. η_{ij} は $P(j|i)$ の事前期待値である. この事前分布は, 事前情報を表す K_i, η_{ij} の値に依存して様々な形態をとるが, 本論文では実験から得られる情報を最大限に尊重するために, 中立的な事前分布を採用する. しかし, 現在のベイズ統計学には中立的な事前分布の決定版が存在しないので, 下記の 3 種類の中立的な事前分布に対する事後分布を比較して, 事前分布に対する事後分布の頑健性を確認する. これらの事前分布による分析結果が実質的に同じであるならば, 分析結果は実験から得られた客観的情報に基づくものであると解釈できる.

(1) 一様事前分布

$$K_i \eta_{ij} = 1 \quad (13)$$

このとき, $K_i = J$, $\eta_{ij} = 1/J$ である.

(2) Jeffreys の無情報事前分布 (Box & Tiao, 1973)

$$K_i \eta_{ij} = 0.5 \quad (14)$$

このとき, $K_i = J/2$, $\eta_{ij} = 1/J$ である.

(3) $K_i \to 0$ とした広義事前分布[5)]

$$K_i \eta_{ij} \to 0 \quad (15)$$

5) K_i は事前の標本数と解釈できるので, $K_i = 0$ は無事前情報の一つの表現である.

(11) 式, (12) 式およびベイズの定理を用いると使用率の同時事後分布は次式の層別 Dirichlet 分布となる.

$$f(..., P(j|i), ...|..., K_i, \eta_{ij}, N_i, x_{ij}, ...)$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^{I} \Gamma(K_i + N_i)}{\prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} \Gamma(K_i \eta_{ij} + x_{ij})} \times \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} P(j|i)^{(K_i \eta_{ij} + x_{ij} - 1)} \quad (16)$$

$P(j|i)$ の事後分布は (16) 式の周辺分布であり, それは次の Beta 分布 (繁桝, 1985) である.

$$f(P(j|i)|a_{ij}, b_{ij}) = \frac{\Gamma(a_{ij} + b_{ij})}{\Gamma(a_{ij})\Gamma(b_{ij})} \times P(j|i)^{(a_{ij} - 1)}(1 - P(j|i))^{(b_{ij} - 1)} \quad (17)$$

ここで,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= K_i \eta_{ij} + x_{ij} > 0 \\ b_{ij} &= K_i + N_i - (K_i \eta_{ij} + x_{ij}) > 0 \\ a_{ij} + b_{ij} &= K_i + N_i. \end{aligned}$$

$P(j|i)$ の事後期待値は次式のように事前期待値 η_{ij} と標本の比率 x_{ij}/N_i の加重平均で表される.

$$\boldsymbol{E}[P(j|i)|a_{ij}, b_{ij}] = \frac{a_{ij}}{a_{ij} + b_{ij}} = \frac{K_i}{N_i + K_i}\eta_{ij} + \frac{N_i}{N_i + K_i}\frac{x_{ij}}{N_i} \quad (18)$$

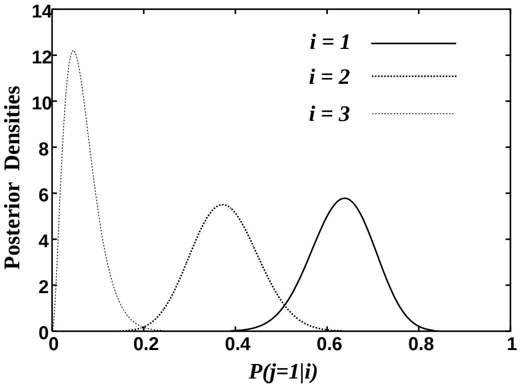

図 1　「データー部分表象」の使用率の事後分布
Fig. 1　Posterior densities for probabilities of using "Data-Partial Representation"

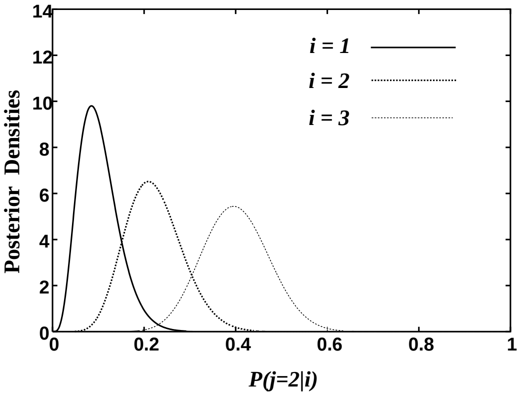

図 2　「事前確率表象」の使用率の事後分布
Fig. 2　Posterior densities for probabilities of using "Porior Probabilities Representation"

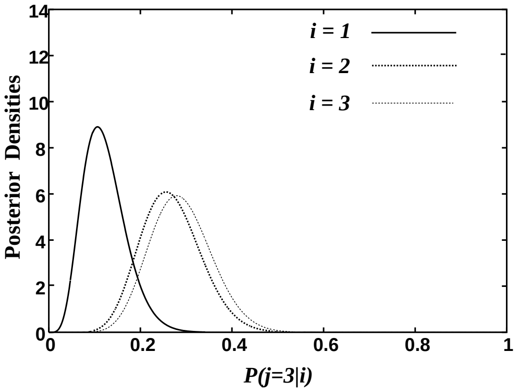

図 3　「完全表象」の使用率の事後分布
Fig. 3　Posterior densities for probabilities of using "Perfect Representation"

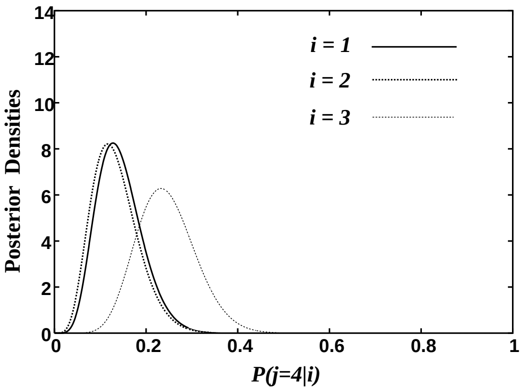

図 4　「その他の表象」の使用率の事後分布
Fig. 4　Posterior densities for probabilities of using "Other Representations"

6.2　使用率 $P(j|i)$ の事前分布，事後分布および事後期待値

図 1 〜図 4 は一様事前分布の場合の $P(j|i)$ の事後分布である．他の事前分布に対しても同様な結果が得られた．これらの図から各問題表象の使用率の全体的な条件依存性を読みとることができる[6]．

使用率の事後期待値を用いることにより使用率の条件依存性を簡潔に表現することができる．図 5(*Data-Partial*：「データー部分表象」，*Prior*：「事前確率表象」，*Perfect*：「完全表象」，*Other*：「その他の表象」) は一様事前分布の場合の使用率の事後期待値と条件との関係である．他の事前分布に関しても同様な結果が得られた．図 1 〜図 5 から使用率の条件依存性に関して次のことが読みとれる．

(1)　「データー部分表象」と「事前確率表象」の使用率は 3 条件間で明瞭に異なっている．

(2)　「データー部分表象」の使用率は直接否定条件 (条件 1)→ 間接否定条件 (条件 2) → 否定なし条件 (条件 3) の順に小さくなっている．条件 1 〜条件 3 における使用率の事後期待値は，各々，0.633, 0.378 および 0.067 である．

