

戦略的行動と経済取引 (ゲーム理論入門)

2. 戦略形ゲームとナッシュ均衡

1

協力ゲームと非協力ゲーム

- ゲーム理論: 協力ゲーム理論と非協力ゲーム理論とに分類
 - 協力ゲーム理論: 複数のプレイヤーが拘束力のある合意を結ぶ状況を扱う
 - 非協力ゲーム理論: 個々のプレイヤーが独立に行動する状況を扱う
 - プレイヤーが拘束力のある合意を形成する制度的な枠組みがない状況を想定

2

非協力ゲームの表現様式

- 戦略形ゲーム (strategic form game)
 - 標準形ゲーム (normal form game) とも言う
 - プレイヤー (ゲームに参加して行動を行う主体) が同時に行動して1回限りで終わってしまうゲームを記述しているのに適している
- 展開形ゲーム (extensive form game)
 - 時間をかけて進行していくゲームの記述に適している
- 1回限りのゲームを展開形で表すこともあるし、時間をかけて進行するゲームを戦略形で表すこともある

3

戦略形ゲームの構成要素

- プレイヤー (player) の集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$
 - 誰がゲームに参加しているのか?
- 各プレイヤーが採りうる戦略 (strategy) の集合
 - 各プレイヤーはどんな行動を採るのか? S_1, S_2, \dots, S_n
- 各プレイヤーの利得 (payoff)
 - 各プレイヤーの戦略が決まるとどんな結果が生ずるのか?

$$u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s); \quad s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

4

利得行列による表現

- プレイヤーが2人で、戦略の数が有限個の場合、利得行列 (payoff matrix) で表現することが可能
 - 利得表 (payoff table) とも言う

		プレイヤー2	
		戦略C	戦略D
プレイヤー1	戦略A	V_{ac}, W_{ac}	V_{ad}, W_{ad}
	戦略B	V_{bc}, W_{bc}	V_{bd}, W_{bd}

- 上の利得行列において、例えば
 - プレイヤー1が「A」を、プレイヤー2が「C」をそれぞれ選択
→ プレイヤー1とプレイヤー2の利得はそれぞれ v_{ac} と w_{ac}

例1: 囚人のジレンマ

- 2人の共犯者が別々に取り調べを受けていて、「黙秘」か「自白」かの選択を迫られる
 - 自分も相手も「黙秘」⇒ 2人とも懲役1年
 - 自分は「黙秘」、相手は「自白」⇒ 自分は懲役10年、相手は無罪(司法取引)
 - 自分も相手も「自白」⇒ 2人とも懲役5年
- このゲームの
 - プレイヤーの集合: 容疑者1 & 容疑者2
 - 各プレイヤーの戦略: 「黙秘」or 「自白」
 - 各プレイヤーの利得: 上に書いたとおり

6

囚人のジレンマ・ゲームの利得行列

		容疑者2	
		自白	黙秘
容疑者1	自白	-5, -5	0, -10
	黙秘	-10, 0	-1, -1

7

例2: 「タカ・ハト」ゲーム

- 2人の優勝者が100万円の賞金を分ける
 - 各プレイヤーの戦略: 「タカ」(攻撃的) or 「ハト」(非攻撃的)
 - 両者とも「ハト」→ 100万円を2等分
 - 一方が「タカ」& 他方が「ハト」→ 「タカ」が100万円をすべて獲得
 - 両者とも「タカ」→ 戦う(60万円のコスト) → 1/2の確率で勝ち、賞金を獲得
 - 期待利得 (expected payoff): $\left(\frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times 0\right) - 60 = -10$

8

「タカ・ハト」ゲームの利得行列

		プレイヤー2	
		タカ	ハト
プレイヤー1	タカ	-10, -10	100, 0
	ハト	0, 100	50, 50

9

例3:じゃんけん

- 「勝ち」は1点、「あいこ」は0点、「負け」はマイナス1点

		プレイヤー2		
		グー	チョキ	パー
プレイヤー1	グー	0, 0	1, -1	-1, 1
	チョキ	-1, 1	0, 0	1, -1
	パー	1, -1	-1, 1	0, 0

10

ナッシュ均衡と最適反応

- ゲームの解を求める
 - ゲームは最終的にどのような結末を迎えるか？
- ナッシュ均衡 (Nash equilibrium)
 - プレイヤー全員が互いに最適の戦略を選択し、これ以上自らの戦略を変更する誘因を持たない状態
 - 他のプレイヤーの戦略を所与とした場合、どのプレイヤーも**自分の戦略を変更することによってそれ以上に高い利得を得ることができない**戦略の組み合わせ

11

ナッシュ均衡の定義

- 最適反応戦略 (best response strategy)

第 i プレイヤーの戦略 $s_i \in S_i$ が、
 他のプレイヤーの戦略の組 $s_{-i} \in \times_{j \neq i} S_j$ に対する最適反応戦略
 \Leftrightarrow すべての $s'_i \in S_i$ について、 $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ が成立

- ナッシュ均衡 (Nash equilibrium)

戦略の組 $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ がナッシュ均衡
 \Leftrightarrow すべての $i \in N$ について、
 s_i^* が他のプレイヤーの戦略の組 s_{-i}^* に対する最適反応戦略

12

ナッシュ均衡と最適反応

- 2人のプレイヤーのケース
- プレイヤー1とプレイヤー2の戦略の組 (s_1^*, s_2^*) がナッシュ均衡: 以下の2つが同時に成立:
 - プレイヤー2が s_2^* を選んでいるとき、プレイヤー1にとっては s_1^* を選ぶのが最も望ましい(最適反応戦略)
 - s_1^* 以外を選んだときのプレイヤー1の利得は s_1^* を選んだときの利得以下の水準
 - プレイヤー1が s_1^* を選んでいるとき、プレイヤー2にとっては s_2^* を選ぶのが最も望ましい(最適反応戦略)

