戦略的行動と経済取引
（ゲーム理論入門）

6. 混合戦略のナッシュ均衡

じゃんけんにナッシュ均衡は存在するか？

		プレイヤー2		
		グー	チョキ	パー
プレイヤー1	グー	0，0	1，-1	-1，1
	チョキ	-1，1	0，0	1，-1
	パー	1，-1	-1，1	0，0

9つの戦略の中にナッシュ均衡は存在しない

純粋戦略と混合戦略

- 混合戦略：各戦略をある確率で組み合わせる
- 今まで用いていた「戦略」＝純粋戦略
- じゃんけん：純粋戦略ではナッシュ均衡は存在しない
- ⇒ 混合戦略まで拡張して考えると、ナッシュ均衡が存在
  - ナッシュ均衡：各プレイヤーは「グー」「チョキ」「パー」をそれぞれ1/3の確率で出す

混合戦略のナッシュ均衡：定義

- 混合戦略（mixed strategy）：

$S_i=\{s_{i1},\cdots s_{ik}\}$ をプレイヤー i の戦略の集合とし、
$\Delta(S_i)$ を S_i 上の確率分布の全体とするとき、
$\sigma_{i1}(s_{i1})+\cdots+\sigma_{ik}(s_{ik})=1$ を満たす確率分布
$\sigma_i(s_i)=(\sigma_{i1}(s_{i1}),\cdots,\sigma_{ik}(s_{ik}))\in\Delta(S_i)$
をプレイヤー i の混合戦略という

- 戦略を確率で組み合わせる ⇒ 各プレイヤーは期待利得で判断

混合戦略のナッシュ均衡：定義

- 期待利得（expected payoff）：

$$v_i(\sigma_1,\cdots\sigma_n)=\sum_{s_1\in S_1}\cdots\sum_{s_n\in S_n}\left\{\prod_{j=1}^{n}\sigma_j(s_j)\right\}\cdot u_i(s_1,\cdots s_n)$$

- プレイヤーが2人の場合の期待利得
  - それぞれk個の純粋戦略

$$v_i(\sigma_1,\sigma_2)=\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=1}^{k}\sigma_{1l}(s_{1l})\sigma_{2m}(s_{2m})u_i(s_{1l},s_{2m}),\qquad i=1,2$$

5

混合戦略のナッシュ均衡：定義

- ナッシュ均衡の定義は，純粋戦略のときと同様
- 最適反応戦略：

第 i プレイヤーの混合戦略 $\sigma_i\in\Delta(S_i)$ が、
他のプレイヤーの混合戦略の組 $\sigma_{-i}\in\times_{j\neq i}\Delta(S_j)$ に対する最適反応戦略
:⇔ すべての $\sigma_i'\in\Delta(S_i)$ について、$v_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\geq v_i(\sigma_i',\sigma_{-i})$ が成立

- ナッシュ均衡：

混合戦略の組 $\sigma^*=(\sigma_1^*,\cdots,\sigma_n^*)$ がナッシュ均衡
:⇔ すべての $i\in N$ について、
σ_i^* が他のプレイヤーの戦略の組 σ_{-i}^* に対する最適反応戦略

6

混合戦略のナッシュ均衡の求め方：例題

		プレイヤー2	
		戦略A	戦略B
プレイヤー1	戦略A	0，1	1，0
	戦略B	1，0	0，1

7

混合戦略のナッシュ均衡の求め方

- プレイヤーiが戦略Aを選ぶ確率をp_iとする（i=1,2）⇒ 戦略Bを選ぶ確率は1-p_i
- それぞれの利得の組み合わせが生じる確率：

		プレイヤー2	
		戦略A [確率 p_2]	戦略B [確率 1-p_2]
プレイヤー1	戦略A [確率 p_1]	確率 p_1p_2	確率 $p_1(1-p_2)$
	戦略B [確率 1-p_1]	確率 $(1-p_1)p_2$	確率 $(1-p_1)(1-p_2)$