6) 事後分布により実験がもたらす未知パラメータの値に関する全ての情報を表現できることがベイズ統計学の一つの長所である．

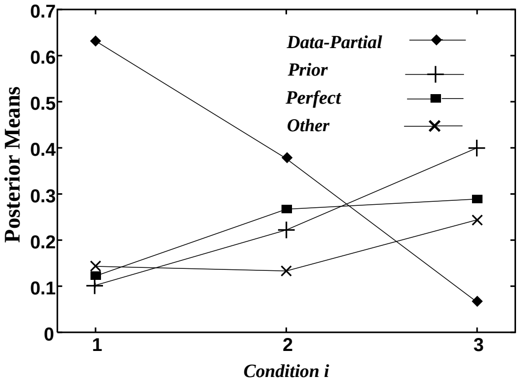

図 5 問題表象の使用率の事後期待値
Fig. 5 Posterior expectations of probabilities of using problem representations

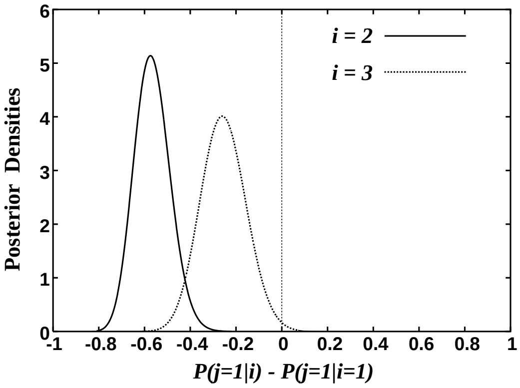

図 6 「データー部分表象」の使用率の差の事後分布
Fig. 6 Posterior densities for differences between probabilities of using "Data-Partial Representation"

(3) 「事前確率表象」の使用率は直接否定条件 (条件 1)→ 間接否定条件 (条件 2)→ 否定なし条件 (条件 3) の順に大きくなっている. 条件 1 〜条件 3 における使用率の事後期待値は, 各々, 0.102, 0.222 および 0.400 である.

(4) 「完全表象」の使用率は間接否定条件 (条件 2) と否定なし条件 (条件 3) ではほぼ同じであるが, 直接否定条件 (条件 1) とは明瞭に異なっている.

(5) 直接否定条件 (条件 1) における「完全表象」の使用率は間接否定条件 (条件 2) と否定なし条件 (条件 3) のそれより小さい. 条件 1 〜条件 3 における使用率の事後期待値は, 各々, 0.122, 0.267 および 0.280 である.

(6) 「その他の表象」の使用率は, 直接否定条件 (条件 1) と間接否定条件 (条件 2) ではほぼ同じであるが, 否定なし条件 (条件 3) とは明瞭に異なっている.

(7) 否定なし条件 (条件 3) における「その他の表象」の使用率は直接否定条件 (条件 1) と間接否定条件 (条件 2) のそれより大きい. 条件 1 〜条件 3 における使用率の事後期待値は, 各々, 0.143, 0.133 および 0.244 である.

6.3 $P(j|i) - P(j|i = 1)$ の事後分布と $P(j|i) > P(j|i')$ の事後確率

使用率の差の事後分布[7]により, 使用率の大小関係の条件依存性を確率的に評価することができる[8]. 図 6 〜図 9 は $P(j|i) - P(j|i = 1)$ の事後分布である. 表 3 に $P(j|i) > P(j|i')(i \neq i')$ の事後確率を示す. これらは一様事前分布の場合のものであるが他の事前分布に関しても同様な結果が得られた. これらの図表から次のことが読みとれる.

(1) 「データー部分表象 $(j = 1)$」の使用率 : 直接否定条件 (条件 1) と比較して間接否定条件 (条件 2), 否定なし条件 (条件 3) の方が大きいことの事後確率 (確信の程度, degree of belief) は極めて小さい. 間接否定条件 (条件 2) と比較して否定なし条件 (条件 3) の方が大きいことの事後確率は極めて小さい.

(2) 「事前確率表象 $(j = 2)$」の使用率 : 直接否定条件 (条件 1) と比較して間接否定条件 (条件 2), 否定なし条件 (条件 3) の方が大きいことの事後確率は極めて大きい. 間接否定条件

7) 確率変数の差の確率分布の求め方については柳川 (1990, p.31) を見よ.
8) このような所与のデータに基づく確率的評価が可能であることがベイズ統計学のもう一つの長所である.

表 3　$P(j|i) > P(j|i')$ であることの事後確率
Table 3　Posterior probabilities of $P(j|i) > P(j|i')$

表象 j	$P(j\|i=2) > P(j\|i'=1)$	$P(j\|i=3) > P(j\|i'=1)$	$P(j\|i=3) > P(j\|i'=2)$
1	0.006	0.000	0.000
2	0.949	1.000	0.968
3	0.966	0.980	0.594
4	0.433	0.899	0.917

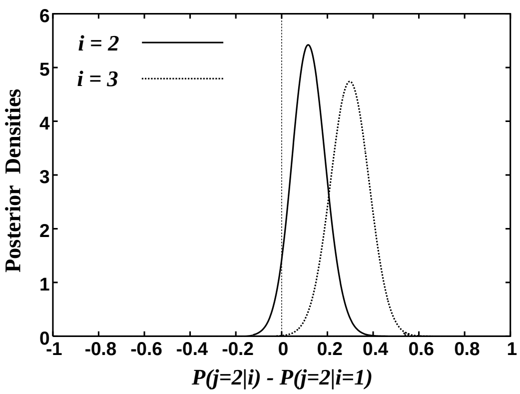

図 7　「事前確率表象」の使用率の差の事後分布
Fig. 7　Posterior densities for differences between probabilities of using “Prior Probabilities Representation”

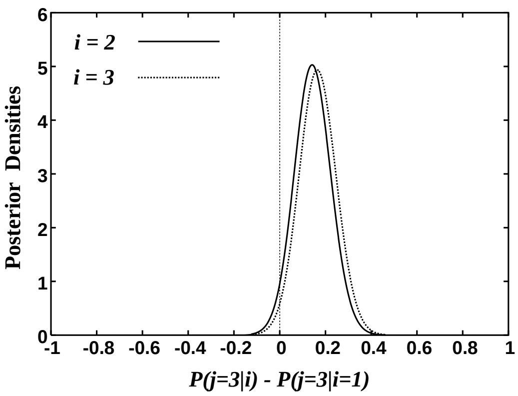

図 8　「完全表象」の使用率の差の事後分布
Fig. 8　Posterior densities for differences between probabilities of using “Perfect Representation”

(条件 2) と比較して否定なし条件 (条件 3) の方が大きいことの事後確率は極めて大きい.

（3）　「完全表象 ($j = 3$)」の使用率：直接否定条件 (条件 1) と比較して間接否定条件 (条件 2), 否定なし条件 (条件 3) の方が大きいことの事後確率は極めて大きい. 間接否定条件 (条件 2) と否定なし条件 (条件 3) とは差がない.

