最適化問題の基礎 7

crimsonbach

2004 年 9 月 9 日

前回までの最適化問題において説明変数は互いに独立だから、変数はいかなる値でも選べた。ここではたとえば $x_1 + x_2 = 100$ といった制約のもとでは $\overline{x}_1$ および $\overline{x}_2$ は同時的であり、従属的である。したがって、これらは制約された最適値であって、これまでのは制約条件がない最適値といえよう。まずある消費者の効用関数を考える。

$$U = x_1 x_2 + 2x_1.$$

この効用関数での限界効用は x_1 および x_2 についての偏微分から

$$U_1 \equiv \frac{\partial U}{\partial x_1}(>0), \quad U_2 \equiv \frac{\partial U}{\partial x_2}(>0).$$

限界効用がともに正だから制約がない場合は、無限の消費を行うことが望ましいが現実的ではない。たとえば予算を 60 、所与で一定の価格をそれぞれ 4 、 2 とすると予算制約

$$4x_1 + 2x_2 = 60.$$

は x_1 と x_2 の選択を互いに従属的にする。上の例では計算が簡単なので、そのまま制限つき極大は

$$x_2 = \frac{60 - 4x_1}{2} = 30 - 2x_1$$
$$U = x_1(30 - 2x_1) + 2x_1 = 32x_1 - 2{x_1}^2$$
$$\frac{dU}{dx_1} = 0, \quad 32 - 4x_1 = 0$$
$$\overline{x}_1 = 8, \quad \overline{x}_2 = 14, \quad \overline{U} = 128$$
$$\text{さらに}\frac{d^2U}{d{x_1}^2} = -4 < 0, \text{したがって、停留点は制限された } U \text{ の極大.}$$

制約つきの最適化問題ではラグランジュ乗数法が便利である。ラグランジュ乗数法は制約つきの極値の問題を制約なしの極値の問題の 1 階条件が依然として使えるような形に変換できるようにする（2 階条件については注意が必要だ）。上の例を使ってラグランジュ関数を作る。制約条件を組み入れた目的関数は

$$L = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2). \tag{1}$$

λ は未定のある定数で、ラグランジュ乗数という。λ を付加的な変数として考えるとラグランジュ関数は

$$L = L(\lambda, x_1, x_2).$$

極値のための 1 階条件は連立方程式

$$
\begin{aligned}
&L_\lambda(\equiv \frac{\partial L}{\partial \lambda}) = 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \\
&L_1(\equiv \frac{\partial L}{\partial x_1}) = x_2 + 2 - 4\lambda = 0 \\
&L_2(\equiv \frac{\partial L}{\partial x_2}) = x_1 - 2\lambda = 0 \\
&\overline{x}_1 = 8, \quad \overline{x}_2 = 14, \quad \overline{\lambda} = 4, \quad \overline{L} = 128\ (= \overline{U}).
\end{aligned}
$$

一般的に目的関数 $z = f(x, y)$ 、制約条件 $g = (x, y)$ のラグランジュ関数は

$$
L = f(x, y) + \lambda \left[c - g(x, y)\right]. \tag{2}
$$

ラグランジュ関数 L が停留点をもつための必要条件は

$$
\begin{aligned}
L_\lambda &= c - g(x, y) = 0 \\
L_x &= f_x - \lambda g_x = 0 \\
L_y &= f_y - \lambda g_y = 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

たとえば、制約条件 $x_1 + 4x_2 = 2$ のもとで $z = {x_1}^2 + {x_2}^2$ のときのラグランジュ関数は

$$
L = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \lambda(2 - x_1 - 4x_2).
$$

停留点をもつための 1 階条件は

$$
\begin{aligned}
&L_\lambda = 2 - x_1 - 4x_2 = 0 \\
&L_1 = 2x_1 - \lambda = 0 \\
&L_2 = 2x_2 - 4\lambda = 0 \\
&\overline{\lambda} = \frac{4}{17}, \quad \overline{x}_1 = \frac{2}{17}, \quad \overline{x}_2 = \frac{8}{17}, \quad \overline{L} = \overline{z} = \frac{4}{17}.
\end{aligned}
$$

$z = f(x, y)$ の制約なし極値の必要条件は全微分

$$
dz = f_x dx + f_y dy = 0.
$$

制約条件 $g(x, y) = c$ の全微分は

$$
\begin{aligned}
dg = dc = 0, \quad (C : \text{定数}). \\
(dg) = g_x dx + g_y dy = 0.
\end{aligned}
$$

