5) 振動工学

1　1 自由度系の振動

1.1　1 自由度系のモデル

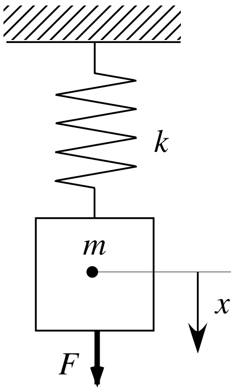

図 1: 1 自由度振動系

図 1 のように物体が上下方向のみに運動する振動系を 1 自由度系という。この系の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -f + F = kx + F \tag{1}$$

ここで $f = kx$ は系より発生する力、F は外力を示す。

1.2　自由振動

式 1 の運動方程式を解く場合、二つの解（基本解、特解）を求めこれらを線形結合し一般解を求める。さらに一般解に境界条件を代入すると完全解が得られる。

1.2.1　減衰項の無い自由振動

式 (1) において外力が 0 の場合、運動方程式は、

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2}$$

となる。この解を $x = Ae^{st}, A \neq 0$ とおくと式 (2) は

$$(ms^2 + k)Ae^{st} = 0 \tag{3}$$

となる。これが成り立つためには、

$$ms^2 + k = 0 \tag{4}$$

$$s = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}j \tag{5}$$

となるので、この系の一般解は、

$$x = A_1 e^{\sqrt{\frac{k}{m}} jt} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} jt} \tag{6}$$

$$= A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi) \tag{7}$$

となる。この解において $\omega_n = \sqrt{k/m}$ を固有角振動数 [rad/s] とよび、式 (4) を特性方程式という。また、$f_n = \omega_n / 2\pi$ を固有振動数 [Hz] と呼ぶ。

1.2.2　減衰項のある自由振動

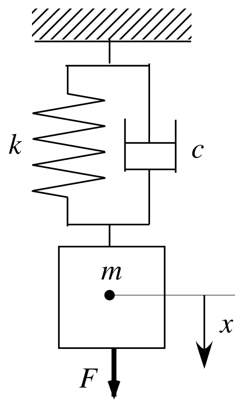

図 2: 1 自由度振動系 (減衰のある場合)

図 2 のように、エネルギー散逸項として速度に対して線形な減衰力を発生する場合を考える。この場合、

$$f = kx + c\dot{x} \tag{8}$$

となる。ここで c は減衰係数である。式 (8) を式 (1) に代入し、$F = 0$ とすると、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{9}$$

となる。この解を $x = Ae^{st}, A \neq 0$ とおく。式 (9) に代入すると、

$$(ms^2 + cs + k)Ae^{st} = 0 \tag{10}$$

となる。特性方程式は、

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{11}$$

となる。ここで係数 c の値を増加させると、この根は共役複素数根から重根、2 実根へ変化する。ここで重根を与えるときの係数 c を臨界減衰係数 c_c といい

$$c_c = 2\sqrt{mk} \tag{12}$$

とあらわす。また、減衰比 ζ は

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \tag{13}$$

とあらわす。式 (11) に減衰比 (式 (13)) および固有角振動数 ($\omega_n = \sqrt{k/m}$) を代入して、

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \tag{14}$$

となる。s は、

$$\zeta < 1 : s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, j \tag{15}$$

$$\zeta = 1 : s = -\zeta\omega_n \tag{16}$$

$$\zeta > 1 : s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{17}$$

$x = Ae^{st}, A \neq 0$ に代入すると、

$$\zeta < 1 : x = e^{-\zeta w_n t}\{A_1 \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) + A_2 \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)\} \tag{18}$$

$$\zeta = 1 : x = e^{-\zeta w_n t}(A_1 + A_2 t) \tag{19}$$

$$\zeta > 1 : x = e^{-\zeta\omega_n t}\{A_1 \cosh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t) + A_2 \sinh(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)\} \tag{20}$$