（4）　「その他の表象 ($j = 4$)」の使用率：直接否定条件 (条件 1) と間接否定条件 (条件 2) とは差がない. 直接否定条件 (条件 1), 間接否定条件 (条件 2) と比較して否定なし条件 (条件 3) の方が大きいことの事後確率は大きい.

6.4　結果

以上の分析により, 「データによる仮説の否定」の効果について次のことが明らかとなった.

（1）　「データによる仮説の直接および間接否定」が存在すると「データー部分表象」の使用率が大きくなり, その結果, ベイズ的確率更新を阻害する要因として働く.

（2）　直接否定と間接否定の効果には差異がある. 前者の削除では「事前確率表象」と「完全表象」の使用率が共に増加し, 「その他の表象」の使用率は不変である. 一方, 後者の削除では「完全表象」の使用率は不変であるが, 「事前確率表象」と「その他の表象」の使用率は大きく増加する.

（3）　「データによる仮説の否定」という課題構造が削除されると, 「事前確率表象」の使用率が増加する. とくに, この現象は否定なし条件で顕著である.

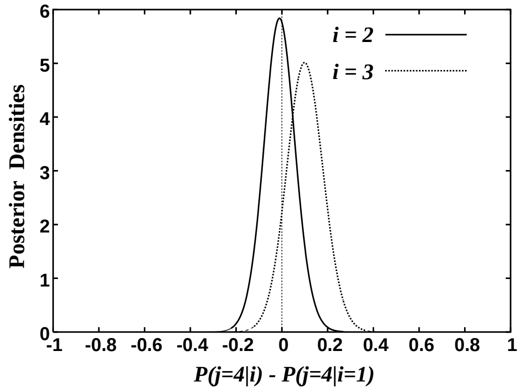

図 9 「その他の表象」の使用率の差の事後分布
Fig. 9 Posterior densities for differences between probabilities of using "Other Representations"

(4) 「不変解」の発現要因としての「話題の限定」説には否定的で，「確率概念の頻度的解釈」説には肯定的な結果が得られた．「データによる仮説の否定」が削除されると，「事前確率表象」の使用率が大きくなることが明らかとなったが，これは「データによる仮説の否定」という課題構造が存在しない場合には，事前確率をデータの情報で更新しない「不変解」の発現率が大きいことを意味している．不変解の発現要因として，(1)「対象を制限した質問の存在」説 (市川, 1988, 1989) あるいは「話題の限定」説 (市川・久保, 1992)(市川の私信によれば，これらは同じ主張の別表現である．しかし、「話題の限定」説の方がより一般的な主張であると考えられる), および, (2)「確率概念の頻度的解釈」説 (井原, 1988; 高橋・井原, 1991) が提案されている．前者の実質的内容は，たとえば, 仮説 A を対象外とし, その他の仮説 B, C に制限した話題や質問が存在する (ただし, 仮説 B, C のうち少なくとも一つは偽であるとする) 条件では, 仮説 A の事後確率はその事前確率と同じになる傾向が強い，という主張である．後者の実質的内容は，確率の客観的解釈である頻度的解釈が採用され易く, かつ, データによる仮説の否定が弱いという条件では, 各仮説の事後確率はその仮説の事前確率と同じになる傾向が強い，という主張である．不変解の発現率が最小の直接否定条件には「話題の限定」が存在する．不変解の発現率が中位の間接否定条件と最大の否定なし条件には「対象を制限した質問」と「話題の限定」は存在しない．これらの事実は「話題の限定」説に対して否定的である．一方, 直接否定条件, 間接否定条件, 否定なし条件の順に，データによる仮説の否定は弱くなる．直接否定条件での尤度の頻度的解釈は困難であるが, 間接否定条件と否定なし条件の尤度の頻度的解釈は容易である．3 条件の事前確率の表現は同じで頻度的解釈は容易である．そして, 直接否定条件, 間接否定条件, 否定なし条件の順に「不変解」の発現率が増加している．これらの事実は「確率概念の頻度的解釈」説に対して肯定的である．

7. 直接否定と間接否定の効果の差異のデータ分析

問題表象の使用率の条件間の依存関係を「情報使用に関する人間の一般的傾向」で媒介して表現する数理モデルを作成して，直接否定と間接否定が確率更新課題の解決に及ぼす効果の差異の原因を定量的に分析する．この数理モデルを「確率流モデル」と呼ぶ．

7.1 データ分析のための仮定

「確率流モデル」に基づく直接否定と間接否定の効果の差異の原因の検討を可能にするために次のことを仮定する．

(1) 被験者集団に関する仮定
各条件の被験者集団における情報使用の傾向は同じと仮定する．この仮定を「被験者集団の均質性の仮定」と呼ぶ．この仮定は，課題構造の効果を情報使用の傾向と関連付けて考察することを可能にするために必要である．

(2)　情報使用に関する仮定

問題解決における情報使用に関して次の三つの傾向の存在を仮定する.

傾向1　部分的な情報の処理による部分的な解決を可能にする要因が存在する場合には, 部分的な情報を使用する傾向がある. また, この傾向はこのような要因の数が多い程強い.

傾向2　部分的な解決を可能にする要因が少ない場合には, 情報処理量 (情報を得るための処理量とそれに対する演算の処理量) がより少ないより少数の種類の情報を使用しようとする傾向がある. この傾向はこのような要因が少ない程強い.

傾向3　部分的な解決を可能にする要因が少ない場合には, 問題解決に関連のあるより多くの種類の情報を使用しようとする傾向がある. この傾向はこのような要因が少ない程強い.

(3)　問題表象の使用率に関する仮定

直接否定条件 (間接否定条件) における「事前確率表象」, 「完全表象」および「その他の表象」の使用率は, 間接否定条件 (否定なし条件) において「保存」される. 被験者の行動に則して言えば, 直接否定条件 (間接否定条件) において「事前確率表象」, 「完全表象」あるいは「その他の表象」を使用した被験者は, 間接否定条件 (否定なし条件) においても同じ問題表象を使用する. この仮定を「保存仮定」と呼ぶ.

(4)　傾向の確率更新課題への適用

確率更新課題の場合の「部分的な情報の処理による部分的な解決」は, データと他の一部の情報 (「データー部分表象」) を使用する解と同定する. 「データー部分解」= {等比率解, 配分解, 場合解, 尤度解, 部分不変解} がこの解である. 傾向2が顕在化した場合の解は「不変解」, 傾向3が顕在化した場合の解は「統合解」と同定する.

7.2　確率流モデルの作成のための準備

上に述べた仮定 (1) ～ (4) の妥当性を定性的に検討する.

(1)　情報使用の傾向1の顕在化について

「データによる仮説の否定」なる課題構造が存在する確率更新課題の場合に, 傾向1を顕在化する大学生が多いことはこれまでの実験結果から推測できる. また, 本論文の実験に参加した被験者集団にも傾向1を顕在化する被験者が多数存在することが示された.

(2)　課題構造の削除に伴う「データー部分表象」の使用率の変化

直接否定と間接否定が, 部分的な解決を可能にする要因であると仮定すると, 被験者集団の均質性の仮定, 傾向1および保存仮定は, これらの要因が削除されるにしたがい, つまり, 直接否定条件 (条件1)→ 間接否定条件 (条件2) → 否定なし条件 (条件3) の順に, 「データー部分表象」の使用率が減少することを意味している. これは実験結果と一致している.

