# 指数関数と対数関数 3

crimsonbach

2004 年 8 月 28 日

指数関数に続いて対数関数の話に入ろう。対数とは底がある特定の数になるために増加させられなければならないベキ級数のことをいう。たとえば、これまでの $4^2 = 16$ はこのように表現される。

$$\log_4 16 = 2.$$

一般的には

$$y = b^t \quad \Longleftrightarrow \quad t = \log_b y. \tag{1}$$

特に底が 10 の場合を常用対数（ $\log$ ：底 10 を省略)、底が $e$ の場合を自然対数（ $\log_e = \ln$ ）という。たとえば

$$y = e^t \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_e y \quad (t = \ln y).$$

また

$$\ln e^n = n.$$

対数には以下の計算法則がある。

$$\begin{gathered}
\ln(uv) = \ln u + \ln v, \qquad (u, v > 0) \\
\ln(\frac{u}{v}) = \ln u - \ln v, \qquad (u, v > 0) \\
\ln u^a = a \ln u, \qquad (u > 0) \\
\log_b u = (\log_b e)(\log_e u). \qquad (u > 0) \\
\log_b e = \frac{1}{\log_e b} \\
u = b, \quad \log_b b = \log_b b = 1 = (\log_b e)(\log_e b).
\end{gathered}$$

また特に

$$\begin{gathered}
\log_{10} N = (\log_{10} e)(\log_e N) = 0.4343 \log_e N \\
\log_e N = (\log_e 10)(\log_{10} N) = 2.3026 \log_{10} N.
\end{gathered}$$

たとえば次のように計算できる。

$$\begin{gathered}
ab^x - c = 0, \qquad (a, b, c > 0) \\
ab^x = c \\
\log a + x \log b = \log c \\
x = \frac{\log c - \log a}{\log b}.
\end{gathered}$$

対数には次のような計算法則もある。

$$\ln y_1 = \ln y_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2$$
$$\ln y_1 > \ln y_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 > y_2$$
$$\left\{\begin{matrix} 0 < y < 1 \\ y = 1 \\ y > 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \log y < 0 \\ \log y = 0 \\ \log y > 0 \end{matrix}\right\}$$

指数関数でも扱った $y = Ae^{rt}$ で逆関数を求める。

$$\ln y = \ln(Ae^{rt}) = \ln A + rt \ln e = \ln A + rt$$
$$t = \frac{\ln y - \ln A}{r} \qquad (r \neq 0)$$

また一般的に $Ab^{ct}$ において

$$e^r = b^c$$
$$\ln e^r = \ln b^c$$
$$r = \ln b^c = c \ln b$$
$$y = Ab^{ct} = Ae^{(c \ln b)t} = A \exp\left[(c \ln b)t\right].$$

　次の対数関数の微分は

$$y = \ln y$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \ln t = \frac{1}{t}.$$

より厳密には対数関数

$$y = f(t) = \ln t, \quad t \to N$$
$$f'(N) = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=N} = \lim_{t \to N} \frac{f(t) - f(N)}{t - N} = \lim_{t \to N} \frac{\ln t - \ln N}{t - N} = \lim_{t \to N} \frac{\ln(t/N)}{t - N}.$$

ここで $m \equiv \frac{N}{t-N}$ とすると

$$\frac{1}{t - N} = \frac{m}{N}$$
$$\frac{t}{N} = 1 + \frac{t - N}{N} = 1 + \frac{1}{m}$$
$$\frac{1}{t - N} \ln \frac{t}{N} = \frac{m}{N} \ln(1 + \frac{1}{m}) = \frac{1}{N} \ln(1 + \frac{1}{m})^m$$
$$f'(N) = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=N} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{N} \ln(1 + \frac{1}{m})^m = \frac{1}{N} \ln e = \frac{1}{N}.$$

たとえば $y = e^t$ の場合

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} e^t = e^t$$
$$t = \ln y, \qquad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{y}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{dt/dy} = \frac{1}{1/y} = y = e^t.$$

