

# コンノミクス (konnomics) 1

## 楽屋均衡問題

crimsonbach

2006 年 7 月 23 日

今、モーニング娘。の楽屋に紺野あさ美さんと亀井絵里さんがいて、2 種類の差し入れ、紺野さんの大好きな焼き芋と亀井さんの大好きなみかんがある。この楽屋には、紺野さんと亀井さんの 2 人しかいない。まず、紺野さんは 2 つの焼き芋と 3 つのみかんをもち、亀井さんは 3 つの焼き芋と 1 つのみかんをもつとする。焼き芋とみかんに対して、紺野さんと亀井さんの効用関数はそれぞれ、

$$\text{紺野さん} \quad u_{\text{紺}}(x_{\text{芋}}, x_{\text{み}}) = x_{\text{芋}}^{\frac{2}{3}} x_{\text{み}}^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{亀井さん} \quad u_{\text{亀}}(y_{\text{芋}}, y_{\text{み}}) = y_{\text{芋}}^{\frac{1}{3}} y_{\text{み}}^{\frac{2}{3}}$$

であるから、これらをもとにこの楽屋の均衡価格と均衡配分を計算する。

楽屋の価格	焼き芋	$P_{\text{芋}} (> 0)$
	みかん	$P_{\text{み}} (> 0)$

紺野さんの最適化問題は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \max \quad & x_{\text{芋}}^{\frac{2}{3}} x_{\text{み}}^{\frac{1}{3}} \\ \text{s.t.} \quad & P_{\text{芋}} x_{\text{芋}} + P_{\text{み}} x_{\text{み}} \leq 2P_{\text{芋}} + 3P_{\text{み}} \end{aligned}$$

亀井さんの最適化問題は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \max \quad & y_{\text{芋}}^{\frac{1}{3}} y_{\text{み}}^{\frac{2}{3}} \\ \text{s.t.} \quad & P_{\text{芋}} y_{\text{芋}} + P_{\text{み}} y_{\text{み}} \leq 3P_{\text{芋}} + P_{\text{み}} \end{aligned}$$

紺野さんの最適化問題を書き換えると（つまり、最大化問題を最小化問題に直す）,

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_{\text{芋}}^{\frac{2}{3}} x_{\text{み}}^{\frac{1}{3}} \\ \text{s.t.} \quad & P_{\text{芋}} x_{\text{芋}} + P_{\text{み}} x_{\text{み}} \leq 2P_{\text{芋}} + 3P_{\text{み}} \end{aligned}$$

となるから，この最適化問題の Kuhn-Tucker 条件は

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_{\text{芋}}^{-\frac{1}{3}}x_{\text{苺}}^{\frac{1}{3}} + \lambda P_{\text{芋}} = 0 \\ -\frac{1}{3}x_{\text{芋}}^{\frac{2}{3}}x_{\text{苺}}^{-\frac{2}{3}} + \lambda P_{\text{苺}} = 0 \\ \lambda \geq 0, \lambda(P_{\text{芋}}x_{\text{芋}} + P_{\text{苺}}x_{\text{苺}} - 2P_{\text{芋}} - 3P_{\text{苺}}) = 0 \\ P_{\text{芋}}x_{\text{芋}} + P_{\text{苺}}x_{\text{苺}} \leq 2P_{\text{芋}} + 3P_{\text{苺}} \end{cases}$$

であり，ここで  $\lambda$  は Kuhn-Tucker 乗数である（ちなみに，目的関数は凸関数であり，Kuhn-Tucker 条件をみたら）。

$\lambda > 0$  の場合（なお  $\lambda = 0$  は棄却される），同条件から

$$P_{\text{芋}}x_{\text{芋}} + P_{\text{苺}}x_{\text{苺}} = 2P_{\text{芋}} + 3P_{\text{苺}}.$$

