

付録1 ソロー残差の導出

まず、以下のように記号を定義する

Y:生産量 K:資本ストック量 L:労働量 (労働者*労働時間) A:技術

p:生産物価格 r:単位資本コスト w:単位貨幣賃金

ヒックス中立型の集計的生産関数 $Y = AF(K, L)$ についてのソロー残差を考える。(F(K, L) は K, L について一次同次の関数と仮定)

まず、生産関数の両辺を対数にする。

$$\ln(Y) = \ln(A) + \ln(F(K, L)) \quad (1)$$

つぎに両辺を時間について微分

$$\frac{d \ln(Y)}{dt} = \frac{d \ln(A)}{dt} + \frac{d \ln(F(K, L))}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{\frac{dY}{dt}}{Y} = \frac{\frac{dA}{dt}}{A} + \frac{\frac{\partial F(K, L)}{\partial K}}{F} \frac{dK}{dt} + \frac{\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}}{F} \frac{dL}{dt} \quad (3)$$

ここで、以下のように記号を用い式を簡略化することにする。

$$\begin{aligned} \dot{A} &\equiv \frac{dA}{dt} \quad \dot{Y} \equiv \frac{dY}{dt} \quad \dot{K} \equiv \frac{dK}{dt} \quad \dot{L} \equiv \frac{dL}{dt} \\ F_K &\equiv \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \quad F_L \equiv \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} \end{aligned} \quad (4)$$

(3) に (4) を代入して変形すると、

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{F_K K}{F} \frac{\dot{K}}{K} + \frac{F_L L}{F} \frac{\dot{L}}{L} \quad (5)$$

ここで F は K と L について一次同次関数なのでオイラーの定理¹より

$$F_K K + F_L L = F$$

両辺を F で割ると

$$\frac{F_K K}{F} + \frac{F_L L}{F} = 1 \quad (6)$$

ここで以下の利潤最大化問題を考える。(完全競争の仮定)

$$\begin{aligned} \max_{K, L} \quad & pY - rK - wL \\ \text{subject to} \quad & Y = AF(K, L) \end{aligned}$$

上の目的関数の Y に制約式を代入し、K と L について1階の条件を求めると、

¹一般に $F(X_1 \dots X_n)$ が $X_1 \dots X_n$ について k 次同次関数のとき

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i} X_i = nF(X_1 \dots X_n)$$

が成立する。

資本の限界生産力 = 実質単位資本コスト

$$\frac{\partial pAF(K, L)}{\partial K} = r \iff F_K = \frac{r}{pA} \quad (7)$$

労働の限界生産力 = 実質単位貨幣賃金

$$\frac{\partial pAF(K, L)}{\partial L} = w \iff F_L = \frac{w}{pA} \quad (8)$$

の2つの条件が求まる。

(7),(8) 式を (6) 式に代入し、 $Y = AF$ より

$$\frac{rK}{pY} + \frac{wL}{pY} = 1$$

ここで労働分配率を $\theta \equiv \frac{rK}{pY}$ とおくと粗利潤分配率は $1 - \theta \equiv \frac{wL}{pY}$ となる。

ここで、資本と労働について完全分配が成り立っていることに注意。

一方、 $\theta \equiv \frac{rK}{pY} = \frac{F_K K}{F}$ であり、 $1 - \theta \equiv \frac{wL}{pY} = \frac{F_L L}{F}$ であるので、これを

(5) 式に代入してまとめると

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \theta \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \theta) \frac{\dot{L}}{L}$$

上の式を A の成長率についてまとめると

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\theta \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \theta) \frac{\dot{L}}{L} \right) \quad (9)$$

(9) 式は、(技術進歩率)=(生産量の変化率)-(生産要素投入量の加重和) となっていることがわかる。この左辺がソロー残差である。

付録 2 付論 1 の補足

0.1 ヒックス中立な生産関数

ヒックス中立な生産関数とは、 $\tilde{F}(K, L; A_H) \equiv A_H F(K, L)$ となる生産関数であり（ F は一次同次）ヒックス中立（1 人あたり資本が一定なら生産要素価格費が一定、そして生産要素額の比も不変となる）を満たす唯一の関数型である。

