ゲーム理論入門　練習問題

問題１　A と B という 2 人のプレイヤーが 100kg の肉を分ける状況を想定する。両プレイヤーは、交互に肉の分け方についてオファーをする N 段階交渉ゲームを行うものとしよう。ただし、最後（N 段階目）にオファーをするのは常に A であるとする。交渉が 1 段階進むにつれて、全体のうち $100 \times (1-x)$ %の肉が腐っていく（つまり、食べられる量が x 倍になる）ものとする（$0 \leq x \leq 1$）。$x = 70$　および $N = 3$ のとき、この交渉ゲームのバックワード・インダクションの解、そして交渉ゲームの結果はどのように求められるか。

問題２　ある企業が労働者を 1 人雇用したいと思い、求人広告を出したとする。高い能力を持つ労働者（タイプ H）を雇用すれば企業の利得は 1 であるが、低い能力の労働者（タイプ L）を雇用してしまうと企業の利得は－1 となる。企業は労働者の能力を判別できないが、労働市場においてタイプ H とタイプ L の個人がそれぞれ 1/3 と 2/3 という割合で存在することは知っているものとする。各個人は自分のタイプを知っていて、求職する前に資格を取るかどうかを選択する。タイプ H の資格取得コストは 2、タイプ L の資格取得コストは 5 であるものとする。企業は個人が資格を取得したかどうかを知った上で雇用するかどうかを決定する。労働賃金は雇用されれば 3、雇用されなかった場合はゼロである。このゲームの均衡について、以下の文章の①～⑱の空欄に当てはまる最も適切な語を答えよ。

　このシグナリング・ゲームの木は、図 8－1 のように描かれる。このゲームの完全ベイズ均衡は、次のように求められる。まず、タイプ L の個人の最適行動は資格を取得［　①　］ことであることが容易に理解される。資格を取得した場合、企業に雇用されるか否かにかかわらず、利得は［　②　］であるのに対し、資格を取得しなければ、利得は 0 または 3 となるからである。次に、タイプ H の個人の行動については、次の 2 つの可能性がある。

　第 1 のケースは、タイプ H の個人が資格を取得する状況である。この場合、労働者の能力に関する企業の合理的な信念は、「資格を取得している（していない）個人がタイプ H（L）である確率は［　③　］であり、タイプ L（H）である確率は［　④　］である」というものである。この信念の下で、企業の最適な戦略は次のようになる。資格を取得している個人に対して、この個人を雇った場合の期待利得は［　⑤　］であり、これは雇わなかった場合の期待利得［　⑥　］を上回るので、企業はこの個人を雇用する。一方、資格を取得していない個人に対しては、この個人を雇った場合の期待利得は［　⑦　］であり、これは雇わなかった場合の期待利得［　⑧　］を下回るので、企業はこの個人を雇用しない。最後に、このような企業の戦略に対して、タイプ H の個人は資格を取得するのが最適である。資格を取得すれば利得［　⑨　］を得るのに対し、資格を取得しなかった場合の利得は［　⑩　］となるからである。したがって、完全ベイズ均衡は「タイプ H は資格を取得し、タイプ L は資格を取得しない。企業は資格を取得している個人を確率［　③　］でタイプ H と見なし、この個人を雇用するが、資格を取得していない個人は確率［　③　］でタイプ L と見なし、雇用しない」というものになる。タイプの異なる個人が異なる行動をとっているので、このような均衡は［　⑪　］均衡と呼ばれる。