混合戦略のナッシュ均衡の求め方

- プレイヤー1の期待利得:

$$v_1(p_1,p_2)=\underbrace{p_1p_2\times 0}_{\text{(A, A)の場合}}+\underbrace{(1-p_1)p_2\times 1}_{\text{(B, A)の場合}}+\underbrace{p_1(1-p_2)\times 1}_{\text{(A, B)の場合}}+\underbrace{(1-p_1)(1-p_2)\times 0}_{\text{(B, B)の場合}}$$

$$=p_1+p_2-2p_1p_2$$

- プレイヤー2の期待利得:

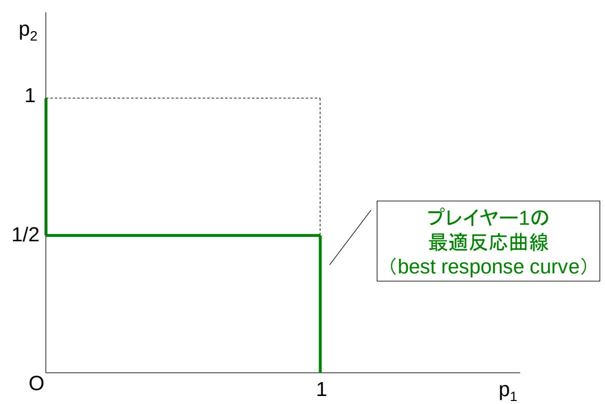
$$v_2(p_1,p_2)=p_1p_2\times 1+(1-p_1)p_2\times 0+p_1(1-p_2)\times 0+(1-p_1)(1-p_2)\times 1$$

$$=2p_1p_2-p_1-p_2+1$$

混合戦略のナッシュ均衡の求め方

- プレイヤー1:p_2を所与として、期待利得$v_1(p_1,p_2)$を最大にするようなp_1を選ぶ
  - 確率なので、0より小さい値や1より大きい値は選べない
- プレイヤー1の期待利得: $v_1(p_1,p_2)=p_1+p_2-2p_1p_2$
  $=(1-2p_2)p_1+p_2$
- ⇒ 最適反応戦略:

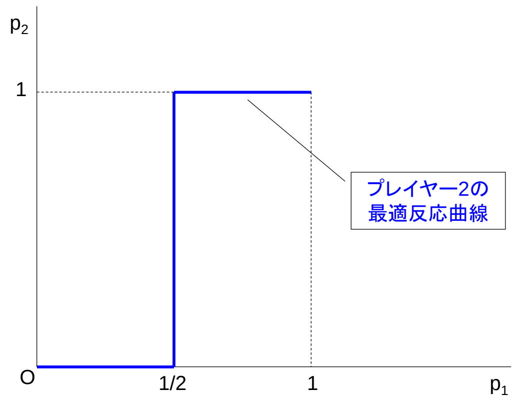
$$\boxed{\begin{array}{l} 1-2p_2<0 \text{ ならば } p_1=0 \\ 1-2p_2=0 \text{ ならば } p_1\in[0,1] \\ 1-2p_2>0 \text{ ならば } p_1=1 \end{array}}$$