となる。初期条件が $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ の応答を図 3 に示す。

1.3　強制振動

1.3.1　減衰の無い強制振動

式 (1) において外力 F に周期関数が作用する場合を強制振動という。このときの運動方程式は、

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin\omega t \tag{21}$$

ここで F_0, ω はそれぞれ外力の振幅および角振動数を示す。強制振動の場合、特解を

$$x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t \tag{22}$$

とおき式 (21) に代入すると

$$A_1(-m\omega^2 + k)\sin\omega t + A_2(-m\omega^2 + k)\cos\omega t = F_0 \sin\omega t \tag{23}$$

ここで cos の項は 0 であるので $A_2 = 0$ となる。*sin* の項については

$$A_1(-m\omega^2 + k) = F_0 \tag{24}$$

$$A_1 = \frac{F_0}{-m\omega^2 + k} \tag{25}$$

$\omega_n = \sqrt{k/m}$ を用いて整理すると

$$A_1 = \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + \frac{k}{m}} F_0 = \frac{1}{m}\frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} F_0 \tag{26}$$

式 (26) から、

$$\omega \to 0 : A_1 \to \frac{1}{k} F_0 \tag{27}$$

$$\omega \to \infty : A_1 = 0 \tag{28}$$

強制振動の場合、入力に対して出力がどの程度になるのかが重要である。この比の絶対値をゲイン ($|A_1/F_0|$) と呼ぶ。横軸を ω/ω_n、縦軸をゲインで表すと図 4 となる。

1.3.2 減衰のある強制振動（力-入力）

外力が周期関数の場合の運動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t \tag{29}$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \tag{30}$$

特解を

$$x = A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t \tag{31}$$

とおく。式 (30) に代入すると、

$$(-A_1\omega^2 \sin\omega t - A_2\omega^2 \cos\omega t) + 2\zeta\omega_n(A_1\omega\cos\omega t - A_2\omega\sin\omega t) + \omega_n^2(A_1 \sin\omega t + A_2\cos\omega t) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \tag{32}$$

$$\{A_1(-\omega^2 + \omega_n^2) - 2A_2\zeta\omega_n\omega\}\sin\omega t + \{2A_1\zeta\omega_n\omega + A_2(-\omega^2 + \omega_n^2)\}\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \tag{33}$$

ここで sin と cos の係数を比較すると、

$$\begin{pmatrix} \omega_n^2 - \omega^2 & -2\zeta\omega_n\omega \\ 2\zeta\omega_n\omega & \omega_n^2 - \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

であるから、

$$A_1 = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\frac{F_0}{m} \tag{35}$$

$$A_2 = \frac{-(2\zeta\omega_n\omega)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}\frac{F_0}{m} \tag{36}$$

また、ゲインおよび位相は、

$$G = \frac{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}{\frac{F_0}{m}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \tag{37}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \tag{38}$$

となる。これを図 5 に示す。

1.4 伝達関数

1 次元無減衰系の運動方程式は、

$$m\ddot{x}+kx=f(t) \tag{39}$$

式 (39) をフーリエ変換すると、

$$X(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2}F(\omega) \tag{40}$$

ここで伝達関数を $H(\omega)$ とおくと、

$$H(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2}=\frac{X(\omega)}{F(\omega)} \tag{41}$$

となる。ここで応答として変位を取った。この伝達関数を**コンプライアンス**という。他の応答を用いた場合の伝達関数について表**??**にまとめる。

表 1: 伝達関数

定義	伝達関数	定義	伝達関数
変位/外力	コンプライアンス	外力/変位	動剛性
速度/外力	モビリティ	外力/速度	機械インピーダンス
加速度/外力	イナータンス	外力/加速度	動質量

