

# マクロ経済学 2 前期レポート

sin

平成 13 年 7 月 27 日

## 第1章 新古典派成長理論

集計的生産関数  $Y = F(K, AL)$  ( $F(K, AL)$  は  $K, AL$  について一次同次の関数)

資本の限界生産力

$$= \frac{\partial Y(K, AL)}{\partial K} \quad (1.1)$$

労働の限界生産力

$$= \frac{\partial Y(K, AL)}{\partial AL} \quad (1.2)$$

左辺より右辺を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\frac{K}{AL}, 1)}{\partial \frac{K}{AL}} &= \frac{\partial(F(K, AL) * \frac{1}{AL})}{\partial K} * \frac{\partial K}{\partial \frac{K}{AL}} \\ &= \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} * \frac{1}{AL} * \frac{1}{\frac{\partial \frac{K}{AL}}{\partial K}} \\ &= \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} \end{aligned}$$

## 第2章 最適貯蓄理論

解くべき問題は、割引率を用いた通時的効用の総和の制約つき最大化問題である。

$$\max_{c_0 \dots c_{T-1}, k_1 \dots k_{T-1}} W = \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t U(c_t) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} &\text{subject to } (1+n)k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t \quad (t = 0 \dots T-1) \\ &\text{given } k_0, k_T \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.2) 式を (2.1) 式に代入して問題を書き換えると

$$\begin{aligned} \max_{k_1 \dots k_{T-1}} W &= \sum_{t=0}^{T-1} \rho^t U(f(k_t) + k_t - (1+n)k_{t+1}) \\ &\text{given } k_0, k_T \end{aligned} \quad (2.3)$$

と資本ストックについてのみの関数とできる。この問題の1階の条件は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial k_t} &= \frac{U'(f(k_t) + k_t - (1+n)k_{t+1})}{(1+\rho)^t} * (f'(k_t) + 1) \\ &\quad + \frac{U'(f(k_{t-1}) + k_{t-1} - (1+n)k_t)}{(1+\rho)^{t-1}} * (-(1+n)) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \iff &\frac{U'(f(k_t) + k_t - (1+n)k_{t+1})}{(1+\rho)^t} * (1 + f'(k_t)) \\ &= \frac{U'(f(k_{t-1}) + k_{t-1} - (1+n)k_t)}{(1+\rho)^{t-1}} * (1+n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\iff \frac{U'(c_t)}{(1+\rho)^t} * (1 + f'(k_t)) = \frac{U'(c_{t-1})}{(1+\rho)^{t-1}} * (1+n) \quad (2.6)$$

(2.6) 式はケインズ＝ラムゼイ条件の変形版であり、これで答えが示された。

### 第3章 技術進歩と成長

ヒックス中立型生産関数がヒックス中立を満たすことの証明。

$$\begin{aligned} \tilde{F}(K, L) \text{ がヒックス中立 } (\tilde{F}(K, L) = A_H F(K, L)) \\ \iff \frac{K}{L} = \frac{K'}{L'}, L \neq L' \Rightarrow \frac{r}{w} : \text{constant} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし、 $\frac{r}{w}$  は以下の問題を解くことで得られる。

$$\max_{K, L} \Pi(K, L) = pY - rK - wL \quad (3.2)$$

$$\text{subject to } Y = \tilde{F}(K, L) \quad (3.3)$$

$$(3.3) \text{ 式を (3.2) 式に代入して 1 階の条件を求めると} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = p \frac{\partial \tilde{F}(K, L)}{\partial K} - r = 0 \iff p A_H \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = r \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = p \frac{\partial \tilde{F}(K, L)}{\partial L} - w = 0 \iff p A_H \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = w \quad (3.6)$$

(3.5) 式、(3.6) 式より  $\frac{r}{w}$  を求めると、 $f(k) \equiv F(\frac{K}{L}, 1), k \equiv \frac{K}{L}$  として

$$\begin{aligned} \frac{r}{w} &= \frac{p A_H \frac{\partial F(K, L)}{\partial K}}{p A_H \frac{\partial F(K, L)}{\partial L}} \\ &= \frac{\frac{\partial F(K, L)}{\partial K}}{\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}} \\ &= \frac{\frac{\partial (F(\frac{K}{L}, 1)) * L}{\partial K}}{\frac{\partial (F(\frac{K}{L}, 1)) * L}{\partial L}} \\ &= \frac{f'(k) * \frac{1}{L} * L}{f'(k) * (-\frac{K}{L^2}) * L + f(k)} \\ &= \frac{f'(k)}{f(k) - f'(k) * k} \end{aligned}$$

このように  $\frac{r}{w}$  を求めると、それが  $k$  のみについての関数で表現されることがわかる。したがって、 $k$  が一定のとき ( (3.1) 式的前提が成立するとき ) には  $\frac{r}{w}$  が一定値を取ることがいえ、ヒックス中立が証明される。