さらに指数関数および対数関数の微分を例題をとおしてみていこう。一般的な関数 $y = e^{f(t)}$ において $u = f(t)$ とすると

$$y = e^u$$
$$\frac{d}{dt}e^{f(t)} = \frac{d}{dt}e^u = \frac{d}{du}e^u\frac{du}{dt} = e^u\frac{du}{dt} = e^{f(t)}f'(t).$$

続いて一般的なかたちの対数関数 $y = \ln f(t)$ において $v = f(t)$ とすると

$$y = \ln v$$
$$\frac{d}{dt}\ln f(t) = \frac{d}{dt}\ln v = \frac{d}{dv}\ln v\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{f(t)}f'(x).$$

まとめると

$$\frac{d}{dt}e^{f(t)} = f'(t)e^{f(t)}, \qquad (\frac{d}{dt}e^u = e^u\frac{du}{dt}) \tag{2}$$
$$\frac{d}{dt}\ln f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}, \qquad (\frac{d}{dt}\ln v = \frac{1}{v}\frac{dv}{dt}). \tag{3}$$

因みに

$$\frac{d}{dt}k\ln t = k\frac{d}{dt}\ln t = \frac{k}{t}.$$

更に導関数はそれぞれ

$$\frac{d}{dt}b^t = b^t\ln b, \qquad \frac{d}{dt}\log_b t = \frac{1}{t\ln b}.$$

たとえば

$$\frac{d}{dt}b^t = \frac{d}{dt}e^{t\ln b} = (\ln b)(e^{t\ln b}) = \ln b\cdot b^t = b^t\ln b.$$

指数関数 $y = b^t$ の 1 次および 2 次導関数は

$$y' = b^t\ln b$$
$$y'' = \frac{d}{dt}y'(t) = (\frac{d}{dt}b^t)\ln b = (b^t\ln b)\ln b = b^t(\ln b)^2.$$

対数関数 $y = \ln t$ の 1 次および 2 次導関数は

$$y' = \frac{1}{t} = t^{-1}$$
$$y'' = -t^{-2} = \frac{-1}{t^2}$$

たとえば次の関数を対数関数に置き換えて 1 次導関数を求めると

$$y = \frac{x^2}{(x+3)(2x+1)}$$
$$\ln y = \ln x^2 - \ln(x+3) - \ln(2x+1)$$
$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x+3} - \frac{2}{2x+1} = \frac{7x+6}{x(x+3)(2x+1)}.$$

最後に次の指数関数の最大化を例にあげよう。

$$V = Ke^{\sqrt{t}} = K\exp(t^{1/2}). \tag{4}$$

のとき次の指数関数の 1 階条件 $\frac{dA}{dt} = 0$ より

$$A(t) = Ve^{-rt} = Ke^{\sqrt{t}}e^{-rt} = Ke^{\sqrt{t}-rt}. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \ln A(t) = \ln K + \ln e^{\sqrt{t}-rt} = \ln K + (t^{1/2-rt}) \\ \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}t^{-1/2-r} \\ or \quad \frac{dA}{dt} = A(\frac{1}{2}t^{-1/2-r}). \end{aligned}$$

また $\frac{dA}{dt} \neq 0$ であるから

$$t = (\frac{1}{2r})^2 = \frac{1}{4r^2}.$$

因みに 2 階条件は

$$\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{d}{dt}A(\frac{1}{2}t^{-1/2} - r) = A\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}t^{-1/2} - r) + (\frac{1}{2}t^{-1/2} - r)\frac{dA}{dt}.$$

いま $dA/dt = 0$ より

$$\frac{d^2A}{dt^2} = A\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}t^{-1/2} - r) = A(-\frac{1}{4}t^{-3/2}) = \frac{-A}{4\sqrt{t^3}}.$$

$A > 0$ および $t > 0$ から 2 階条件は負である。よってこの関数は $t = \frac{1}{4r^2}$ のとき最大である。