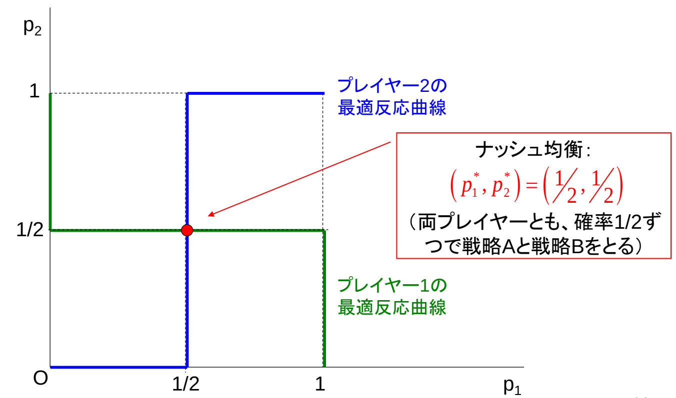
混合戦略のナッシュ均衡の求め方

- プレイヤー2:p_1を所与として、期待利得$v_2(p_1,p_2)$を最大にするようなp_2を選ぶ
- プレイヤー2の期待利得: $v_2(p_1,p_2)=2p_1p_2-p_1-p_2+1$
  $=(2p_1-1)p_2+1-p_1$
- ⇒ 最適反応戦略:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2p_1-1<0 \text{ ならば } p_2=0 \\ 2p_1-1=0 \text{ ならば } p_2\in[0,1] \\ 2p_1-1>0 \text{ ならば } p_2=1 \end{array}}$$



混合戦略のナッシュ均衡の求め方



じゃんけんにおける混合戦略のナッシュ均衡

- プレイヤーiが「グー」を出す確率をp_i、「チョキ」を出す確率をq_iとする（i=1,2）

		プレイヤー2		
		グー [確率 p_2]	チョキ [確率 q_2]	パー [確率 $1-p_2-q_2$]
プレイヤー1	グー [確率 p_1]	確率 p_1p_2	確率 p_1q_2	確率 $p_1(1-p_2-q_2)$
	チョキ [確率 q_1]	確率 q_1p_2	確率 q_1q_2	確率 $q_1(1-p_2-q_2)$
	パー [確率 $1-p_1-q_1$]	確率 $(1-p_1-q_1)p_2$	確率 $(1-p_1-q_1)q_2$	確率 $(1-p_1-q_1)(1-p_2-q_2)$

じゃんけんにおける混合戦略のナッシュ均衡

- プレイヤー1の期待利得：

$$
\begin{aligned}
v_1(p_1,q_1,p_2,q_2) = {} & p_1p_2\times 0 + p_1q_2\times 1 + p_1(1-p_2-q_2)\times(-1) \\
& + q_1p_2\times(-1) + q_1q_2\times 0 + q_1(1-p_2-q_2)\times 1 \\
& + (1-p_1-q_1)p_2\times 1 + (1-p_1-q_1)q_2\times(-1) \\
& + (1-p_1-q_1)(1-p_2-q_2)\times 0 \\
= {} & (3q_2-1)p_1 + (1-3p_2)q_1 + p_2 - q_2
\end{aligned}
$$

- プレイヤー1の最適反応戦略：

$$
p_1 \begin{cases} =0 & \text{if } q_2 < 1/3 \\ \in[0,1] & \text{if } q_2 = 1/3, \\ =1 & \text{if } q_2 > 1/3 \end{cases}
\qquad
q_1 \begin{cases} =0 & \text{if } p_2 > 1/3 \\ \in[0,1] & \text{if } p_2 = 1/3 \\ =1 & \text{if } p_2 < 1/3 \end{cases}
$$

じゃんけんにおける混合戦略のナッシュ均衡

- プレイヤー2の期待利得：

$$\begin{aligned}v_2(p_1,q_1,p_2,q_2) &= p_1p_2\times 0+p_1q_2\times(-1)+p_1(1-p_2-q_2)\times 1\\&+q_1p_2\times 1+q_1q_2\times 0+q_1(1-p_2-q_2)\times(-1)\\&+(1-p_1-q_1)p_2\times(-1)+(1-p_1-q_1)q_2\times 1\\&+(1-p_1-q_1)(1-p_2-q_2)\times 0\\&=(3q_1-1)p_2+(1-3p_1)q_2+p_1-q_1\end{aligned}$$

