戦略的行動と経済取引
（ゲーム理論入門）

5. 交渉ゲーム

1

交渉（bargaining）

- 交渉：典型的なゲーム的状況の1つ
  - 売り手・買い手間の取引交渉、経営者・労働者間の賃金交渉、損害賠償の交渉、企業間の提携交渉、国家間の外交交渉、etc.
- 交渉問題に対するゲーム理論分析
  - 公理論的アプローチ
    - 交渉解が満たすべきいくつかの性質を公理として定式化 ⇒ 公理から交渉解を数学的に演繹
  - 戦略的アプローチ
    - 合意に至る交渉のプロセスを展開形ゲームとして定式化 ⇒ サブゲーム完全均衡としての交渉解を導出

2

交渉ゲーム

- 「ある確定した（一定の）収益を2人のプレイヤーでどう分けるか？」というゲームを考える
- 「1kgのアイスクリームを2人（プレイヤーAとB）で分ける」という単純なゲームに置き換える
  - アイスクリームは溶ける：「早く交渉をまとめないと、収益が減少する」こととして解釈
- ゲームの種類
  - 最後通牒ゲーム
  - n段階交渉ゲーム

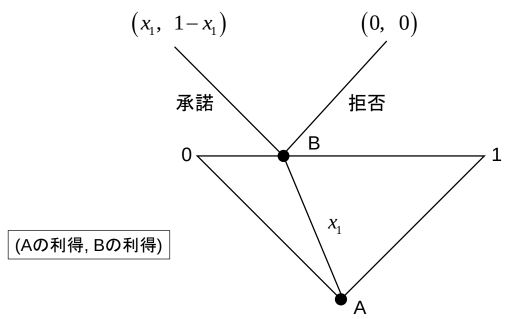
3

最後通牒ゲーム（ultimatum game）

- 片方が提案し、それに相手が応じるか拒否するかで終わる、1回限りの交渉ゲーム
- 以下の手順でゲームが進む：
  1. プレイヤーAが自分のシェア（$0 \leqq x_1 \leqq 1$）を提案
  2. プレイヤーBがこの提案の受入れor拒否を選択
  - 受入れ ⇒ プレイヤーAのシェア＝x_1、プレイヤーBのシェア＝$1-x_1$
  - 拒否 ⇒ 両者とも何も得ず（アイスクリームが溶ける）にゲームが終了

4

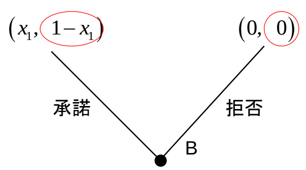
最後通牒ゲームの木



最後通牒ゲームの解

- 各プレイヤーは、自分が得るアイスクリームにのみ関心を持つ（相手の取り分には関心がない）と仮定
- バックワード・インダクションで解く
  - プレイヤーAがx_1を提案 ⇒ プレイヤーBが承諾or拒否を決定
  - 上のことを考慮に入れて、プレイヤーAはx_1を決定

プレイヤーAがx_1を決定した後のサブゲーム



- x_1 <1のとき、B（シェアが1－x_1 >0になる）は承諾
  - 承諾すれば利得はプラスだが、拒否すると何も得られない（アイスクリームが溶けてなくなってしまう）
- x_1 =1のとき、Bは承諾しても拒否しても利得はゼロ（どちらの選択も無差別）

最後通牒ゲームの解

- Bの最適戦略：x_1がどのような値をとっても、承諾
- ⇒ このことを考慮に入れて、Aは自分の利得（シェア）を最大にするようにx_1を選ぶ
- ⇒ x_1 =1
- バックワード・インダクションの解：

A：x_1=1を選択
B：どのようなx_1でも承諾

- ゲームの結果：Aがアイスクリームをすべて食べる
  - 最初に提案するプレイヤーが収益のすべてを受け取る

2段階の交渉（2-stage bargaining）

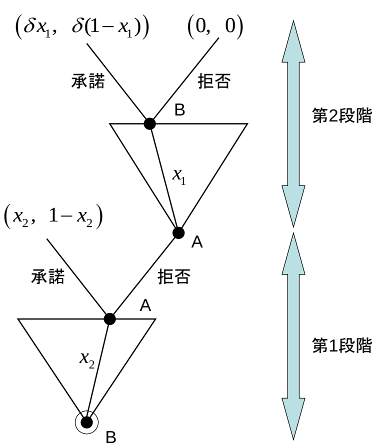
- 交渉が決裂した場合、拒否した方が逆に提案する機会を持つ（提案応答ゲーム）
- 交渉が先に延ばされることにより、分配できる収益は減少（アイスクリームが溶ける）
  - 「将来利得の割引」と解釈
- 各プレイヤーの利得＝自分の取り分（残ったアイスクリーム×自分のシェア）

