2　CES 型生産関数

CES(*Constant elasticity of substitution*) 型生産関数とは,

$$Y(K,L)=A(a_1K^{\alpha}+a_2L^{\alpha})^{\beta} \tag{2.1}$$

上式のような形で表される生産関数のことである。

a_i は $0<a_i<1$, $\sum a_i=1$ の share parameter。また α,β については，議論を簡単にするために，規模に関して収穫一定，すなわち 1 次同次関数となるための仮定 $\alpha\beta=1$ が置かれる[1]。

したがって, (2.1)は,

$$Y(K,L)=A\left\{aK^{\rho}+(1-a)L^{\rho}\right\}^{\frac{1}{\rho}} \tag{2.2}$$

上式の形で用いられることが多い。

2.1　代替弾力性

代替弾力性 σ とは，1 章のコブ=ダグラス型生産関数でも述べたように，生産要素の相対価格 $\dfrac{w}{r}$ が変化したとき，生産要素投入量の組み合わせ $\dfrac{K}{L}$ （資本集約度）がどれほど変化するか，という指標であった。具体的には,

$$\sigma=\frac{d(K/L)/K/L}{d(w/r)/w/r} \tag{1.6}$$

上式で表されるが, 1 章で確認したとおり，費用最小化行動のもとでは,

---

[1] $$\begin{aligned}Y(\lambda K,\lambda L)&=F\left\{a_1(\lambda K)^{\alpha}+a_2(\lambda L)^{\alpha}\right\}^{\beta}\\&=F\left\{\lambda^{\alpha}a_1K^{\alpha}+\lambda^{\alpha}a_2L^{\alpha}\right\}^{\beta}\\&=\lambda^{\alpha\beta}Y(K,L)\end{aligned}$$

つまり，生産要素をそれぞれ λ 倍したときの生産量が，もとの生産量を $\lambda^{\alpha\beta}$ 倍したものに等しくなる。

$$\sigma = \frac{d\log\left(\frac{K}{L}\right)}{d\log MRTS} \tag{1.7'}$$

としても表される。

CES 型生産関数(2.2)の技術的限界代替率は，$MRTS = \frac{(1-a)}{a}\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1}$ である。つまり，$\log MRTS = \log\frac{(1-a)}{a} + (1-\rho)\log\left(\frac{K}{L}\right)$ より，$d\log MRTS = (1-\rho)d\log\left(\frac{K}{L}\right)$ となることから，結局代替弾力性は,

$$\sigma = \frac{1}{(1-\rho)} \tag{2.3}$$

ρ との関係式で表される。

ρ は定数であるから，σ も定数となる。生産量に関わらず，代替弾力性が一定の値を取ることから, CES(*Constant elasticity of substitution*)と呼ばれる。

2.2　他の生産関数への変形

2.2.1 The Case of Perfect Substitution ($\rho = 1$)

$\rho = 1$ のとき, (2.2)は $Y(K,L) = A\{aK + (1-a)L\}$ となり，線形生産関数となる。

このとき代替弾力性(*Elasticity of Substitution*)は, (2.3)より $\sigma = \infty$ 。つまり要素間の完全代替が可能となる。

2.2.2 The Case of Imperfect Substitution ($\rho \to \infty$)

ρ を ∞ に近づけていったとき，CES 型生産関数はレオンチェフ型生産関数に近づく。以下からそれを証明する。

まず，$0 < K < L$ であると仮定する。
$\rho > 0$ より，$K^\rho < L^\rho$，つまり $aK^\rho < aK^\rho + (1-a)L^\rho < K^\rho$ …①が成り立つ。$(0 < a < 1)$

ここで，①の両辺を $\frac{1}{\rho}$ 乗すると，$a^{\frac{1}{\rho}}K < \{aK^\rho + (1-a)L^\rho\}^{\frac{1}{\rho}} < K$ 。

$Y = A\left\{aK^{\rho} + (1-a)L^{\rho}\right\}^{\frac{1}{\rho}}$ より，$a^{\frac{1}{\rho}}AK < Y < AK$ となる。

ここで，$\rho \to \infty$ とすると，$a^{\frac{1}{\rho}}AK = AK$ 。つまりこのとき，$Y = AK$ となる。

一方，$0 < L < K$ であるときは，$Y = AL$ となる。
つまり，すなわち小さい方の投入要素量にあわせるように生産量は決定される。すなわち，

$$Y(K,L) = \min(AK, AL) \tag{2.4}$$

というレオンチェフ型の生産関数になる。このとき生産要素間の代替は起きず，代替弾力性は 0 となる。

2.2.3 The Case of Unit Elasticity of Substitution（$\rho \to 0$）

ρ を 0 に近づけていったとき, CES 型生産関数はコブ=ダグラス型生産関数に近づく。以下からそれを証明しよう。

$$Y(K,L) = A\left\{aK^{\rho} + (1-a)L^{\rho}\right\}^{\frac{1}{\rho}} \tag{2.2}$$

これの対数を取ると，

$$\log Y = \log A + \frac{\log\left\{aK^{\rho} + (1-a)L^{\rho}\right\}}{\rho}$$

右辺第 2 項 $\dfrac{\log\left\{aK^{\rho} + (1-a)L^{\rho}\right\}}{\rho}$ の極限は，$\rho = 0$ のとき $\dfrac{0}{0}$ の不定形になるので,ロピタルの定理[2]を用いて求めることができる。

分母・分子を ρ で微分して極限をとると，

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{a\dfrac{\Delta K^{\rho}}{\Delta \rho} + (1-a)\dfrac{\Delta L^{\rho}}{\Delta \rho}}{aK^{\rho} + (1-a)L^{\rho}}$$

ここで，$Z = K^{\rho}$ とおいてその対数をとると，$\log Z = \rho \log K$ 。これを ρ で微分すると，

---

[2] ロピタルの定理とは，$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ のとき，$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が成立するという定理。

$\frac{1}{Z}\frac{\Delta Z}{\Delta \rho} = \log K$，つまり $\frac{\Delta K^{\rho}}{\Delta \rho} = K^{\rho}\log K$。$L$ についても同様に，$\frac{\Delta L^{\rho}}{\Delta \rho} = L^{\rho}\log L$。これを代入して，

$$\lim_{\rho \to 0}\frac{aK^{\rho}\log K + (1-a)L^{\rho}\log L}{aK^{\rho} + (1-a)L^{\rho}}$$
$$= \log K^{a}L^{1-a}$$

つまり，$\lim_{\rho \to 0}\log Y = \log AK^{a}L^{1-a}$

$$Y = AK^{a}L^{1-a}$$

これはコブ=ダグラス型生産関数に他ならない。(2.3)より，代替弾力性も $\sigma = 1$ となる。