13

囚人のジレンマ・ゲームにおけるナッシュ均衡

		容疑者2	
		自白	黙秘
容疑者1	自白	-5, -5	0, -10
	黙秘	-10, 0	-1, -1



容疑者1の最適反応は

- 容疑者2が「自白」のとき、「自白」
- 容疑者2が「黙秘」のとき、「自白」

14

囚人のジレンマ・ゲームにおけるナッシュ均衡

		容疑者2	
		自白	黙秘
容疑者1	自白	-5, -5	0, -10
	黙秘	-10, 0	-1, -1



容疑者2の最適反応は

- 容疑者1が「自白」のとき、「自白」
- 容疑者1が「黙秘」のとき、「自白」

15

囚人のジレンマ・ゲームにおけるナッシュ均衡

		容疑者2	
		自白	黙秘
容疑者1	自白	-5, -5	0, -10
	黙秘	-10, 0	-1, -1



ナッシュ均衡は (「自白」, 「自白」)

16

なぜ「ジレンマ」か？

- 2人のプレイヤーがともに「黙秘」を選んだ場合、両者の利得はともに-1
- ⇒ ナッシュ均衡 (「自白」,「自白」) における各プレイヤーの利得-5よりも大
- 「2人とも黙秘」という、より望ましい選択肢があるにも関わらず、「2人とも自白」という望ましくない結果が均衡では選択されてしまう

17

「タカ・ハト」ゲームにおけるナッシュ均衡

		プレイヤー2	
		タカ	ハト
プレイヤー1	タカ	-10, -10	100, 0
	ハト	0, 100	50, 50



プレイヤー1の最適反応は
 • プレイヤー2が「タカ」のとき、「ハト」
 • プレイヤー2が「ハト」のとき、「タカ」

18

「タカ・ハト」ゲームにおけるナッシュ均衡

		プレイヤー2	
		タカ	ハト
プレイヤー1	タカ	-10, -10	100, 0
	ハト	0, 100	50, 50



プレイヤー2の最適反応は
 • プレイヤー1が「タカ」のとき、「ハト」
 • プレイヤー1が「ハト」のとき、「タカ」

19

「タカ・ハト」ゲームにおけるナッシュ均衡

		プレイヤー2	
		タカ	ハト
プレイヤー1	タカ	-10, -10	100, 0
	ハト	0, 100	50, 50



ナッシュ均衡は2つ存在：(「タカ」,「ハト」) と (「ハト」,「タカ」)

20

じゃんけんにはナッシュ均衡は存在するか？

		プレイヤー2		
		グー	チョキ	パー
プレイヤー1	グー	0, 0	1, -1	-1, 1
	チョキ	-1, 1	0, 0	1, -1
	パー	1, -1	-1, 1	0, 0

21

じゃんけんにおけるナッシュ均衡

- 9つの戦略の組のいずれも、ナッシュ均衡とはならない
- ⇒ ナッシュ均衡は存在しない？
- 「純粋戦略」の範囲では、ナッシュ均衡は存在しないが、「混合戦略」まで考えると、ナッシュ均衡は存在

22

支配戦略

- 囚人のジレンマ・ゲームにおける(「自白」,「自白」)というナッシュ均衡:より強い性質を持っている
 - 相手の戦略に関係なく、自分は「自白」を選ぶのが常に望ましい
- ⇒ このような場合、「自白」戦略は「黙秘」戦略を**強支配**する、という
- 相手のどの戦略に対しても戦略Aの方が戦略Bよりも**厳密に高い利得**をもたらす ⇒ AはBを強支配

23

支配戦略:強支配と弱支配

- 相手のどの戦略に対しても戦略Aの方が戦略Bをとったとき**以上の利得**をもたらす ⇒ AはBを**弱支配**
 - 相手のある戦略については、戦略Aは戦略Bと同じ利得をもたらすが、相手の他のすべての戦略については、戦略Aの方が戦略Bよりも厳密に高い利得
- 相手の戦略に応じて、戦略Aのもたらす利得と戦略Bがもたらす利得との大小関係が変わる ⇒ 支配関係は存在しない

24

強支配と弱支配(つづき)

		プレイヤー2	
		A	B
プレイヤー1	A	×5, ×5	△-10, ○15
	B	○15, ×-10	△-10, ○-5



この例において、

- プレイヤー1: 「B」は「A」を弱支配
 - プレイヤー2が「A」のとき、プレイヤー1にとって「B」の方が厳密に高い利得
 - プレイヤー2が「B」のとき、プレイヤー1にとって「B」と「A」は同じ利得
- プレイヤー2: 「B」は「A」を強支配

25

支配戦略とナッシュ均衡

- 「支配戦略同士の組 ⇒ ナッシュ均衡」が必ず成立
 - 特に、強支配戦略同士の組 ⇒ それが唯一のナッシュ均衡
- 「ナッシュ均衡 ⇒ 支配戦略の組」は必ずしも成立しない
 - 「タカ・ハト」ゲーム: ナッシュ均衡は2つ存在するが、どちらも支配戦略ではない
 - 弱支配される戦略がナッシュ均衡になる可能性

26

弱支配される戦略がナッシュ均衡になる例

		プレイヤー2	
		L	R
プレイヤー1	T	①, ①	①, 0
	B	0, ①	①, ①



ナッシュ均衡は (T,L) と (B,R) の2つだが、
(B,R) は弱支配される戦略の組

- 戦略Bは、戦略Tに弱支配される
- 戦略Rは、戦略Lに弱支配される

27