第 2 のケースは、タイプ H の個人が資格を取得しない状況である。この場合、資格の有無で労働者の能力を判別できないので、企業の合理的な信念は、「資格を取得していない個人がタイプ H である確率は［　⑫　］であり、タイプ L である確率は［　⑬　］である。また、資格を取得している個人がタイプ H（L）である確率は任意の p（$1-p$）である」というものである。この信念の下で、企業の最適な行動は次のように求められる。資格を取得していない個人に対して、この個人を雇った場合の期待利得は［　⑭　］であり、これは雇わなかった場合の期待利得［　⑮　］を下回るので、企業はこの個人を雇用しない。次に、資格を取得している個人に対しては、この個人を雇った場合の企業の期待利得は［　⑯　］となるので、p が［　⑰　］よりも小さければこの個人を雇わないのが企業にとって最適である。そして、企業が資格を持っている個人を雇わないという戦略をとっている場合、タイプ H の個人にとっては資格を取得しないのが最適となる。したがって、完全ベイズ均衡は「どのタイプの個人も資格を取得しない。企業は、資格を持っていない個人がタイプ H（L）である確率は［　⑫　］（［　⑬　］）であると見なし、資格を持っている個人がタイプ H である確率は［　⑰　］よりも小さいと予想する。そして、資格の有無に関わらず、誰も雇用しない」というものになる。タイプの異なる個人が同じ行動をとっており、資格の有無でタイプを判別できないこのような均衡は［　⑱　］均衡と呼ばれる。

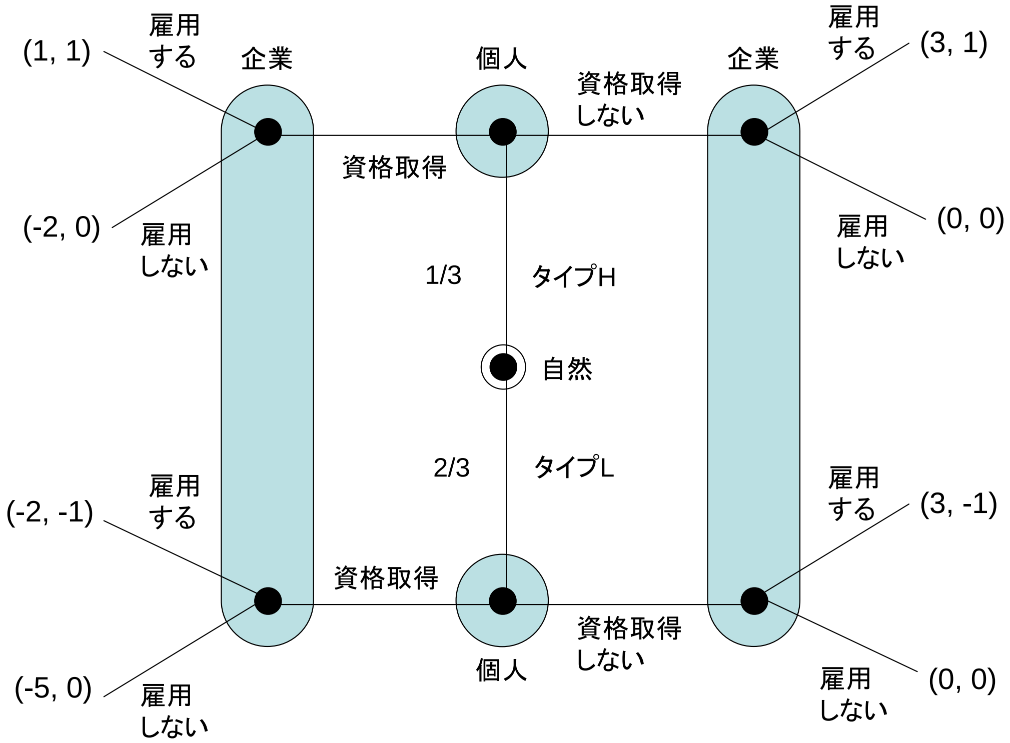
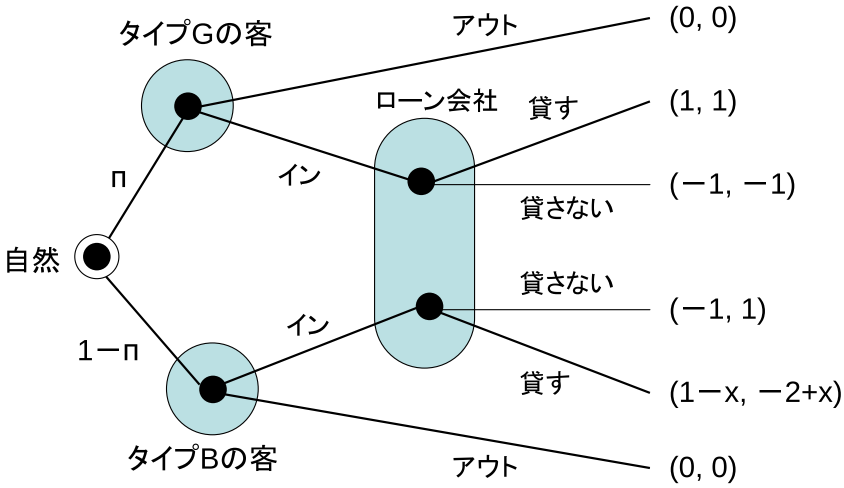