(3)　課題構造の削除に伴う「事前確率表象」, 「完全表象」および「その他の表象」の使用率の変化

直接否定と間接否定が存在したならば「データー部分表象」の使用率に寄与したであろう被験者 (の一部) が, これらの課題構造が存在しない場合には, 「事前確率表象」, 「完全表象」および「その他の表象」の使用率に寄与すると考える. この考えは, 「条件間の確率の流れ」なるものを想定するならば, 次のように表現することもできる. すなわち, 「データー部分表象」の使用率 (の一部) が, 課題構造の削除にともない, そのほかの問題表象の使用率に「流入」する. このように考えると, 被験者集団の均質性の仮定, 情報使用の傾向の仮定および保存仮定は, 「事前確率表象」, 「完全表象」および「そ

の他の表象」の使用率が，直接否定条件 (条件 1)→ 間接否定条件 (条件 2)→ 否定なし条件 (条件 3) の順に，増加するかあるいは不変となる可能性は存在するが，減少する可能性はないことを意味している．この点も実験結果と一致している．

7.3 確率流モデル

上記の仮定の妥当性が定性的に確認できたので，問題表象の使用率の条件間の依存関係を，情報使用の一般的傾向で媒介して，定量的に表現する数理モデルを作成しよう．

直接否定条件 (条件 1) における「データー部分表象」の使用率 $P(j=1|i=1)$ が，間接否定条件 (条件 2) では，「事前確率表象」，「完全表象」および「その他の表象」の使用率に「流入」すると考える．また，直接否定条件 (条件 1) における「事前確率表象」，「完全表象」および「その他の表象」の使用率は間接否定条件 (条件 2) において「保存」されると考える．間接否定条件 (条件 2) と否定なし条件 (条件 3) との関係に関しても同様に考える．$P(j=1|i)$ が $P(j=2|i{+}1)$, $P(j=3|i{+}1)$, $P(j=4|i{+}1)$ に流入する割合を，各々，α_{i+1}, β_{i+1}, γ_{i+1} とする ($i=1,2$)．これらを「流入率」と呼ぶ．流入率には下記の意味がある．

α_2: 直接否定の削除に伴う傾向 2 の顕在化の程度を表している．

β_2: 直接否定の削除に伴う傾向 3 の顕在化の程度を表している

γ_2: 直接否定を削除しても傾向 2 と傾向 3 が顕在化しない程度を表している．

α_3: 間接否定の削除に伴う傾向 2 の顕在化の程度を表している．

β_3: 間接否定の削除に伴う傾向 3 の顕在化の程度を表している．

γ_3: 間接否定を削除しても傾向 2 と傾向 3 が顕在化しない程度を表している．

流入率には下記の制約がある．

$$0 \le \alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, \gamma_{i+1} \le 1 \qquad (19)$$

$$0 < \alpha_{i+1} + \beta_{i+1} + \gamma_{i+1} \le 1 \qquad (20)$$

$\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}$ は，傾向 1 が抑制される程度を表している．

このように考えると，問題表象の使用率の条件間の依存関係は流入率を媒介変数として用いて次式で表される．これが「確率流モデル」である．

$$\begin{aligned}
P(j=1|i+1) &= P(j=1|i) \\
&\quad - (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}) \\
&\quad \times P(j=1|i) \\
P(j=2|i+1) &= P(j=2|i) \\
&\quad + \alpha_{i+1} \times P(j=1|i) \\
P(j=3|i+1) &= P(j=3|i) \\
&\quad + \beta_{i+1} \times P(j=1|i) \\
P(j=4|i+1) &= P(j=4|i) \\
&\quad + \gamma_{i+1} \times P(j=1|i)
\end{aligned} \qquad (21)$$

したがって，この確率流モデルは問題表象の使用率に関する下記の制約を含意している ($i=1,2; j=2,3,4$)．

$$0 \le \frac{P(j|i+1) - P(j|i)}{P(j=1|i)} \le 1 \qquad (22)$$

$$0 < \frac{P(j=1|i) - P(j=1|i+1)}{P(j=1|i)} \le 1 \qquad (23)$$

このモデルの制約がない場合には，(22) 式と (23) 式は，次の不等式となる．

$$-\infty < \frac{P(j|i+1) - P(j|i)}{P(j=1|i)} < \infty \qquad (24)$$

$$-\infty < \frac{P(j=1|i) - P(j=1|i+1)}{P(j=1|i)} \leq 1 \qquad (25)$$

7.4　確率流モデルの分析

7.4.1　確率流モデルの妥当性

表 2 の実験で得られたデータが (22) 式と (23) 式の制約条件を満たしているか否かをベイズ的アプローチで確率的に評価することにより，確率流モデルの妥当性を定量的に評価することができる．この確率評価は，$P(j|i)(i = 1,2,3; j = 1,...,4)$ の同時事後分布が Dirichlet 分布に従うことを利用して，確率変数の変換 (柳川, 1990, p.33) を実行し，

$$\alpha_{i+1} = \frac{P(j=2|i+1) - P(j=2|i)}{P(j=1|i)} \qquad (26)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{P(j=3|i+1) - P(j=3|i)}{P(j=1|i)} \qquad (27)$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{P(j=4|i+1) - P(j=4|i)}{P(j=1|i)} \qquad (28)$$

$$\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} + \gamma_{i+1} = \frac{P(j=1|i) - P(j=1|i+1)}{P(j=1|i)} \qquad (29)$$

の事後分布を求めることにより行う．

図 10 〜図 12 は一様事前分布に対する流入率とその和の事後分布である．他の中立的な事前分布に対しても同様な事後分布が得られた．表 4 と表 5 は，各々，$0 \leq$ 流入率 ≤ 1，$0 <$ 流入率の和 ≤ 1 の事後確率である．表 6 は流入率とその和の事後期待値である (流入率の事後期待値を $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_i$ で表す)．これらの表には参考のために 3 種類の事前分布に対する結果を記載した．これらの図表から次のことが分かる．

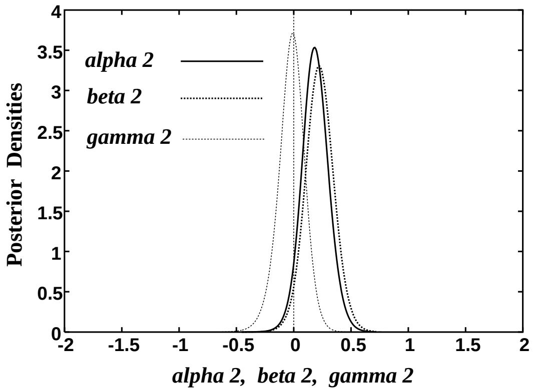

図 10　流入率の事後分布
Fig. 10　Posterior densities for flow rates

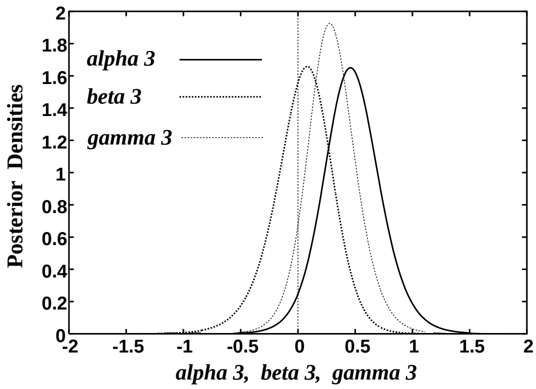

図 11　流入率の事後分布
Fig. 11　Posterior densities for flow rates

(1)　α_2，α_3，β_2，γ_3，および，$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i (i = 2, 3)$ は確率流モデルの制約 (19) 式と (20) 式を満たしている．これらの制約が満たされることの事後確率 (確信の度合 degree of belief) は，3 種類の事前分布に対して実質的な差はなく，0.91 より大きい[9)]．