この関係は dx と dy を互いに従属的にする。必要条件 $g = c$ 、 $dg = 0$ のもとで $dz = 0$

$$
\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}.
$$

また（3）式のあとの 2 つを書きなおすと

$$
\frac{f_x}{g_x} = \lambda, \quad \frac{f_y}{g_y} = \lambda. \tag{4}
$$

ラグランジュ乗数法は全微分と違って、 $\overline{\lambda}$ も求められる。ラグランジュ乗数 $\overline{\lambda}$ は制約条件のシフトに対する $\overline{L}$ 、 $\overline{z}$ の反応の大きさを表わす。(3) 式において λ 、 x 、 y は内生変数であり、定数 c は外生変数である制約パラメータだ。(3) 式において 3 つの陰関数を定義すると

$$F^j(\lambda, x, y; c) = 0, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{5}$$

これらが連続的な導関数をもつと仮定すると内生変数によるヤコビアンは

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial \lambda} & \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y} \\ \frac{\partial F^2}{\partial \lambda} & \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y} \\ \frac{\partial F^3}{\partial \lambda} & \frac{\partial F^3}{\partial x} & \frac{\partial F^3}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -g_x & -g_y \\ -g_x & f_{xx} - \lambda g_{xx} & f_{xy} - \lambda g_{xy} \\ -g_y & f_{xy} - \lambda g_{xy} & f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{vmatrix} \tag{6}$$

このヤコビアンは 2 階の条件と関連している。$|J| \neq 0$ と仮定し、 $\overline{\lambda}$ 、 $\overline{x}$ 、 $\overline{y}$ はパラメータ c の陰関数で定義すると

$$\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(c), \quad \overline{x} = \overline{x}(c), \quad \overline{y} = \overline{y}(c). \tag{7}$$

恒等式 $c - g(\overline{x}, \overline{y}) \equiv 0$ から

$$\begin{aligned} f_x(\overline{x}, \overline{y}) - \lambda g_x(\overline{x}, \overline{y}) \equiv 0 \\ f_y(\overline{x}, \overline{y}) - \lambda g_y(\overline{x}, \overline{y}) \equiv 0 \end{aligned}$$

ラグランジュ関数

$$\overline{L} = f(\overline{x}, \overline{y}) + \lambda \left[c - g(\overline{x}, \overline{y}) \right]. \tag{8}$$

(7) 式から $\overline{L}$ は c のみの関数になるので、 $\overline{L}$ を c で全微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{L}}{dc} &= f_x \frac{d\overline{x}}{dc} + f_y \frac{d\overline{y}}{dc} \frac{d\overline{y}}{dc} + \left[c - g(\overline{x}, \overline{y}) \right] \frac{d\overline{x}}{dc} + \overline{\lambda}(1 - g_x \frac{d\overline{x}}{dc} - g_y \frac{d\overline{y}}{dc}) \\ &= (f_x - \overline{\lambda} g_x) \frac{d\overline{x}}{dc} + (f_y - \overline{\lambda} g_y) \frac{d\overline{y}}{dc} + \left[c - g(\overline{x}, \overline{y}) \right] \frac{d\overline{\lambda}}{dc} + \overline{\lambda}. \end{aligned} \tag{9}$$

f_x 、 f_y 、 g_x 、 g_y は全て最適点で評価されている。上の恒等式から

$$\frac{d\overline{L}}{dc} = \overline{\lambda}. \tag{10}$$

ラグランジュ乗数の解の値がパラメータ c による制約の変化の目的関数の最適値に与える影響を表わす。

n つの変数の場合、目的関数 $z = f(x_1, \cdots, x_n)$ 、制約条件 $g(x_1, \cdots, x_n) = c$ の場合、ラグランジュ関数は

$$L = f(x_1, \cdots, x_n) + \lambda \left[c - g(x_1, \cdots, x_n) \right].$$

1 階条件は $(n-1)$ 個の連立方程式

$$\begin{aligned} & L_\lambda = c - g(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ & L_1 = f_1 - \lambda g_1 = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & L_n = f_n - \lambda g_n = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

あるいは、制約条件が 1 つ以上の場合、ラグランジュ関数の制約条件の数ほど乗数を導入すればよい。n 個の変数の関数が 2 つの制約条件

$$g(x_1, \cdots, x_n) = c, \quad h(x_1, \cdots, x_n) = d.$$

から、2 つの未定乗数 λ および μ で

$$\begin{aligned} L = f(x_1,\cdots,x_n) &+ \lambda\left[c - g(x_1,\cdots,x_n)\right] \\ &+ \mu\left[d - h(x_1,\cdots,x_n)\right]. \end{aligned}$$

1 階条件は $(n+2)$ 個の連立方程式

$$\begin{aligned} &L_\lambda = c - g(x_1,\cdots,x_n) = 0 \\ &L_\mu = d - h(x_1,\cdots,x_n) = 0 \\ &L_i = f_i - \lambda g_i - \mu h_i = 0, \quad i = 1,\cdots,n. \end{aligned} \tag{12}$$