9

2段階の交渉

- 以下の手順でゲームが進む（Bが先に提案すると仮定）：
  1. プレイヤーBがプレイヤーAのシェア（$0 \leqq x_2 \leqq 1$）を提案
  - Aが受入れ ⇒ Aのシェア＝x_2 ＆Bのシェア＝$1-x_2$ でゲームが終了
  - Aが拒否 ⇒ 第2段階へ進む
  2. プレイヤーAが自分のシェア（$0 \leqq x_1 \leqq 1$）を提案
  - Bが受け入れ ⇒ Aの取り分＝δx_1、Bの取り分＝$\delta(1-x_1)$
    - δ：残ったアイスクリーム（$0 \leqq \delta \leqq 1$）
  - Bが拒否 ⇒両者とも何も得ずにゲームが終了

10



2段階交渉ゲームの木

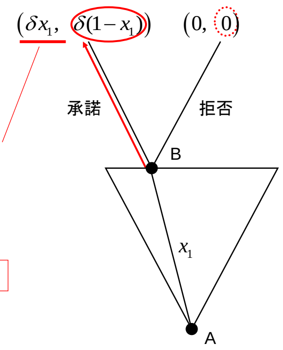
11

2段階交渉ゲームの解

- バックワード・インダクションで解く
- 第2段階：第1段階でプレイヤーAがプレイヤーBの提案を拒否したとして、Aがx_1を決定＆提案し、Bが承諾or拒否を決定
  - $x_1 < 1$のときBは承諾し、$x_1 = 1$のときBは承諾・拒否は無差別
  - 以上のことを考慮に入れてAは利得（取り分）を最大にするようにx_1を選ぶ ⇒ $x_1 = 1$
- $x_1 = 1$ ⇒ 第1段階でAが拒否した場合、Aの取り分＝δ、Bの取り分＝0

12

プレイヤーAが「拒否」を選んだ後のサブゲーム
（第2段階）



プレイヤーAはこの利得が最大になるようにx_1を選ぶ

⇩

x_1=1を選ぶのが最適

2段階交渉ゲームの解

- 第1段階での選択
  - プレイヤーBがx_2を提案 ⇒ プレイヤーAは承諾or拒否
  - 拒否した場合、Aはx_1=1を提案し、利得δを得る ⇒ δとx_2との大小関係で承諾or拒否を決める

•x_2 <δ⇒ 拒否

•x_2 =δ⇒ 拒否と承諾は無差別

•x_2 >δ⇒ 承諾

  - プレイヤーB：Aがx_2を拒否して逆提案すると、第2段階で自分が得られる利得は0 ⇒ Aが承諾してくれた方が望ましい
  - ⇒ Bの問題：x_2 ≧δを満たすx_2のうち、利得1－x_2を最大にするようなx_2は？