9) 例えば，$0 \leq \alpha_1 \leq 1$ であることの事後確率は，α_1 の事後確率密度関数の区間 $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ での積分値である．

表 5　$0 < \alpha_i + \beta_i + \gamma_i \le 1$ であることの事後確率
Table 5　Posterior probabilities of $0 < \alpha_i + \beta_i + \gamma_i \le 1$

条件 i	一様事前分布	Jeffreys の無情報事前分布	$K_i \to 0$ の広義事前分布
2	0.994	0.995	0.995
3	1.000	1.000	1.000

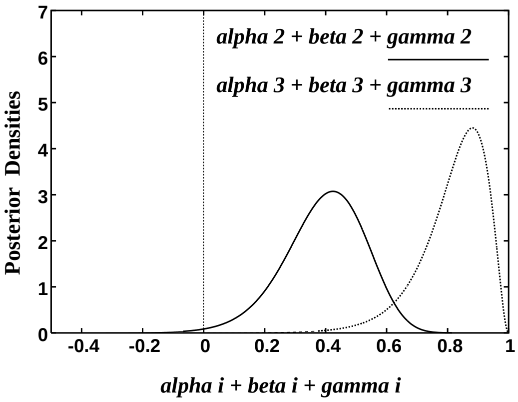

図 12　流入率の和の事後分布
Fig. 12　Posterior densities for sum of flow rates

表 4　$0 \le \alpha_i \le 1$, $0 \le \beta_i \le 1$, $0 \le \gamma_i \le 1$ の事後確率
Table 4　Posterior probabilities of $0 \le \alpha_i \le 1$, $0 \le \beta_i \le 1, 0 \le \gamma_i \le 1$

(A) 一様事前分布の場合

条件 i	α_i	β_i	γ_i
2	0.949	0.966	0.443
3	0.941	0.594	0.913

(B) Jeffreys の無情報事前分布の場合

条件 i	α_i	β_i	γ_i
2	0.954	0.969	0.438
3	0.940	0.596	0.919

(C) $K_i \to 0$ の広義事前分布の場合

条件 i	α_i	β_i	γ_i
2	0.960	0.973	0.432
3	0.937	0.598	0.925

(2)　γ_2, および , β_3 が確率流モデルの制約 (19) 式を満たすことの事後確率は，各々，0.4, 0.6 である．これらの事後確率が 0.5 に近い理由は，図 10，図 11，表 6 から分かるように，流入率の事後期待値が 0 に近く，かつ，事後分布

表 6　流入率とその和の事後期待値
Table 6　Posterior expectations of flow rates and sum of flow rates

(A) 一様事前分布の場合

条件 i	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	$\hat{\gamma}_i$	$\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i + \hat{\gamma}_i$
2	0.189	0.227	−0.020	0.396
3	0.475	0.044	0.297	0.817

(B) Jeffreys の無情報事前分布の場合

条件 i	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	$\hat{\gamma}_i$	$\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i + \hat{\gamma}_i$
2	0.192	0.231	−0.021	0.402
3	0.490	0.046	0.307	0.842

(C) $K_i \to 0$ の広義事前分布の場合

条件 i	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\beta}_i$	$\hat{\gamma}_i$	$\hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i + \hat{\gamma}_i$
2	0.195	0.235	−0.022	0.408
3	0.506	0.047	0.317	0.870

が事後期待値に関して対称であるためである．したがって，これらの事後確率の値は制約 (19) 式との矛盾を意味しているのではなく，これらの流入率が 0 に近いことを示している．

以上の定性的および定量的評価結果から，確率流モデルは「データによる仮説の否定」の効果を計量する問題表象の使用率の「情報使用に関する人間の一般的な傾向」への依存性を表現する妥当なモデルであると考えられる．

7.4.2　直接否定と間接否定の効果の差異の原因

直接否定の削除に伴い「データ－部分表象」の使用をやめた被験者群と直接否定と間接否定の**両者の削除に伴いはじめて**「データ－部分表象」の使用をやめた被験者群とでは，傾向 2 と傾向 3 の顕在化の程度が異なるために，直接否定と間接否定の効果に差異が生じたという可能

性が考えられる．この予想が正しいならば，直接否定と間接否定の効果の差は流入率に現われているはずである．表 6 からこの予想を確かめることができる．すなわち，直接否定の削除では，$\hat{\alpha_2} \simeq 19\%$, $\hat{\beta_2} \simeq 23\%$ となる．一方，間接否定の削除では，$\hat{\alpha_3} \simeq 49\%$, $\hat{\beta_3} \simeq 5\%$ となる．これは直接否定と間接否定の効果の差異が傾向 2 と傾向 3 の顕在化の程度 (前者は α, 後者は β で表されている) の差に起因していることを示している．

8. 考察

直接否定と間接否定の効果の差異は，情報使用の傾向の顕在化の差異に起因していると見ることができることが分かった．では，「なぜ, 直接否定の削除と間接否定の削除とで，情報使用の傾向の顕在化に差異が生じるのか？」について，データと仮説の関連付けの容易さの観点から考えてみよう．

確率更新課題の解決では，データが担っている仮説に関する情報を取り出すために，データを仮説に関連付けることが必要である．次の二つの関連付け法が考えられる．

(1) データを仮説に直接関連付ける方法 (「直接法」と略記する)

(2) データを仮説に対応した尤度を媒介して間接的に関連付ける方法 (「尤度媒介法」と略記する)

直接法は, 直接否定の場合に可能であり, データが問題解決者の注意を直接仮説に誘導するために, 尤度媒介法と比べて, 使用されやすい関連付け法であると考えられる．尤度媒介法は，間接否定の場合に，使用されやすいと考えられる (高橋・井原, 1991; 井原・高橋, 1991b).

