指数関数と対数関数 2

crimsonbach

2004 年 8 月 25 日

ここでは指数関数を利用した成長率に関する話をする。その前に前回の複利計算について少し追加的な問題を扱う。これまでは連続的な複利計算を行ってきたが、離散的な利子の繰り入れについても連続的な繰り入れと同様に考えることができる。0 時点の元金を A とすると、1 年後、2 年後、3 年後の資産価格はそれぞれ

$$A(1+i), \quad A(1+i)^2, \quad A(1+i)^3, \quad \cdots$$

ここで $(1+i)=b$ とすると上の計算は Ab^t である。t は整数でなければならない。また b は正である。したがって、 b を e を含む 1 より大きい実数のベキ数として表すことができる。つまり $(1+i)=b=e^r$ を満たす r が存在する。よって、

$$A(1+i)^t = Ab^t = Ae^{rt}.$$

かくして連続的な自然関数と同様に考えることができる。最後に割引の話に移ろう。

$$V = A(1+i)^t.$$

辺々 $(1+i)^t$ で除すと

$$A = \frac{V}{(1+i)^t} = V(1+i)^{-t}.$$

同様に

$$V = Ae^{rt}$$

$$A = \frac{V}{e^{rt}} = Ve^{-rt}.$$

ここでは $-r$ を減耗率という。

では成長率に話を戻そう。一般的な自然指数関数

$$V = Ae^{rt}. \tag{1}$$

において、 r を瞬間的な成長率と呼ぶ。この関数を微分すると、

$$\frac{dV}{dt} = rAe^{rt} = rV.$$

になるから、

$$V \text{ の成長率} \equiv \frac{dV/dt}{V} = \frac{rV}{V} = r.$$

瞬間的な成長率は r である。ただし以下の点に注意を払う必要がある。r は瞬間的な成長率であること、 r は一定であること、 r の大きさは時間の単位で測られること、そして V の増加分の絶対値は次第に大きくなること。