- プレイヤー2の最適反応戦略：

$$\boxed{p_2\begin{cases}=0 & \text{if } q_1<1/3\\ \in[0,1] & \text{if } q_1=1/3,\\ =1 & \text{if } q_1>1/3\end{cases}\quad q_2\begin{cases}=0 & \text{if } p_1>1/3\\ \in[0,1] & \text{if } p_1=1/3\\ =1 & \text{if } p_1<1/3\end{cases}}$$

17

じゃんけんにおける混合戦略のナッシュ均衡

- 以下の混合戦略の組はナッシュ均衡：

$$\boxed{(p_1^*,q_1^*,p_2^*,q_2^*)=\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)}$$

  - 2人のプレイヤーがともに「グー」「チョキ」「パー」を1/3ずつの確率で出す

- なぜか？
  - プレイヤー2が $(p_2,q_2)=(1/3,1/3)$ を選んでいる場合、プレイヤー1は、どんな (p_1,q_1) を選んでも最適反応
  - ⇒ $(p_1,q_1)=(1/3,1/3)$ も最適反応
  - 同様に、プレイヤー1が $(p_1,q_1)=(1/3,1/3)$ を選んでいる場合、$(p_2,q_2)=(1/3,1/3)$ はプレイヤー2の最適反応

18

「タカ・ハト」ゲームにおける混合戦略のナッシュ均衡

- 「タカ・ハト」ゲーム：2つの純粋戦略のナッシュ均衡

		プレイヤー2	
		タカ	ハト
プレイヤー1	タカ	-10，-10	100，0
	ハト	0，100	50，50

  - (「タカ」,「ハト」) と (「ハト」,「タカ」)

- ほかに、混合戦略のナッシュ均衡も存在

19

「タカ・ハト」ゲームにおける混合戦略のナッシュ均衡

- 問題：「タカ・ハト」ゲームにおける混合戦略のナッシュ均衡を、次の手順で求めよ。

(1) プレイヤー1の「タカ」の確率をp_1, プレイヤー2の「タカ」の確率をp_2として、それぞれの期待利得をp_1とp_2の関数として表す。

(2) 各プレイヤーの最適反応戦略を求める。

(3) ナッシュ均衡戦略の組 (p_1^*, p_2^*) を求める。（1つとは限らない）

20

「タカ・ハト」ゲームにおける混合戦略のナッシュ均衡：解答

(1)　期待利得

- プレイヤー1：$\boxed{v_1(p_1,p_2)=(50-60p_2)p_1+50(1-p_2)}$
- プレイヤー2：$\boxed{v_2(p_1,p_2)=(50-60p_1)p_2+50(1-p_1)}$

(2) 最適反応戦略

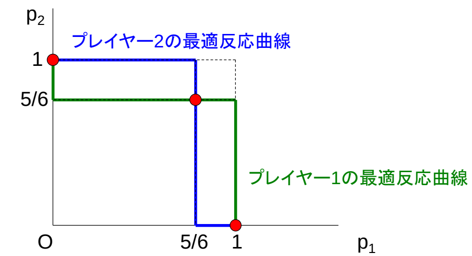
- プレイヤー1：

$$p_1\begin{cases}=1 & \text{if } p_2<5/6\\ \in[0,1] & \text{if } p_2=5/6\\ =0 & \text{if } p_2>5/6\end{cases}$$

- プレイヤー2：

$$p_2\begin{cases}=1 & \text{if } p_1<5/6\\ \in[0,1] & \text{if } p_1=5/6\\ =0 & \text{if } p_1>5/6\end{cases}$$

「タカ・ハト」ゲームにおける混合戦略のナッシュ均衡：解答



(3) ナッシュ均衡：$\boxed{\left(p_1^*,p_2^*\right)=(1,0),\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6}\right),(0,1)}$

- 混合戦略のナッシュ均衡は3つ
- そのうち (p_1^*, p_2^*)=(1,0) と (p_1^*, p_2^*)=(0,1) はそれぞれ純粋戦略のナッシュ均衡 (「タカ」,「ハト」) と (「ハト」,「タカ」) に対応