これを課題 1 〜課題 3 に適用すると次のようになる．

課題 1: 直接法が使用されやすい．

課題 2: 直接法は不可能で, 尤度 $P(D|B) = 0$ により媒介される尤度媒介法が使用されやすい．

課題 3: 直接法も尤度 $P(D|B) = 0$ により媒介される尤度媒介法も不可能である．

課題 1 において直接法でデータを仮説に関連付ける問題解決者は，尤度を無視しやすいと考えられる (「無視」は人間の情報処理の無視できない重要な特徴である)．一方，課題 2 において尤度 $P(D|B) = 0$ により媒介される尤度媒介法でデータを仮説に関連付ける問題解決者は, 尤度 $P(D|B) = 0$ の使用に誘発されて他の尤度 $P(D|A)$ と $P(D|C)$ も使用する傾向があると考えられる．課題 3 では, 課題 1, 2 と比較して，データを仮説に関連付ける容易な方法が存在しないためにデータの仮説への関連付けは困難であると考えられる．

$\hat{\alpha_2} < \hat{\alpha_3}$ は, 課題 3 には容易な関連付け法が存在しないために，データと仮説の関連付けが放棄されたことを意味していると解釈できる．$\hat{\beta_2} > \hat{\beta_3}$ は, 課題 2 における尤度 $P(D|B) = 0$ の使用に誘発された尤度媒介法の使用，課題 3 におけるデータと仮説の関連付けの放棄を意味していると解釈できる．$\hat{\gamma_2} < \hat{\gamma_3}$ は, 課題 3 において，データと仮説の関連付けが模索されたことを意味していると解釈できる．

9. おわりに

「データによる仮説の否定」が確率更新課題の解決に及ぼす効果を，問題解決の確率モデルに基づき, 問題表象の使用率で計量しベイズ的アプローチで分析した．その結果，次のことが明らかとなった．すなわち，(1)「データによる仮説の否定」は「データ－部分表象」の使用率を大きくする，ベイズ的確率更新の顕著な阻害要因である．(2) 直接否定と間接否定の効果には差異がある．(3)「データによる仮説の否定」という課題構造が削除されると，「事前確率表象」の使用率が増加する．とくに，この

現象は否定なし条件で顕著である．および (4)「不変解」の発現要因としての「話題の限定」説には否定的で，「確率概念の頻度的解釈」説には肯定的な結果が得られた．

問題表象の使用率の条件間の依存関係を「情報使用に関する人間の一般的な傾向」の顕在化の程度 (流入率) で媒介して表現する数理モデル (確率流モデル) を作成し，その妥当性をベイズ的アプローチで示した．この確率流モデルに基づき，直接否定と間接否定の確率更新課題の解決に及ぼす効果の差異を分析し，それは情報使用に関する人間の一般的傾向の顕在化の差異に起因していると見ることができることを示した．「なぜ，直接否定の削除と間接否定の削除とで，情報使用の傾向の顕在化に差異が生じるのか？」について，データと仮説の関連付けの容易さの観点からの解釈を試みた．

「確率概念の頻度的解釈」説は「不変解」の現象を説明できるが，この観点は一面的であるように思われる．これはかなり顕著な現象なのでより広い観点から捉え直すことが望ましい．一つのアイディアは，事前確率を仮説の確からしさについての信念と考え，信念固定と belief perseverance(信念固執) (Nisbett & Ross, 1980; Ross & Anderson, 1982; Harman, 1986) の観点から捉え直すことである．Nisbett and Ross (1980, p.192) は belief perseverance の潜在的意義を次のように捉えている．“People's tendencies to persevere in their beliefs are so striking as to raise the possibility that such perseverance serves goals that may be more fundamental and important than holding correct views of particular issues.” この観点からの研究では，(1) 初期信念の固定の強さを規定する要因，(2) 新しい情報 (データ) と仮説の関連付け，(3) 新しい情報に基づいて信念を変更する場合と変更しない場合 (固執) の条件，(4) 信念の変更と固執の行動科学的意味，に関する考察を深めることが必要となるであろう．

このように捉え直すことにより，Gigerenzer に，“[H]euristics that were proposed in the early 1970s - such as availability and similarity (or representativeness) - were promising but have failed to develop into a theory of human reasoning. [...] [I]n the 20 years of heuristics and biases research since then, a lack of theoretical progress is possibly the most striking result.”(Mayer, 1992, p.112) とまで言わせた，この 20 年間閉塞状況にある，人間の帰納推論に関する研究の新たな展望を拓くことができるのではないかと考えている．今後の興味深い研究課題である．

本論文で得られた分析結果は，学習院大学の教養課程で心理学を受講している大学生を被験者とした結果であり，たとえば日本の全大学生から無作為に抽出した大学生が被験者ではないので，分析結果にはある程度偏りが存在するのではないかとの疑義があり得る．これに対するベイズ統計学の回答はつぎのとおりである．ベイズ統計学では，分析に使用すべきデータについて深く考察し，分析は観察されたデータのみに基づくべきであるという内容の Conditionality Principle(Berger, 1985) と呼ばれる原理を採用している．つまり，ベイズ統計学に基づく分析結果は，実施した実験，たとえば，実験に参加した被験者に条件付けられたものと理解すべきである．しかし，それでは，偏りのない結果は如何にしたら得られるのであろうか，という当然の疑問に対するベイズ統計学の回答は，ベイズの定理に基づく合理的な学習機能を利用して，さまざまな被験者を用いた実験の結果を統合することによりもたらされる，というものである．したがって，偏りのない結果を得るためにも，心理実験に関する公的なデータベースの構築が必要になる．この試みは医学統計学の分野では「メタアナリシス」の名の下に，すで

に，実行されている．認知科学においても重要なテーマとなるであろう．

謝 辞

課題の作成にあたり，東京工業大学の楠見孝氏と電子技術総合研究所の小原健司氏に大変お世話になった．実験の実施に関して楠見氏の力をお借りした．ここに記して謝意を表する．

文 献

Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Making and Bayesian Analysis* (2nd edition). New York: Springer-Verlag.

Box, G. E. P. & Tiao, G. C. (1973). *Statistical Decision Making and Bayesian Analysis.* New York: Wiley. Wiley Classics Library Edition Published 1992.

Epstein, L. D. & Fienberg, S. E. (1992). Bayesian Estimation in Multidimensional Contingency Tables. In P. K. Goel & N. S. Iyengar (Eds.), *Bayesian Analysis in Statistics and Econometrics*, 27–41. New York: Springer-Verlag.

Fisher, R. A. (1959). *Statistical Method and Scientific Inference* (2nd edition). New York: Oliver and Boyd. (渋谷 政昭・竹内 啓 訳 (1962).『統計的方法と科学的推論』. 岩波書店.).

Harman, G. (1986). *Change in View: Principles of Reasoning.* Cambridge, MA: MIT Press.

廣津千尋 (1982).『離散データ分析』. 東京: 教育出版.

市川伸一 (1988). 3囚人問題の解決と理解の過程をめぐって. 日本認知科学会 (編),『認知科学の発展』, 1巻, 1–32. 東京: 講談社サイエンティフィク.

市川伸一 (1989). 3囚人問題の困難性 – 抽象記述による解明 –.『日本認知科学会R＆I研究会資料 (SIGR & I88-2)』, 1–12.

市川伸一・久保信子 (1992). 主観的確率の更新における直観的推論 –3囚人問題の難問版としての「目隠し抽選会問題」–.『日本認知科学会第9回大会論文集』, 112–113.

市川伸一・下條信輔 (1986). 直観的推論における“主観的定理”: “3囚人問題”の解決過程の分析から.『日本認知科学会第3回大会論文集』, p. 14.

Ichikawa, S. & Takeichi, H. (1990). Erroneous Belief in Estimating Posterior Probability. *Behaviormetrika*, **27**, 59–73.