図 8－1

問題３　消費者ローン会社と客との間のゲームを考える。客には、借金をきちんと返済する良い客（タイプ G）と借金を踏み倒す悪い客（タイプ B）の 2 つのタイプがいる。ローン会社は客のタイプを判別できないが、ローン市場においてタイプ G とタイプ B の客がそれぞれ π と $1-\pi$ という割合で存在することは知っているものとする。客は自分のタイプを知っていて、店に入るかどうか（イン or アウト）を選択する。ローン会社は、店に来た客に対して、金を貸すか貸さないかを決定する。このゲームの木は、下図のように示されるものとする。なお、終点の各カッコ内における左側の数字が客の利得、右側の数字がローン会社の利得である。



(1) $x=2$ の場合の、このゲームの完全ベイズ均衡について述べた以下の文章について、①～⑩の空欄に当てはまる最も適切な語を答えよ。

客が「自分がタイプ G ならばイン、タイプ B ならばアウト」という戦略をとっているとしよう。この行動戦略の下では、ローン会社の合理的な信念は、「店に入ってきた客は、確率［　①　］でタイプ G である」となる。この信念の下で、ローン会社は「貸す」を選べば期待利得［　②　］を得る一方、「貸さない」を選ぶと期待利得は［　③　］となるので、ローン会社は「［　④　］」を選ぶ。このような企業の戦略に対して、タイプ G の客は「イン」ならば利得［　⑤　］を得るのに対し、「アウト」の場合の利得は［　⑥　］となるので、「［　⑦　］」を選ぶのが最適である。またタイプ B の客は「イン」ならば利得［　⑧　］を得るのに対し、「アウト」の場合の利得は［　⑨　］となるので、「［　⑩　］」を選ぶのが最適である。したがって、完全ベイズ均衡は「タイプ G の客は「［　⑦　］」を選び、タイプ B は「［　⑩　］」を選ぶ。ローン会社は店に入ってきた客を確率［　①　］でタイプ G と見なし、この個人に金を［　④　］」というものになる。

(2) $x=0$ の場合の、このゲームの完全ベイズ均衡について述べた以下の文章について、①～⑯の空欄に当てはまる最も適切な語を答えよ。

$\pi=1/2$ であるとしよう。この場合、誰も店に入らない完全ベイズ均衡が存在する。この場合、企業の合理的な信念は、「店に入らない客がタイプ G である確率は［　①　］であり、タイプ B である確率は［　②　］である。また、店に入った客がタイプ G（B）である確率は任意の p

（$1-p$）である」というものとなる。この信念の下で、ローン会社は「貸す」を選べば期待利得［　③　］を得る一方、「貸さない」を選ぶと期待利得は［　④　］となるので、p が［　⑤　］よりも小さければ、ローン会社は金を貸さないのが最適な行動である。このような企業の戦略に対して、タイプ G の客は「イン」を選んだときの利得が［　⑥　］、「アウト」を選んだときの利得が［　⑦　］となり、タイプ B の客にとっては「イン」のときの利得が［　⑧　］、「アウト」のときの利得が［　⑨　］となるので、いずれの客にとっても「アウト」が最適戦略である。したがって、「どのタイプの客も店に入らない。ローン会社は、店に入らない客がタイプ G（B）である確率を［　①　］（［　②　］）と見なし、店に入る客がタイプ G である確率は［　⑤　］よりも小さいと予想し、誰にも金を貸さない」という戦略と信念の組は完全ベイズ均衡となる。

