生産関数 1

crimsonbach

2004 年 9 月 11 日

$f(x_1,\cdots,x_n)$ を k 次同次関数とすると、 $f_i(x_1,\cdots,x_n)$ は $k-1$ 次同次関数である。 まず恒等的に

$$f(tx_1,tx_2) \equiv t^k f(x_1,x_2). \tag{1}$$

が成り立ち、両辺を x_j で偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial(tx_j)}\frac{\partial(tx_j)}{\partial x_j} = t^k\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

$\partial(tx_j)/\partial x_j = t$ より、両辺を t で除すと

$$\frac{\partial f(tx_1,\cdots,tx_n)}{\partial(tx_j)} = t^{k-1}\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_j}. \tag{2}$$

したがって、 $(tx_1,\cdots,tx_n)$ で評価された f_j の値が $(x_1,\cdots,x_n)$ で評価された f_j の値の t^{k-1} 倍となる。よって、 f_j は $k-1$ 次同次関数である。

オイラーの定理より、 k 次同次関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ に対して

$$f_1x_1 + \cdots + f_nx_n = kf(x_1,\cdots,x_n). \tag{3}$$

が成り立つ。 証明すると以下の通り。k 次同次性から、

$$f(tx_1,\cdots,tx_n) = t^k f(x_1,\cdots,x_n).$$

が得られる。両辺を t で微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial(tx_1)}\frac{\partial(tx_1)}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial(tx_n)}\frac{\partial(tx_n)}{\partial t} = kt^{k-1}f(x_1,\cdots,x_n). \tag{4}$$

更に $\partial(tx_j)/\partial t = x_j$ に注意して、 $t=1$ とおくと

$$f_1x_1 + \cdots + f_nx_n = kf(x_1,\cdots,x_n).$$