井原二郎 (1988). 3囚人問題の理論的探究. 日本認知科学会 (編),『認知科学の発展』, 1巻, 33–71. 東京: 講談社サイエンティフィク.

井原二郎 (1989). 等比率解と“ベイズ解”の統一的把握の試み – ＜最小情報解＞とその認知科学的解釈 –.『日本認知科学会R＆I研究会資料 (SIGR & I88-2)』, 13–27.

井原二郎・高橋和弘 (1991b). 3囚人問題群の更新解の予備的分析. 日本認知科学会第8回大会配布資料.

伊東裕司 (1988). 3囚人問題の難しさの要因 – 確率的問題解決過程に必要な知識・技能.『日本認知科学会第5回大会論文集』, 84–85.

伊東裕司 (1992a). 数学的概念の多重的表象 – 確率の問題解決過程 –.『日本認知科学会R＆I研究会資料 (SIGR & I92-12)』, p. 1.

伊東裕司 (1992b). 問題集. 日本認知科学会R＆I研究会 (SIGR & I92-12) の資料.

Laplace, P. S. (1814). *Essai philosophique sur les Probabilitiés.* (樋口順四郎訳 (1973) 確率についての哲学的試論『現代の科学I』. 中央公論社.).

Lindley, D. V. (1985). *Making Decisions* (2nd edition). New York: Wiley.

松原望 (1985).『新版 意思決定の基礎』. 東京: 朝倉書店.

松原望 (1989). ベイズの定理. 長坂 (編),『統計学』, 6章. 東京: 日本放送出版協会.

松田紀之 (1988).『質的情報の多変量解析』. 東京: 朝倉書店.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, Problem Solving, Cognition* (2nd edition). New York: Freeman and Company.

宮沢光一 (1973).『情報・決定理論序説』. 東京: 岩波書店.

守一雄 (1988). 確率推定問題はなぜ難しいか.『信州大学教育学部紀要』, **62**, 45–50.

守一雄 (1989a).「3問題問題」を難しくしている真の要因 –「同時に2つ以上の事柄が生起する事態」と「対象を制限した質問がなされる事態」のもつ理解の困難さの実験的検討 –.『信州大学教育学部紀要』, **66**, 81–86.

守一雄 (1989b). 確率推定問題はなぜ難しいか –「3囚人問題」をめぐって.『日本認知科学会R＆I研究会資料 (SIGR & I92-12)』, 35–44.

Nisbett, R. & Ross, L. (1980). *Human Inference: Strategies and Shortcomings of Social Judgment.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Ross, L. & Anderson, C. A. (1982). Shortcom-

ings in the attribution process: On the origins and maintenance of erroneous social assessments. In D. Kahneman, P. Slovic, & A. Tversky (Eds.), *Judgments under uncertainty: Heuristics and biases*, chap. 9. Cambridge: Cambridge University Press.
佐伯胖 (1987). 「3 囚人問題」に関する視点論的分析. 『日本認知科学会第 4 回大会論文集』, 26–27.
繁桝算男 (1976). ベイズ統計学の心理学的データへの適用. 『心理学評論』, **19** (2), 95–115.
繁桝算男 (1985). 『ベイズ統計学入門』. 東京: 東京大学出版会.
Shigemasu, K. & Yokoyama, A. (1994). Flexible Bayesian Approach for Psychological Modeling of Decision Making. *Japanese Psychological Research*, **36** (1), 29–40.
Shimojo, S. & Ichikawa, S. (1989). Intuitive Reasoning about Probability: Theoretical and experimental Analyses of the "Problem of the Three Prisoners". *Cognition*, **32**, 1–24.
高橋和弘 (1990). 文章問題解決における局所的な処理の相互関係: 3 囚人問題の解決モデル. テクニカル・レポート JCSS-TR-90-12, 日本認知科学会.
高橋和弘・井原二郎 (1991). 3 囚人問題と夕食問題のさまざまな解 - 実験的検討. 『日本認知科学会第 8 回大会論文集』, 66–67.
寺尾敦 (1992). 3 囚人問題の事前確率が場合分け方略の採・否に与える影響について. 『日本認知科学会第 9 回大会論文集』, 114–115.
寺尾敦 (1993). 3 囚人問題で算出される多様な解. 『日本認知科学会第 10 回大会論文集』, 176–177.
柳川堯 (1990). 『統計数学』. 東京: 近代科学社.

付 録

A. 心理学のデータの分析とベイズ統計学

心理学のデータの分析に Neyman-Pearson 流の古典的統計学を使用することが慣わしとなっているが, それは不適切である. たとえば, 繁桝 (1976) は 18 年前に既に次のように指摘している.

- "ベイズ統計学では, 観測されたデータは, 既に確率変数ではなく, そのデータが得られたことは既定の事実として統計的推論を進める. 品質管理等におけるような標本空間が比較的明確な分野においては, あるいは, 繰り返しを前提として, 良い推論の方式を定めようという Neyman-Pearson の考え方が適しているかもしれないが, 心理学や教育学の場合, はたしてこれがどれほど研究者の問題関心に答えられるか疑問である"
- "Neyman-Pearson 流の検定では, 観測数が増えれば, まず確実に帰無仮説は棄却されることになる. 心理学のデータで, 労をおしまず観測数を増やしていけば, 常に有意な結果が得られるような検定法によって合理的な結論が得られるということは期待できない"

B. 課題

課題 1[10)]

問題

ある動物心理学の研究室では, チンパンジーが 500 円硬貨を自動販売機に入れるように訓練しました.

自販機は A, B, C の 3 台あります. このチンパンジーは 1 枚の 500 円硬貨をもらうと, 3 台の自販機のいずれかに入れますが, A, B, C に入れる可能性は, 各々, 20%, 10%, 70% であることが分かっています.

ある時, 賭け事が好きな教授が学生につぎのような賭を提案しました. 「今, 500 円硬貨を 1 枚このチンパンジーに与えたが, このチンパンジーがどの自販機に 500 円硬貨を入れたか当てたら 1000 円あげよう. 外れたら私が 1000 円もらう」

この学生はこっそりと研究助手に「どの自販機に入れたか教えて欲しい」と頼みました. 研究助手は「それはできないが, 自販機 B と自販機 C のうち入れなかった自販機一つなら教えてもよい」と答えました. 学生はこれに同意しま

10) 課題 1 〜 3 を作成する際, 伊東 (1992b) のチンプ問題を参考にした.

した.

このとき研究助手が学生に「B には入れなかった」と教える可能性は，A に入れた場合には 50%，B に入れた場合には 0%，C に入れた場合には 100% です．また，研究助手が学生に「C には入れなかった」と教える可能性は，A に入れた場合には 50%，B に入れた場合には 100%, C に入れた場合には 0% です.

結局，研究助手は学生に「B には入れなかった」と教えました.

さて, この時, このチンパンジーが 500 円硬貨を自販機 A, B, C に入れた可能性はいくらになると思いますか？ あなたの答えを比で示してください.

A に入れた可能性 ： B に入れた可能性 ： C に入れた可能性 ＝ 　　： 　　：

課題 2

問題

ある動物心理学の研究室では，チンパンジーが 500 円硬貨を自動販売機に入れるように訓練しました.