$\pi=3/5$ であるとしよう。この場合は、どのタイプの客も店に入る完全ベイズ均衡が存在する。この場合、企業の合理的な信念は、「店に入らない客がタイプ G である確率は［　⑩　］であり、タイプ B である確率は［　⑪　］である。また、店に入った客がタイプ G（B）である確率は任意の p（$1-p$）である」というものとなる。この信念の下で、p が［　⑫　］以上ならば、ローン会社は金を貸すのが最適な行動である。このような企業の戦略に対して、タイプ G の客は「イン」を選んだときの利得が［　⑬　］、「アウト」を選んだときの利得が［　⑦　］となり、タイプ B の客にとっては「イン」のときの利得が［　⑮　］、「アウト」のときの利得が［　⑨　］なので、いずれの客にとっても「イン」が最適戦略である。このような客の戦略を考慮に入れると、ローン会社の合理的な信念は $p=$［　⑯　］に改訂される。したがって、「どのタイプの客も店に入る。ローン会社は、店に入った客がタイプ G である確率を［　⑯　］と予想し、金を貸す」という戦略と信念の組は完全ベイズ均衡となる。

問題 4　ある大学生が 1 冊のゲーム理論のテキストを 2 人の後輩（A と B）のどちらかにオークション形式で売る状況を想定する。売り手である大学生にとってはこのテキストは全く価値がないものとし、後輩 A にとってのテキストの価値は$V_A = 600$円、後輩 B にとっては$V_B = 800$円であるとする。これらの評価額を売り手は知らず、また買い手はそれぞれ相手の評価を知らないものとする。

(1) 売り手がセカンドプライス・オークション（最高の入札額の提示者が、第 2 位の入札額を払って商品を受け取る）でテキストを販売するときの、落札者と落札価格の組み合わせを答えよ。また、落札者の利得はいくらになるか。

(2) 売り手が競争入札（最高の入札額の提示者が、その入札額を払って商品を受け取る）でテキストを販売するものとしよう。各買い手は入札額として 0 円から 1,000 円の間の金額を自由に（整数に限らず）選べるとし、互いに相手の評価額を知らないものの、それが区間［0, 1000］上の一様分布に従うことは分かっているものとする。このときの落札者と落札価格の組み合わせを答えよ。また、落札者の利得はいくらになるか。

(3) 売り手が競争入札でテキストを販売するものとしよう。設問(2)の想定とは異なり、各買い手は入札額として 1000 円、800 円、600 円、400 円のうちのいずれかのみを選べるものとする。2 人の買い手が同じ金額を入札した場合はくじ引きで落札者が決まる（1/2 の確率で A が落札し、1/2 の確率で B が落札する）としよう。このオークションは、戦略形ゲームの形で下表のように表現される。なお、表のそれぞれの項において、左側（右側）の数字が A（B）の利得を表している。例えば、A が 600 円、B が 400 円をそれぞれ入札した場合、落札者は A となるが、彼のテキストに対する評価額は 600 円なので、落札によって得られる利得は 0 円である。一方、B は落札できなかったので、利得は 0 円である。また、A も B もともに 400 円で入札した場合、各プレイヤーは 1/2 の確率でテキストを落札できるので、期待利得で考える必要がある。A の期待利得は 100 円、B の期待利得は 200 円とそれぞれ求められる。この利得表について、他の箇所についても埋めることにより、表を完成させよ。

A ＼ B	400 円	600 円	800 円	1000 円
400 円	100, 200			
600 円	0, 0			
800 円				
1000 円				

(4) 設問(3)のゲームには強支配戦略の組となるナッシュ均衡が唯一存在する。そのナッシュ均衡における落札者と落札価格の組み合わせを求めよ。

問題 5　n 社の企業がある同質的な財を市場に供給する状況を想定する。各企業の費用関数は $c_i(x_i)$ で与えられているものとする（x_i は企業 i の生産量)。また、この財の市場逆需要関数は $P(X)=200-X$ で与えられているものとする（X は需要量)。