•x_2 <δ⇒ 拒否

•x_2 =δ⇒ 拒否と承諾は無差別

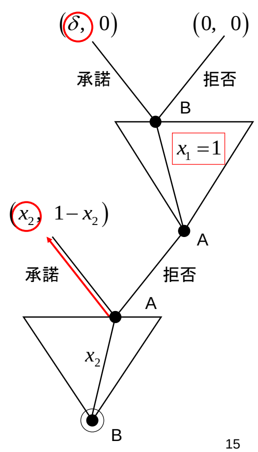
•x_2 >δ⇒ 承諾

⇩

プレイヤーB：
x_2≧δを満たすx_2のうち、
利得1－x_2を最大にするようなx_2は？

⇩

x_2 =δ



2段階交渉ゲームの解

- バックワード・インダクションの解：

プレイヤーAの戦略：
［第1段階］ x_2≧δならば承諾、x_2 <δならば拒否
［第2段階］ x_1 =1

プレイヤーBの戦略：
［第1段階］ x_2 =δ
［第2段階］ x_1 がどんな値であっても承諾

⇩

結果：第1段階でBがδを提案し、それをAが承諾

  - 最後通牒ゲームと違い、最初に提案するプレイヤーは収益の一部しか取れない（法外な要求はできない）

n段階の交渉ゲーム

- n（≧3）段階の交渉ゲーム
  - nが奇数のとき、Aが最初に提案
  - nが偶数のとき、Bが最初に提案
- ゲームの進み方
  - 第1段階：A（B）がx_nを提案 ⇒ B（A）が承諾すればAがx_nを獲得＆Bが$1-x_n$を獲得、拒否すれば第2段階へ
  - 第2段階：B（A）がx_{n-1}を提案 ⇒ A（B）が承諾すればAがδx_{n-1}を獲得＆Bが$\delta(1-x_{n-1})$を獲得、拒否すれば第3段階へ
  - 第3段階：A（B）がx_{n-2}を提案 ⇒ B（A）が承諾すればAが$\delta^2 x_{n-2}$を獲得＆Bが$\delta^2(1-x_{n-2})$を獲得、拒否すれば第4段階へ
  - ・・・
  - 第n段階：Aがx_1を提案 ⇒ Bが承諾すればAが$\delta^{n-1} x_1$を獲得＆Bが$\delta^{n-1}(1-x_1)$を獲得、拒否すれば両者とも利得ゼロで終了

n段階交渉ゲームの解（n=3のとき）

- 第3段階：Aがx_1=1を提案 ⇒ Aの利得＝δ^2、Bの利得＝0
- 第2段階：BはAに拒否されないような（$\delta x_2 \geq \delta^2$を満たす）x_2でかつ利得$\delta(1-x_2)$を最大にするx_2を選ぶ ⇒ $x_2=\delta$を提案 ⇒ Aの利得＝δ^2、Bの利得＝$\delta(1-\delta)$
- 第1段階：AはBに拒否されないような（$1-x_3 \geq \delta(1-\delta)$を満たす）最大の$x_3$を選ぶ ⇒ $x_3=1-\delta(1-\delta)$を提案
  - $1-\delta(1-\delta) > \delta^2$ ⇒ AはBに拒否されないような提案をする方が望ましい

n段階交渉ゲームの解（n=3のとき）

- ゲームの結果：第1段階でAが$x_3=1-\delta(1-\delta)$を提案し、Bがそれを承諾
  - 2段階交渉ゲームと同様、第1段階での提案者が「相手に拒否されないような」提案をする
- 相手に「拒否されない」ような提案＝相手が「拒否した場合に次の段階で得られる取り分を確保する」提案
  - 3段階交渉ゲームの場合：第1段階でAは、Bが拒否した後で行われる2段階交渉ゲームでのBの取り分にδをかけた値（$\delta(1-x_2)=\delta(1-\delta)$）を確保するように、$x_3$を提案

n段階交渉ゲームの解

- 交渉のステージが一般のnのケースでも、考え方は同じ：第1段階の提案者が、相手が「拒否した場合に第2段階で得られる取り分を確保する」提案を行う
- z_n：n段階交渉ゲームにおいて、その第1段階で提案を受けるプレイヤーが承諾可能な利得の最小値
  - nが奇数：$z_n=1-x_n$
  - nが偶数：$z_n=x_n$
- ⇒ 以下の式が成り立つ場合、第1段階で承諾がなされる：

$$\boxed{z_n = \delta(1 - z_{n-1})}$$

- 上の式（差分方程式）を、初期条件 $z_1=0$ の下で解く
  - 1段階交渉ゲーム（最後通牒ゲーム）では、プレイヤー2の利得は0

n段階交渉ゲームの解

- 差分方程式 $z_n = \delta(1 - z_{n-1}),\quad z_1 = 0$ の解を求める
- ⇒ $z_n = \frac{\delta}{1+\delta} - \frac{\delta}{1+\delta}(-\delta)^{n-1}$
- nが奇数ならば $z_n=1-x_n$、偶数ならば$z_n=x_n$
- ⇒ n段階交渉ゲームの結果：

第1段階で

$$x_n = \begin{cases} \frac{1+\delta^n}{1+\delta} & (n\text{が奇数のとき}) \\ \frac{\delta+\delta^n}{1+\delta} & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

が提案され、それが承諾される

- δ<1 ⇒ nが大きいほど、最後に提案できることによるAの有利さは小さくなる

n段階交渉ゲームの解

- n→∞のとき、

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \frac{1}{1+\delta} & (n\text{が奇数のとき}) \\ \frac{\delta}{1+\delta} & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

- δ<1 ⇒ 最初に提案する方が有利
  - nが奇数（偶数）のとき、A（B）が先に提案
  - ⇒ AとBの取り分の比＝1：δ（δ：1）
- δが小さいほど、最初に提案する側の利益は大きい
  - δ＝0 のとき、最初に提案する側が収益のすべてを得る（最後通牒ゲームと同じ）
  - δ＝1 のとき、両者は収益を等分