自販機は A, B, C の 3 台あります．このチンパンジーは 1 枚の 500 円硬貨をもらうと，3 台の自販機のいずれかに入れますが，A, B, C に入れる可能性は，各々，20%, 10%, 70% であることが分かっています.

これらの自販機は 500 円硬貨を入れたときバナナが出たり出なかったりします．つまり, 500 円硬貨を入れてバナナが出る可能性は，A の自販機の場合は 50%, B の自販機の場合は 0%, C の自販機の場合は 100% です．また，500 円硬貨を入れてバナナが出ない可能性は，A の自販機の場合は 50%, B の自販機の場合は 100%, C の自販機の場合は 0% です.

ある時，研究助手が 500 円硬貨を 1 枚与えたところ，このチンパンジーはいずれかの自販機に 500 円硬貨を入れてバナナを得ました.

さて, この時, このチンパンジーが 500 円硬貨を自販機 A, B, C に入れた可能性はいくらになると思いますか？ あなたの答えを比で示してください.

A に入れた可能性 ： B に入れた可能性 ： C に入れた可能性 ＝ 　　： 　　：

課題 3

課題 2 の「B の自販機の場合は 0%」を「B の自販機の場合は 40%」に，「B の自販機の場合は 100%」を「B の自販機の場合は 60%」に変えた課題.

各課題の次の頁に下記の質問を記載した.

質問　どのようにして問題の答えを求めましたか？ できるだけ詳しく説明してください．計算で求めた場合には，その計算式も書いてください.

C. 要素解の定義

(1) 用語

仮説 A: チンパンジーが 500 円硬貨を自販機 A に入れる.

仮説 B: チンパンジーが 500 円硬貨を自販機 B に入れる.

仮説 C: チンパンジーが 500 円硬貨を自販機 C に入れる.

- 課題 1 の場合

  D：研究助手が学生に「B には入れなかった」と教える.

  —D: 研究助手が学生に「C には入れなかった」と教える.

  事前確率：500 円硬貨を入れる可能性 ($P(A) = 20\%, P(B) = 10\%, P(C) = 70\%$).

  データに対応した関係情報：研究助手が学生に「B には入れなかった」と教える可能性 ($P(D|A) =$

$50\%, P(D|B) = 0\%, P(D|C) = 100\%$).

- 課題 2 の場合

  D：バナナが出る.

  ¬D: バナナが出ない.

  事前確率：500 円硬貨を入れる可能性 ($P(A) = 20\%, P(B) = 10\%, P(C) = 70\%$).

  データに対応した関係情報：500 円硬貨を入れてバナナが出る可能性 ($P(D|A) = 50\%, P(D|B) = 0\%, P(D|C) = 100\%$).

- 課題 3 の場合

  D：バナナが出る.

  ¬D: バナナが出ない.

  事前確率：500 円硬貨を入れる可能性 ($P(A) = 20\%, P(B) = 10\%, P(C) = 70\%$).

  データに対応した関係情報：500 円硬貨を入れてバナナが出る可能性 ($P(D|A) = 50\%, P(D|B) = 40\%, P(D|C) = 100\%$).

(2) 要素解の定義

- 等比率解

  (1)B に入れた可能性はゼロ.

  (2)A, C に入れた可能性

  (2-1) 事前確率の比.

  (2-2)B の事前確率 10% を A と C の事前確率の比 2 : 7 で A と C に比例配分して A の事前確率 20% と C の事前確率 70% に加えた解.

  例：20 : 0 : 70(および, これと等価な比)

- 配分解

  (1)B に入れた可能性はゼロ.

  (2) A, C に入れた可能性

  B の事前確率の 10% を A と C に配分して A の事前確率 20% と C の事前確率 70% に加えた解. ただし, B の事前確率の 10% を A と C の事前確率の比で比例配分して A と C の事前確率に加えた解は等比率解に分類する.

  例：25 : 0 : 75(等配分解), 30 : 0 : 70, 20 : 0 : 80

- 場合解

  (1)B に入れた可能性はゼロ.

  (2) A に入れた可能性と C に入れた可能性は等しい.

  例：50 : 0 : 50 (および, これと等価な比)

- 尤度解

  データに対応した関係情報の比.

  例：課題 1 と課題 2 では, 50 : 0 : 100(および, これと等価な比). 実験問題 3 では, 50 : 40 : 100(および, これと等価な比).

- 部分不変解

  データに対応した関係情報の $P(D|C)$= 100% を使用し,「C に入れた可能性」を C の事前確率 $P(C) = 70\%$ と同じにしている解.

  例：15 : 15 : 70

- 不変解

  事前確率の比.

  例：20 : 10 : 70(および, これと等価な比)

- 非ベイズ的統合解

  事前確率とデータに対応した関係情報の両者を考慮して求めた, ベイズ解以外の解. ただし, 課題 1 と課題 2 では,「B に入れた可能性」がゼロでない解は「その他の解」に分類する. 課題 3 では,「入れた可能性」にゼロがある解は「その他の解」に分類する.

表 7　要素解の観測度数
Table 7　Observed frequencies of elementary solutions

条件 i	等比率解	配分解	場合解	尤度解	部分不変解	不変解	非ベイズ的統合解	ベイズ解	その他の解	計
1	11	10	3	6	0	4	0	5	6	45
2	4	7	1	4	0	9	3	8	5	41
3	0	0	0	0	2	17	3	9	10	41

- ベイズ解
  事前確率の各項をデータに対応した関係情報の対応する項に掛けたものの比.
  例：課題 1 と課題 2 では, $20 \times 50 : 10 \times 0 : 70 \times 100$(および, これと等価な比). ただし, B に入れた可能性は, 10 と 0 を明示的に掛けずにゼロとしたものでも良い. 課題 3 では, $20 \times 50 : 10 \times 40 : 70 \times 100$(および, これと等価な比).
- その他の解
  以上の 8 種類のカテゴリーに分類できない解.

D.　要素解の同定基準

要素解の同定には下記の情報を使用する. (1) 問題の回答欄の数値, (2) 問題解決時のメモ, および, (3) 質問の回答. 注 1：回答欄が空欄である回答は無効回答とする. 注 2：(1) と (3) に理解不可能な不整合がある場合には「その他の解」に分類する. 注 3：(1) の数値から要素解の種類を推測できても, (2) と (3) に記載が無い場合あるいは「勘」とのみ記載されている場合には「その他の解」に分類する.

E.　要素解の観測度数

各条件における要素解の観測度数を表 7 に示す.

(1994年 7 月4日受付)
(1994年12月1日採録)

井原　二郎 (正会員)
1943 年東京生まれ. 1969 年成蹊大学大学院工学研究科修士課程終了. 同年電気試験所 (現電子技術総合研究所) 入所. 1976 年から 1977 年まで旧ソヴィエト連邦ウクライナ共和国ウクライナ科学アカデミー・サイバネティックス研究所に留学. 主任研究官. 工学博士. E-mail: ihara@etl.go.jp.

田村　佳彦 (正会員)
1945 年佳木斯生まれ. 1970 年京都大学大学院工学研究科修士課程終了. 同年電子技術総合研究所入所. 主任研究官. E-mail: tamura@etl.go.jp.