# 微分方程式 2

crimsonbach

2004 年 10 月 9 日

たとえば、次の需要関数と供給関数を考える。

$$Q_d = a - bP, \qquad (a, b > 0)$$
$$Q_s = -c + dP, \qquad (c, d > 0)$$

この場合、均衡価格は

$$P^* = \frac{a+c}{b+d}.$$

初期値 $P(0)$ が均衡価格 $P^*$ に到達していない、つまり $P(0) \neq P^*$ にあるなら $t \to \infty$ のとき $P(t)$ が $P^*$ に収束する傾向があるかどうかを調べる必要がある。価格 $P$ は時間 $t$ の関数であるから、数量 $Q$ も時間の関数になる。価格変化率が超過需要（ $Q_d - Q_s$ ）に比例するとしよう。したがって、

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(Q_d - Q_s), \qquad \alpha(>0) : \text{調整係数}$$
$$\frac{dP}{dt} = \alpha(a - bP + c - dP) = \alpha(a+c) - \alpha(b+d)P.$$

これを変形させると微分方程式のかたちになる。

$$\frac{dP}{dt} + \alpha(b+d)P = \alpha(a+c). \tag{1}$$

微分方程式の解の公式[*1]より、

$$\begin{aligned} P(t) &= \left[P(0) - \tfrac{b}{a}\right] e^{-\alpha(b+d)t} + \frac{a+c}{b+d} \\ &= \left[P(0) - P^*\right] e^{-kt} + P^*, \qquad k \equiv \alpha(b+d) \end{aligned} \tag{2}$$

価格 $p(t)$ が均衡価格に収束する傾向にあるかどうかは、(2) 式の第 1 項の $P(0) - P^*$ が $t \to \infty$ のときに 0 になるかどうかによる。ここで、 $P(0)$ および $P^*$ は一定であり、 $k > 0$ であるから $e^{-kt}$ は $t \to \infty$ のとき 0 に収束する。したがって、均衡は動学的に安定である。動学的に安定とは、時間経路の均衡からの乖離が常に 0 、あるいは均衡からの乖離が時間の経過と共に減少することをいう。特殊積分 $y_p$ は異時間的均衡水準を表し、補助積分 $y_c$ は均衡からの乖離を表す。特殊積分 $y_p$ が定数の場合は定常均衡で、非定数の場合は移動均衡である。上の例では $k > 0$ 、 $\alpha(b+d) > 0$ だから、 $(b+d) > 0 (d > -b)$ 。よって、動学的に安定になるためには供給曲線の勾配が需要曲線の勾配を上回らなければならない。一般に 1 階線型微分方程式は

$$\frac{dy}{dt} + uy = w. \tag{3}$$

---

[*1] 微分方程式 $\frac{dy}{dt} + ay = b$ の解は $y(t) = \left[y(0) - \frac{b}{a}\right] e^{-at} + \frac{b}{a}$ である。第 1 項は補助積分（ $y_c$ ）であり、第 2 項は特殊積分（ $y_p$ ）である。

$u$ は可変係数、 $w$ は可変項であり、いずれも時間 $t$ の関数である。同次（ $w=0$ ）の場合

$$\frac{dy}{dt}+uy=0, \quad or \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=-u. \tag{4}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int \frac{dy}{y} = \ln y + c, \qquad y>0 \\ \text{右辺} &= \int -udt = -\int udt \\ \ln y &= -c - \int udt \end{aligned}$$

したがって、一般解は

$$y(t)=e^{\ln y}=e^{-e}e^{-\int udt}=Ae^{-\int hdt}, \qquad A\equiv e^{-e} \tag{5}$$

たとえば、 $\frac{dy}{dt}+3t^2y=0$ の一般解は、 $\int st^2dt=t^3+k$ であるから、 $y(t)=Ae^{-(t^3+k)}=Ae^{-t^3}e^{-k}$ 。