ヒックス中立型生産関数がヒックス中立を満たすことの証明。

$$\begin{aligned} & \tilde{F}(K, L; A_H) \text{ がヒックス中立 } (\tilde{F}(K, L; A_H) = A_H F(K, L)) \\ \iff & \left(\frac{K}{L} = \frac{K'}{L'}, L \neq L' \Rightarrow \frac{r}{w} : \text{const.} \Rightarrow \frac{rK}{wL} : \text{const.} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $\frac{r}{w}$ は以下の問題を解くことで得られる。

$$\max_{K, L} \Pi(K, L) = pY - rK - wL \quad (11)$$

$$\text{subject to } Y = \tilde{F}(K, L) \quad (12)$$

(12) 式を (11) 式に代入して 1 階の条件を求めると

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = p \frac{\partial \tilde{F}(K, L)}{\partial K} - r = 0 \iff p A_H \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = r \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = p \frac{\partial \tilde{F}(K, L)}{\partial L} - w = 0 \iff p A_H \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = w \quad (14)$$

(13) 式、(14) 式より $\frac{r}{w}$ を求めると、 $f(k) \equiv F(\frac{K}{L}, 1)$, $k \equiv \frac{K}{L}$ として

$$\begin{aligned} \frac{r}{w} &= \frac{p A_H \frac{\partial F(K, L)}{\partial K}}{p A_H \frac{\partial F(K, L)}{\partial L}} \\ &= \frac{\frac{\partial F(K, L)}{\partial K}}{\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}} \\ &= \frac{\frac{\partial (F(\frac{K}{L}, 1)) L}{\partial K}}{\frac{\partial (F(\frac{K}{L}, 1)) L}{\partial L}} \\ &= \frac{f'(k) \frac{1}{L} L}{f'(k) (-\frac{K}{L^2}) L + f(k)} \\ &= \frac{f'(k)}{f(k) - f'(k) k} \end{aligned}$$

このように、 $\frac{r}{w}$ を求めるとそれが k のみに関する関数で表現されることがわかる。したがって、 k が一定のとき（(10) 式の右辺の最初の前提が成立するとき）には $\frac{r}{w}$ が一定となることが言え、ヒックス中立が証明される。

0.2 (2) 式の導出

ヒックス中立型生産関数 $Y = AF(K, L)$ を全微分する。

$$\begin{aligned} dY &= F(K, L)dA + AdF \\ &= F(K, L)dA + A(F_K dK + F_L dL) \end{aligned} \quad (15)$$

まず、技術進歩がない場合の限界費用を求める。 $(dA = 0)$ を仮定)

$C \equiv rK + wL$ と費用を定義する。

K を dK 、 L を dL だけ増加させると、(15) 式より

$$dY = A(F_K dK + F_L dL) \quad (dA = 0 \text{ より})$$

だけ生産量が増加し、

$$dC = rdK + wdL$$

だけ追加の費用が増加するので、限界費用を、

$$\text{限界費用 (MC)} \equiv \frac{dk, dL \text{ の増加時の費用の増加分}}{dk, dL \text{ の増加時の生産量の増加分}}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} MC &= \frac{dC}{A(F_K dK + F_L dL)} \\ &= \frac{rdK + wdL}{dY} \end{aligned} \quad (16)$$

と求まる。

次に、技術進歩がある場合の限界費用を求める。 $(dA \neq 0)$ を仮定)

(15) 式より

$$\begin{aligned} A(F_K dK + F_L dL) &= dY - F(K, L)dA \\ &= dY - F(K, L)A \frac{dA}{A} \\ &= dY - Y d \ln A \end{aligned} \quad (17)$$

したがって、 MC も (16) 式と違う値になる。ここで (17) 式を用いて MC を書き換えると、

$$\begin{aligned} MC &= \frac{dC}{A(F_K dK + F_L dL)} \\ &= \frac{rdK + wdL}{dY - Y d \ln A} \end{aligned} \quad (18)$$

となり、付論 1 (2) 式が得られる。

なお、付論 1 (3) 式 ~ (4) 式の導出の際、 $p=MC$ (完全競争) が仮定されていることに注意。

0.3 (8) 式の導出

付論 1 (6) 式の両辺に $\alpha_{VA,t}\Delta l_t$ を加えた式は以下のようになる。

$$\Delta q_{VA,t}^k = \hat{\mu}_{VA,t}\alpha_{VA,t}\Delta l_t + \theta_{VA} + \epsilon_{VA,t} \quad (19)$$

(19) 式と Δz との共分散を求めると、

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Delta q_{VA,t}^k, \Delta z) &= \text{cov}(\hat{\mu}_{VA,t}\alpha_{VA,t}\Delta l_t + \theta_{VA} + \epsilon_{VA,t}, \Delta z) \\ &= \hat{\mu}_{VA,t}\text{cov}(\alpha_{VA,t}\Delta l_t, \Delta z) \quad (20) \\ &\quad (\text{cov}(\epsilon_{VA,t}, \Delta z) = 0, \hat{\mu}_{VA,t}, \theta_{VA} : \text{const.より}) \end{aligned}$$