及び，

$$2\frac{x_{\text{苺}}}{x_{\text{芋}}} = \frac{P_{\text{芋}}}{P_{\text{苺}}}.$$

を得る．これを代入すると，

$$x_{\text{苺}} = \frac{2P_{\text{芋}} + 2P_{\text{苺}}}{3P_{\text{苺}}}.$$

$$x_{\text{芋}} = \frac{4P_{\text{芋}} + 6P_{\text{苺}}}{3P_{\text{芋}}}.$$

となるから，以下の最適解が導かれる．

$$x^* = \begin{pmatrix} x_{\text{芋}}^* \\ x_{\text{苺}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4P_{\text{芋}} + 6P_{\text{苺}}}{3P_{\text{芋}}} \\ \frac{2P_{\text{芋}} + 2P_{\text{苺}}}{3P_{\text{苺}}} \end{pmatrix}.$$

$$x^*(P) = \begin{pmatrix} x_{\text{芋}}^* \\ x_{\text{苺}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4P_{\text{芋}} + 6P_{\text{苺}}}{3P_{\text{芋}}} \\ \frac{2P_{\text{芋}} + 2P_{\text{苺}}}{3P_{\text{苺}}} \end{pmatrix}.$$

同様に，亀井さんの最適消費量は以下のとおりである．

$$y^*(P) = y^* = \begin{pmatrix} \frac{3P_{\text{芋}} + P_{\text{苺}}}{3P_{\text{芋}}} \\ \frac{3P_{\text{芋}} + 3P_{\text{苺}}}{3P_{\text{苺}}} \end{pmatrix}.$$

したがって，この楽屋の総需要量は

$$\begin{cases} x_{\text{芋}} + y_{\text{芋}} \\ x_{\text{苺}} + y_{\text{苺}} \end{cases}$$

であり，楽屋の総供給量

$$\begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ 3 + 1 = 4 \end{cases}$$

となる．ここで，

$$\text{楽屋の総需要量} = \text{楽屋の総供給量}.$$

が成立すると，均衡式は

$$\begin{cases} \frac{4P_{\text{紺}}+6P_{\text{亀}}}{3P_{\text{紺}}} + \frac{3P_{\text{紺}}+P_{\text{亀}}}{3P_{\text{紺}}} = 5 \\ \frac{2P_{\text{紺}}+3P_{\text{亀}}}{3P_{\text{亀}}} + \frac{6P_{\text{紺}}+2P_{\text{亀}}}{3P_{\text{亀}}} = 4 \\ P_{\text{紺}} + P_{\text{亀}} = 1 \end{cases}$$

であり，特に第 3 式を価格単位化とよぶ．結論として，以下の数値が得られたが，

$$P_{\text{紺}}^* = \frac{7}{15}, \quad P_{\text{亀}}^* = \frac{8}{15}.$$

$$x(P^*) = \left( \frac{76}{21}, \frac{19}{12} \right).$$

$$y(P^*) = \left( \frac{29}{21}, \frac{29}{12} \right).$$

$P^*$  は均衡価格であり， $(x(P^*), y(P^*))$  は均衡配分とよばれる．最後に，結果を図示する．

	交換する前	交換した後
紺野さんの効用	$(2)^{\frac{2}{3}} (3)^{\frac{1}{3}} = 2.2889$	$\left(\frac{76}{21}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{19}{12}\right)^{\frac{1}{3}} = 2.747$
亀井さんの効用	$(3)^{\frac{1}{3}} (1)^{\frac{2}{3}} = 1.442$	$\left(\frac{29}{21}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{29}{12}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.999$
紺野さんがもつ差し入れ量	(2, 3)	$\left(\frac{76}{21}, \frac{19}{12}\right)$
亀井さんがもつ差し入れ量	(3, 1)	$\left(\frac{29}{21}, \frac{29}{12}\right)$

紺野さんも亀井さんも交換前より，効用が増加している（Pareto の意味で効率的）．