第 1 章

（´・∀・｀）観測代数（´・∀・｀）

1.1

炉には面積 dA の穴が開いているとする。穴の面素 dA にぶつかる粒子が、そのままの速度で容器から出て行くことは明らかである。時間 dt の間に、速度 $\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$ で面素 dA にぶつかる粒子の数 d^5N は期待の速度分布を $f(\boldsymbol{v})$ として、

$$d^5N = \frac{N}{V} v_z dt dA f(\boldsymbol{v}) d^3\boldsymbol{v} \tag{1.1}$$

である。$v_z < 0$ の粒子は炉の外には出ないので、これは $v_z > 0$ についてだけ成り立つ。

穴から出てゆく粒子の速度分布 $f^*(\boldsymbol{v})$ は $v_z f(\boldsymbol{v})$ に比例する。すなわち

$$f^*(\boldsymbol{v}) = c v_z f(\boldsymbol{v}) \tag{1.2}$$

と書ける。$f^*(\boldsymbol{v})|_{v_z=0}$ であるが、これは $v_z = 0$ の粒子は炉の外に出ないことを表す。(1.2) 式では炉から粒子が出て行くことによって炉の中の平衡状態が乱されることがないということを仮定している。

比例計数 c は規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f^*(\boldsymbol{v}) = 1 \tag{1.3}$$

から決められる。マクスウェルの分布関数 $f(\boldsymbol{v})$ を、速度の各成分の分布関数

$$f_i(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left\{-\frac{mv_i^2}{2kT}\right\} \tag{1.4}$$

を使って、

$$f(\boldsymbol{v}) = f_x(v_x) f_y(v_y) f_z(v_z) \tag{1.5}$$

と書いておくと計算が簡単になる。ここで $f_i(v_i)$ はそれぞれ 1 に規格化されているとする。炉から出てゆく粒子の速度の x 成分と y 成分とは、炉の中と同じガウス分布をして

いる。しかし、z 成分の分布関数には $v_z(>0)$ の重みが付く。規格化条件である (1.3) 式から、

$$c\int_{-\infty}^{\infty} dv_z v_z f(v_z) = 1 \tag{1.6}$$

すなわち、

$$c\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^{\infty} dv_z v_z \exp\left\{-\frac{mv_z^2}{2kT}\right\} = 1 \tag{1.7}$$

となる。$y = mv_z^2/2kT$ と変数変換すれば、

$$c\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^{\infty} e^{-y}dy = 1 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} \tag{1.8}$$

と求まる。よって、炉から出てゆく粒子の速度分布は、

$$f^*(\boldsymbol{v}) = f_x(v_x)f_y(v_y)\sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}v_z f_z(v_z) \tag{1.9}$$

と求まった。この分布関数から粒子の速度の z 方向の 2 乗平均は

$$\begin{aligned}\langle v_z^2\rangle &= \int v_z^2 f^*(\boldsymbol{v})d^3\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}\int_0^{\infty} v_z^3 f_z(v_z)dv_z \\ &= \frac{m}{kT}\int_0^{\infty} v_z^3 \exp\left\{-\frac{mv_z^2}{2kT}\right\}dv_z \\ &= \frac{m}{kT}\frac{kT}{m}\frac{2kT}{m}\int_0^{\infty} ye^{-y}dy = \frac{2kT}{m}\end{aligned} \tag{1.10}$$

と求まる。ここで平均を表す $\langle\cdot\rangle^*$ のアスタリスクは分布関数 f^* での平均を表す。x 成分、y 成分の 2 乗平均は炉の中と同じく

$$\langle v_x^2\rangle^* = \langle v_y^2\rangle^* = \langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \frac{kT}{m} \tag{1.11}$$

である。よって炉から出てゆく粒子の平均運動エネルギーは、

$$\langle \epsilon_{\rm kin}\rangle^* = \frac{1}{2}m\left(\langle v_x^2\rangle^* + \langle v_y^2\rangle^* + \langle v_z^2\rangle^*\right) = 2kT \tag{1.12}$$

これは炉の中の粒子の平均運動エネルギー $\frac{3}{2}kT$ よりも大きい。(1.12) 式に炉の温度 $T = 2500$(K) を代入して、

$$\langle \epsilon_{\rm kin}\rangle^* = 2\times 1.38\times 10^{-23}\times 2500 = 6.9\times 10^{-20} \quad (\mathrm{J}) \tag{1.13}$$

銀原子 1 個の質量は $107.9\times 10^{-3} \div (6.02\times 10^{23}) = 1.8\times 10^{-25}$(kg) であるからその 2 乗平均速度は

$$\sqrt{\langle v^2\rangle^*} = \sqrt{\frac{2\langle\epsilon_{\rm kin}\rangle^*}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 6.9\times 10^{-20}}{1.8\times 10^{-25}}} = 880 \ (\mathrm{m/s}) \tag{1.14}$$

である。■

1.2

$\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$、$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とおく。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} \tag{1.15}$$

で、$\boldsymbol{\mu} = \gamma \boldsymbol{J}$ として上式を成分ごとに書き下すと

$$\frac{\mathrm{d}J_x}{\mathrm{d}t} = \gamma B J_y \ , \qquad \frac{\mathrm{d}J_y}{\mathrm{d}t} = -\gamma B J_x \ , \qquad \frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.16}$$

これを解いて、

$$J_x = J_0 \sin(\gamma B t + \delta) \ , \qquad J_y = J_0 \cos(\gamma B t + \delta) \ , \qquad J_z = J_1 \tag{1.17}$$