(1) $n=2$ とし、各企業の費用関数が $c_1(x_1)=x_1^2+59x_1$, $c_2(x_1)=x_2^2+56x_2$ で与えられているものとする。このとき、クールノー＝ナッシュ均衡における各企業の生産量と財の価格を求めよ。

(2) 設問(1)と同じ設定の下で、企業 1 が先導者、企業 2 が追随者として行動すると仮定する。この場合のシュタッケルベルグ均衡における各企業の生産量と財の価格を求めよ。

(3) 設問(1)と同じ設定の下で、企業 1 と企業 2 が共謀して利潤の合計を最大にするように行動した場合、各企業の生産量と財の価格はどうなるか。

(4) $n=3$ とし、全ての企業の費用関数が同じ関数 $c_i(x_i)=20x_i$ で与えられているものとする。このとき、クールノー＝ナッシュ均衡における各企業の生産量と財の価格を求めよ。

(5) 設問(4)と同じ設定の下で、企業 1 が最初に生産量を決定し、次に企業 2 が生産量を決定し、最後に企業 3 が生産量を決定するという 3 段階ゲームを考える。このゲームのサブゲーム完全均衡における各企業の生産量と財の価格を求めよ。

解答

問題 1

sをプレイヤーA のシェアとする。

バックワードインダクションの解：

プレイヤーA

　第 1 段階： $s = 0.79$ をオファー

　第 2 段階： $s \geq 0.7$ ならば承諾、そうでなければ拒否

　第 3 段階： $s = 1$をオファー

プレイヤーB

　第 1 段階： $s \leq 0.79$ ならば承諾、そうでなければ拒否

　第 2 段階： $s = 0.7$ をオファー

　第 3 段階： s がどんな値でも承諾

交渉ゲームの結果：第 1 段階で A が $s = 0.79$ をオファーし、B がそれを承諾する（プレイヤーA が 79kg、プレイヤーB が 21kg をそれぞれ獲得する）

問題 2

① しない　② マイナス　③ 1　④ 0　⑤ 1　⑥ 0　⑦ －1　⑧ 0

⑨ 1　⑩ 0　⑪ 分離（型）　⑫ 1/3　⑬ 2/3　⑭ －1/3　⑮ 0　⑯ 2p－1

⑰ 1/2　⑱ 一括（混在型）

問題 3

(1) ① 1　② 1　③ －1　④ 貸す　⑤ 1　⑥ 0　⑦ イン　⑧ －1　⑨ 0

⑩ アウト

(2) ① 1/2　② 1/2　③ 3p－2　④ 1－2p　⑤ 3/5　⑥ －1　⑦ 0　⑧ －1

⑨ 0　⑩ 3/5　⑪ 2/5　⑫ 3/5　⑬ 1　⑮ 1　⑯ 3/5

問題 4

(1) B が落札、落札価格：600 円、B の利得：200 円

(2) B が落札、落札価格：400 円、B の利得：400 円

(3)

A \ B	400 円	600 円	800 円	1000 円
400 円	100, 200	0, 200	0, 0	0, −200
600 円	0, 0	0, 100	0, 0	0, −200
800 円	−200, 0	−200, 0	−100, 0	0, −200
1000 円	−400, 0	−400, 0	−400, 0	−200, −100

(4) B が落札、落札価格：600 円

問題 5

⑴ 各企業の生産量：$x_1 = 28,\ x_2 = 29$、価格：143

⑵ 各企業の生産量：$x_1 = 30,\ x_2 = 57/2$、価格：283/2

⑶ 各企業の生産量：$x_1 = 23,\ x_2 = 49/2$、価格：305/2

⑷ 各企業の生産量：$x_1 = x_2 = x_3 = 45$、価格：65

⑸ 各企業の生産量：$x_1 = 90,\ x_2 = 45,\ x_3 = 45/2$、価格：85/2