

複素数を係数とする 2 次方程式

複素数を係数とする以下のような 2 次方程式について考える。

$$(a_1 + b_1 i)x^2 + (a_2 + b_2 i)x + (a_3 + b_3 i) = 0, \quad a_1 \neq 0 \text{ または } b_1 \neq 0$$

実数を係数とする一般の 2 次方程式と同じように解の公式を適用する。

$$x = \frac{-(a_2 + b_2 i) \pm \sqrt{D}}{2(a_1 + b_1 i)}, \quad D = (a_2 + b_2 i)^2 - 4(a_1 + b_1 i)(a_3 + b_3 i)$$

判別式 D を実部と虚部に分ける。

$$\begin{aligned} D &= a_2^2 - b_2^2 + 2a_2b_2i - 4\{a_1a_3 - b_1b_3 + (a_1b_3 + a_3b_1)i\} \\ &= a_2^2 - b_2^2 - 4a_1a_3 + 4b_1b_3 + 2(a_2b_2 - 2a_1b_3 - 2a_3b_1)i \\ \therefore \operatorname{Re} D &= a_2^2 - b_2^2 - 4a_1a_3 + 4b_1b_3, \quad \operatorname{Im} D = 2(a_2b_2 - 2a_1b_3 - 2a_3b_1) \end{aligned}$$

D を極座標形式で表示し、ド・モアブルの定理を用いて D の平方根を求める。

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &= \sqrt{|D|} \{\cos(\arg D + 2n\pi) + i\sin(\arg D + 2n\pi)\}^{1/2} \\ &= \sqrt{|D|} \left\{ \cos\left(\frac{\arg D}{2} + n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\arg D}{2} + n\pi\right) \right\} = \pm \sqrt{|D|} \left(\cos \frac{\arg D}{2} + i\sin \frac{\arg D}{2} \right) \\ \therefore \operatorname{Re} \sqrt{D} &= \pm \sqrt{|D|} \cos \frac{\arg D}{2}, \quad \operatorname{Im} \sqrt{D} = \pm \sqrt{|D|} \sin \frac{\arg D}{2} \end{aligned}$$

ここで解 x に戻り、分母を実数化すると解が求められる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(a_2 + b_2 i) \pm (\operatorname{Re} \sqrt{D} + i\operatorname{Im} \sqrt{D})}{2(a_1 + b_1 i)} \\ &= \frac{-(a_2 + b_2 i)(a_1 - b_1 i) \pm (\operatorname{Re} \sqrt{D} + i\operatorname{Im} \sqrt{D})(a_1 - b_1 i)}{2(a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i)} \\ &= \frac{-\{a_1a_2 + b_1b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)i\} \pm \{a_1 \operatorname{Re} \sqrt{D} + b_1 \operatorname{Im} \sqrt{D} + (a_1 \operatorname{Im} \sqrt{D} - b_1 \operatorname{Re} \sqrt{D})i\}}{2(a_1^2 + b_1^2)} \\ &= \frac{-a_1a_2 - b_1b_2 \pm (a_1 \operatorname{Re} \sqrt{D} + b_1 \operatorname{Im} \sqrt{D}) + \{-a_1b_2 + a_2b_1 \pm (a_1 \operatorname{Im} \sqrt{D} - b_1 \operatorname{Re} \sqrt{D})\}i}{2|a_1 + b_1 i|^2} \\ \therefore \operatorname{Re} x &= \frac{-a_1a_2 - b_1b_2 \pm (a_1 \operatorname{Re} \sqrt{D} + b_1 \operatorname{Im} \sqrt{D})}{2|a_1 + b_1 i|^2}, \quad \operatorname{Im} x = \frac{-a_1b_2 + a_2b_1 \pm (a_1 \operatorname{Im} \sqrt{D} - b_1 \operatorname{Re} \sqrt{D})}{2|a_1 + b_1 i|^2} \end{aligned}$$

【注釈①：複素数の絶対値・偏角】

複素数 $z = a + bi$ に対し、 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ をそれぞれ実部、虚部といい、 $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$ である。

また、 $|z|$, $\arg z$ をそれぞれ複素数 z の絶対値、偏角といい、以下のように定義される。

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \arg z = \begin{cases} \tan^{-1}(b/a) & (a > 0 \text{ のとき}) \\ \pi/2 & (a = 0, \quad b > 0 \text{ のとき}) \\ 3\pi/2 & (a = 0, \quad b < 0 \text{ のとき}) \\ \tan^{-1}(b/a) + \pi & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なお、 $z = 0$ すなわち $a = b = 0$ のとき、偏角は定義されない。

【注釈②：ド・モアブルの定理】

一般角 θ 及び任意の数 m に対し、以下の等式が成立する。ただし、 n は整数である。

$$\{\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)\}^m = \cos(m\theta + 2mn\pi) + i\sin(m\theta + 2mn\pi)$$

なお、 m が整数のときは値が 1 つに定まるため、左辺の $2n\pi$ 及び右辺の $2mn\pi$ は不要となる。