を得る。(J_0 , J_1 , δ は定数。) 従って、最初に $J_z = 0$ 仮定すると $\boldsymbol{J}$ は時間 $T = \pi/\gamma B$ の後に向きが反対になる。平均速度を v とすると $d = vT$ であり、v として問題 1.1 で求めた値を用い、さらに $\gamma = 1.76 \times 10^7$、$B = 0.01$[cgs 単位] とすると

$$d = vT = 880 \times 10^2 \times \frac{\pi}{1.76 \times 10^7 \times 0.01} = 160 \ \ (\mathrm{cm}) \tag{1.18}$$

となる。■

1.3

自明であって示すべくもないと思うけど、一応やってみる。

磁気モーメントの大きさは規格化を適当に選んで 1 としてよい。すなわち $\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 = 1$ とできるから、極座標を使って

$$\mu_x = \sin\theta\cos\varphi \ , \qquad \mu_y = \sin\theta\sin\varphi \ , \qquad \mu_z = \cos\theta \tag{1.19}$$

とおける。磁気モーメントは高温のために、均等に全ての方向に分布しているとあるから、単位球上の点はどれも同じ重みを与える。すると、磁気モーメントが (θ, φ) 方向を向いている確率は

$$P(\theta, \phi) = \frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{4\pi} = \frac{\mathrm{d}\varphi |\mathrm{d}\mu_z|}{4\pi} \tag{1.20}$$

となる。したがって磁気モーメントの z 成分 μ_z の分布だけに注目すると、方位角 φ 方向については積分して、

$$P(\mu_z) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{\mathrm{d}\mu_z}{4\pi} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\mu_z \tag{1.21}$$

が得られ、μ_z の分布関数が定数となる。ゆえに μ_z の分布は一定である。■

1.4

μ_z の測定値は $\pm\mu$ なのであるから，μ_z^2 について観測を行なうと測定値は μ^2，μ_x^2, μ_y^2 についても同様に測定値は μ^2 となる．しかしながら $\boldsymbol{\mu}^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2$ の測定値は $\mu(\mu+1)$ となるはずである．$\boldsymbol{\mu}$ というベクトル（スピンベクトル）はどちらを向いているかなどということを議論することはできない．ただその x, y, z 成分がそれぞれ個別に測定できるのみである．■

1.5

シュテルン・ゲルラッハの実験では $a' = \pm\mathrm{m.m.}$ の 2 種類しかないから

$$|a'a'| + |a''a''| = |\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow| = 1 \tag{1.22}$$

となり全てを偏見なく受け入れる観測行為である．しかし穴の 2 つ開いたスリットの実験というだけでは別に全てを受け入れるかどうかについて何も言っていないので，この説は正しくないと言える．■

1.4 と 1.5 はあんまりよくわからないな...(´・ω・`)

1.6

$$\begin{aligned}[|a'a'| + |a''a''|]^2 &= (|a'a'| + |a''a''|)(|a'a'| + |a''a''|) \\ &= |a'a'||a'a'| + |a'a'||a''a''| + |a''a''||a'a'| + |a''a''||a''a''| \\ &= |a'a'| + 0 + 0 + |a''a''| \\ &= |a'a'| + |a''a''| \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{1.23}$$

1.7

$$\begin{aligned}[|a'a''|, |a'''a''''|] &= |a'a''||a'''a''''| - |a'''a''''||a'a''| \\ &= \delta(a'', a''')|a'a''''| - \delta(a'''', a')|a'''a''| \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{1.24}$$

結果のトレースは,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[|a'a''|, |a'''a''''|\right] &= \delta(a'', a''')\delta(a', a'''') - \delta(a'''', a')\delta(a''', a'') \\ &= 0 \qquad \blacksquare\end{aligned} \tag{1.25}$$

1.8

$$\begin{aligned}\langle\overline{a'}|\overline{a''}\rangle &= \lambda(a')[\lambda(a'')]^{-1}\langle a'|a''\rangle \\ &= \lambda(a')[\lambda(a'')]^{-1}\delta(a', a'') \\ &= \lambda(a')[\lambda(a')]^{-1}\delta(a', a'') \\ &= \delta(a', a'') \quad \blacksquare\end{aligned} \tag{1.26}$$

さらに

$$\begin{aligned}\sum_{a'}|\overline{a'}\rangle\langle\overline{a'}| &= \sum_{a'}\lambda(a')[\lambda(a')]^{-1}|a'\rangle\langle a'| \\ &= \sum_{a'}|a'\rangle\langle a'| = 1 \quad \blacksquare\end{aligned} \tag{1.27}$$

また

$$\langle\overline{b'}|\overline{a'}\rangle = \lambda(b')[\lambda(a')]^{-1}\langle b'|a'\rangle \tag{1.28}$$

であり,

$$\langle\overline{a'}|\overline{b'}\rangle^* = \lambda(a')^*[\lambda(b')^*]^{-1}\langle b'|a'\rangle \tag{1.29}$$

なので, $\langle\overline{b'}|\overline{a'}\rangle = \langle\overline{a'}|\overline{b'}\rangle^*$ が成り立つためには

$$\lambda(b')[\lambda(a')]^{-1} = \lambda(a')^*[\lambda(b')^*]^{-1} \tag{1.30}$$

あるいは

$$|\lambda(a')| = |\lambda(b')| \tag{1.31}$$

つまり $\lambda(\cdot)$ の絶対値が一定値であればよい. この任意性—定義の自由度—を用いて, $\langle\overline{a'}|\overline{b'}\rangle$ がそれ自体では確率とならず, $\langle a'|\rangle b'\rangle\langle b'|\rangle a'\rangle$ が確率となることを議論せよ. とあるがよく分からない.