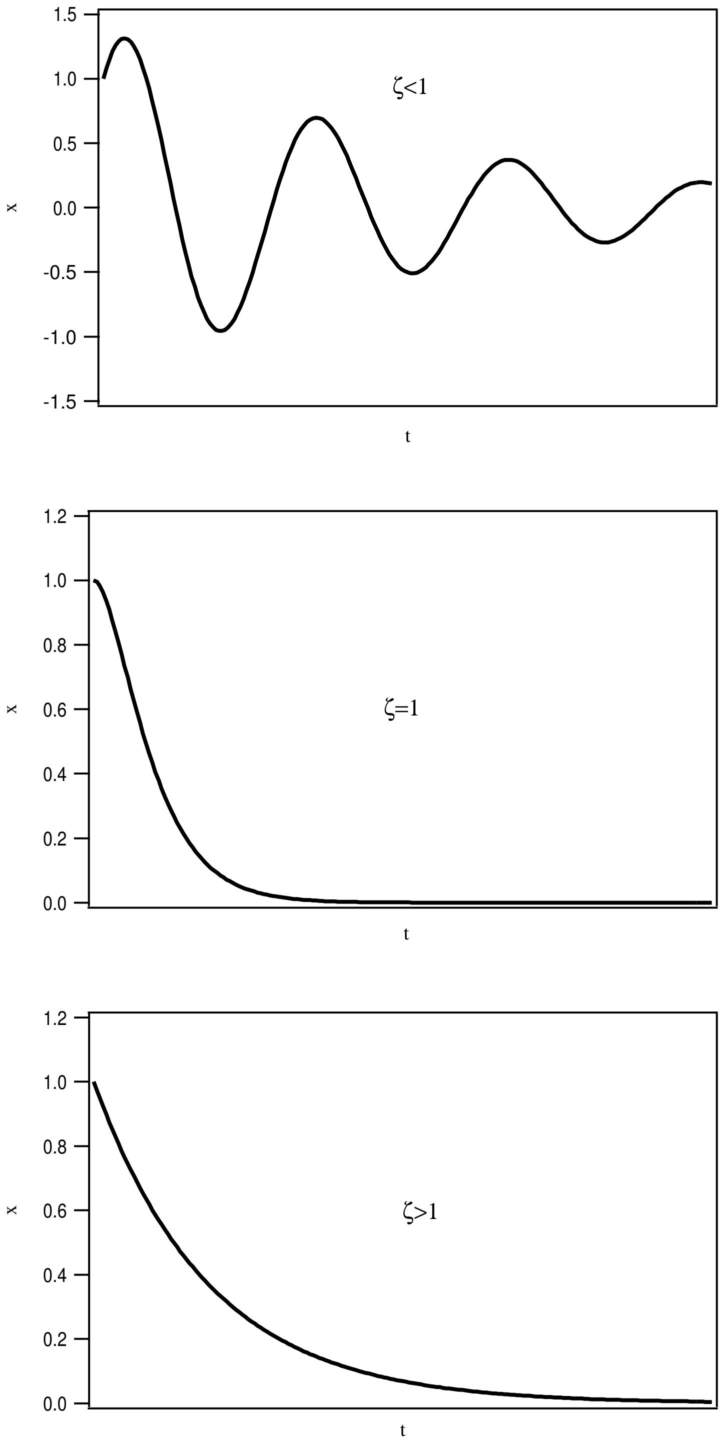

図 3: 減衰比による応答変化

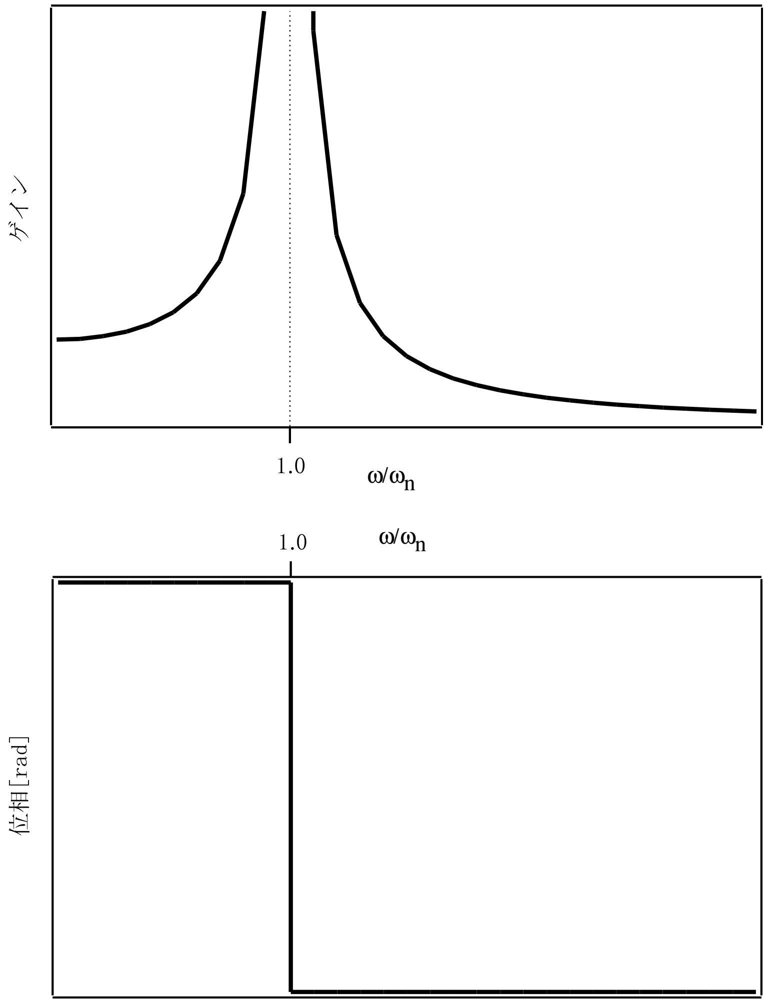