(20) 式を $\hat{\mu}_{VA,t}$ についてまとめると、

$$\hat{\mu}_{VA,t} = \frac{\text{cov}(\Delta q_{VA,t}^k, \Delta z)}{\text{cov}(\alpha_{VA,t}\Delta l_t, \Delta z)} \quad (21)$$

これにより付論 1(8) 式は得られた。

0.4 (15) 式の導出

$P_{G,t} = MC_{G,t}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q_{G,t}}{Q_{G,t}} &= \frac{\Delta A_t}{A_t} + \frac{wL_t}{MC_{G,t}Q_{G,t}} \frac{\Delta L_t}{L_t} + \frac{p_M M_t}{MC_{G,t}Q_{G,t}} \frac{\Delta M_t}{M_t} + \frac{rK_t}{MC_{G,t}Q_{G,t}} \frac{\Delta K_t}{K_t} \\ \frac{wL_t}{MC_{G,t}Q_{G,t}} + \frac{p_M M_t}{MC_{G,t}Q_{G,t}} + \frac{rK_t}{MC_{G,t}Q_{G,t}} &= 1 (\text{一次同次, 完全競争の仮定より}) \text{ で} \\ \text{あり、また } \mu_{G,t} &\equiv \frac{P_{G,t}}{MC_{G,t}}, \alpha_{G,t} \equiv \frac{wL_t}{MC_{G,t}Q_{G,t}}, \gamma_t \equiv \frac{p_M M_t}{MC_{G,t}Q_{G,t}} \text{ と定義すると} \\ \frac{rK_t}{MC_{G,t}Q_{G,t}} &= 1 - \alpha_{G,t} - \gamma_t \text{ より} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Delta Q_{G,t}}{Q_{G,t}} - \frac{\Delta K_t}{K_t} \right) - \alpha_{G,t} \left(\frac{\Delta L_t}{L_t} - \frac{\Delta K_t}{K_t} \right) - \gamma_t \left(\frac{\Delta M_t}{M_t} - \frac{\Delta K_t}{K_t} \right) = \frac{\Delta A_t}{A_t}$$

ここで、 $\Delta q_{G,t}^k \equiv \frac{\Delta Q_{G,t}}{Q_{G,t}} - \frac{\Delta K_t}{K_t}$, $\Delta l_t \equiv \frac{\Delta L_t}{L_t} - \frac{\Delta K_t}{K_t}$, $\Delta m_t \equiv \frac{\Delta M_t}{M_t} - \frac{\Delta K_t}{K_t}$, $\theta_{G,t} \equiv \frac{\Delta A_t}{A_t}$ と定義し、 $\theta_{G,t} = \theta_G + \epsilon_{G,t}$ とすると

$$\Delta q_{G,t}^k - (\alpha_{G,t}\Delta l_t + \gamma_t\Delta m_t) = \theta_G + \epsilon_{G,t}$$

$P_{G,t} \neq MC_{G,t}$ のとき

$\mu_{G,t} \equiv \frac{P_{G,t}}{MC_{G,t}}$ を定義し、 $\alpha_{G,t}\Delta l_t + \gamma_t\Delta m_t$ の項にかけて変形すれば (15) 式が求まる。

0.5 (22) 式の導出

収入に占める生産要素 J の所得のシェア $S_j \equiv \frac{p_J J}{P_G Q_G} (J = L, M, K)$, 総費用に占める生産要素 J の所得のシェア $c_J \equiv \frac{p_J J}{wL + p_M M + rK} (J = L, M, K)$ と定義されているので付論 1 (17) 式は (20) 式より

$$\begin{aligned}
 \Delta q_G &= \mu_G (S_L \Delta l + S_M \Delta m + S_K \Delta k) + \theta_G \\
 &= \mu_G \frac{wL + p_M M + rK}{P_G Q_G} (c_L \Delta l + c_M \Delta m + c_K \Delta k) + \theta_G \\
 &= \mu_G (1 - S_\pi) c_L \Delta l + c_M \Delta m + c_K \Delta k + \theta_G \\
 &= \delta_G (c_L \Delta l + c_M \Delta m + c_K \Delta k) + \theta_G
 \end{aligned} \tag{22}$$

これにより付論 1(22) 式は得られた。