図 4: 減衰の無い場合の強制振動

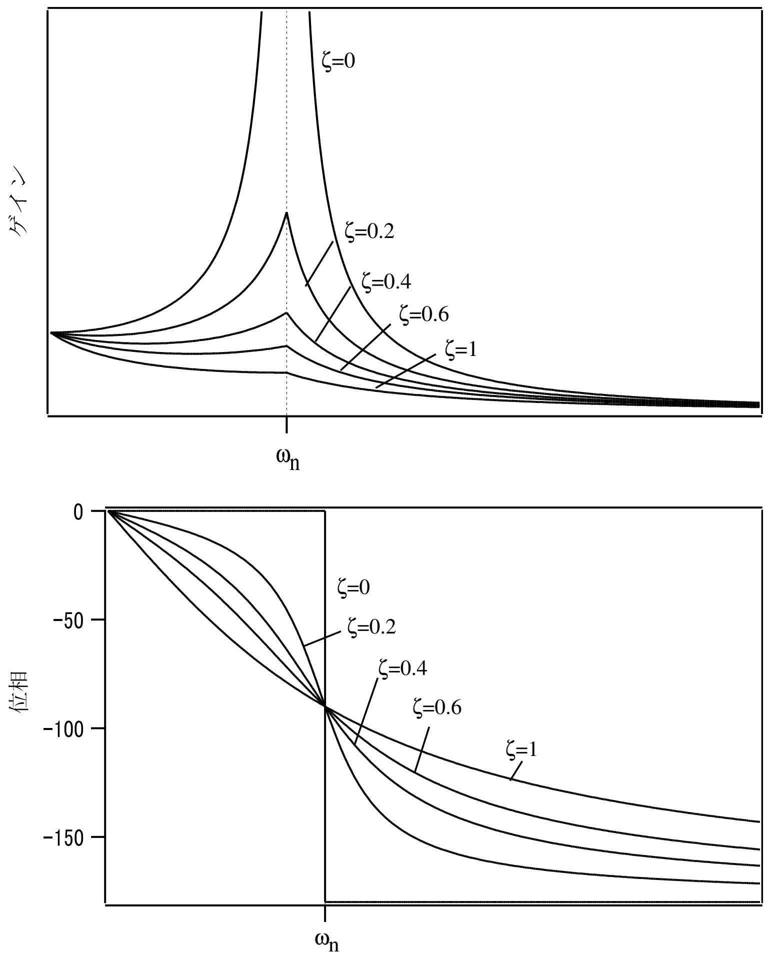

図 5: 減衰のある場合の強制振動