最適化問題の基礎 1

crimsonbach

2004 年 8 月 26 日

ここでは経済学における最適化の基礎を勉強しよう。経済学では利潤の最大化や費用の最小化を取り扱うことが多い。そこでそういった従属変数の最大値（最小値）つまり極値を求めることになる。目的関数を設定し従属変数を最大化・最小化する独立変数（選択変数）の値の集合を求めよう。

たとえば以下の 3 つのケースを考えてみる。$y = C$(定数) の場合、すべての値域で最大値とも最小値ともなりうる、あるいはそのどちらでもない。次に線型関数 $y = x + C$(定数) の場合は関数の値域における大域的最小値をもつ。しかし、その最小値は選択変数が 0 のときだから経済学的にあまり意味がない。われわれは端点以外の極限を考えなければならない。因みに、大域的という言葉には注意を払う必要がある。最後に $y = a(x+b)(x+c)(x+d)$ という場合、局所における最大値および最小値をもつ。

一般的な関数 $y = f(x)$ の 1 次導関数はこのように記述する。

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

1 次導関数を用いて極値をもとめることができる。たとえば $x = x_0$ で関数の極値があれば $f'(x_0) = 0$ あるいは $f'(x_0)$ が存在しない。存在しない場合は尖点がありなめらかでない。$f(x_0) = 0$ の場合で x_0 を境に左から右へいったとき $f' > 0$ から $f' < 0$ に符号が変われば x_0 にて大局的最大値をもつ。同様に $f' < 0$ から $f' > 0$ に符合が変われば x_0 で大局的最小値をもつ。ただし、符号が変わらなければ大局的最大値あるいは最小値をもたない。

1 次導関数が $f'(x_0) = 0$ であるとき x_0 を臨界値、そして $f(x_0)$ を y の停留値という。$(x_0, f(x_0))$ を停留点と呼ぼう。関数が大局的極値をもつ必要条件は $f'(x_0) = 0$ であるが十分条件ではない。というのも、関数形に変曲点がある場合があるからだ。そこで関数が大局的極値をもつ十分条件は上述したように x_0 を境に 1 次導関数の符号がかわることになる。たとえば、 $y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$ を考えよう。この 1 次導関数は

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 0$$
$$x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6) = 0.$$

$x = 2, 6$ は臨界値である。ここでそれぞれ臨界値の近傍で 1 次導関数の符号が変わるのはわかるだろう。

続いて 2 次導関数に話を移そう。2 次導関数あるいはそれより高次の導関数はこう記述される。

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

少し注意をして欲しいのはたとえば 2 次導関数の分母の指数 2 は dx の両方にかかっているだ。一方、分子では d のみに指数 2 がかかっている。それはそもそも $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ ということを考えれば明らかだろう。2

次以上の導関数の例は

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^4 - x^3 + 17x^2 + 3x - 1 \\
f'(x) &= 16x^3 - 3x^2 + 34x + 3 \\
f''(x) &= 48x^2 - 6x + 34 \\
f'''(x) &= 96x - 6 \\
f^{(4)}(x) &= 96 \\
f^{(5)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

1 次導関数 $f'(x)$ は関数 $f(x)$ の変化率を、2 次導関数 $f''(x)$ は 1 次導関数 $f'(x)$ の変化率を表す。点 $x = x_0$ から独立変数 x がごく僅かだけ増加したとしよう。そのとき 1 次導関数と 2 次導関数について次のことを考える必要がある。独立変数が増加した時 $f' > 0$ ならば関数の値は増加し、 $f' < 0$ ならば関数の値は減少する。同様に、 $f'' > 0$ ならば関数の曲線の勾配は増加し、 $f'' < 0$ ならば関数の曲線の勾配は減少する。よく学部レベルで出てくる逓減する生産関数は $f' > 0$ および $f'' < 0$ を仮定している。つまり関数の値は増加し続けるが、その曲線の勾配は次第に減少していく。$f'' > 0$ の場合、関数 $f(x)$ は凹状関数である。反対に $f'' < 0$ の場合、関数 $f(x)$ は凸状関数になる。ただ、 $f'' < 0 (> 0)$ であるなら $f(x)$ は強い意味で凹状（凸状）だが、それを逆にいうことはできない。たとえば、 $y = x^4$ は強い意味で凹状だが、この 2 次導関数は $f''(x) = 12x^2 > 0$ であり、上記と矛盾しているからだ。より一般的には関数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ の 2 次導関数 $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$ にて、 $a > 0$ なら凸状であり、 $a < 0$ なら凹状である。

2 次導関数テストの話に移ろう。$x = x_0$ で 1 次導関数 $f'(x_0) = 0$ ならば関数 $f(x_0)$ で極値をもつかもしれないが、それが極大か極小かは分からない。そこで、$x = x_0$ のとき 2 次導関数が $f''(x_0) < 0$ ならば $f(x_0)$ は極大であり、 $f''(x_0) > 0$ ならば $f(x_0)$ は極小である。1 次導関数のテストを 1 階条件、2 次導関数のテストを 2 階条件という。ただ $f''(x_0) = 0$ になった場合、2 次導関数テストは失敗になる。そのときは 1 次導関数テストに戻るか、もっと高次元の導関数を含む別のテストを用いることになる。たとえば 次の関数を考えよう。

$$y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

の 1 次導関数と 2 次導関数はそれぞれ

$$g'(x) = 3x^2 - 6x, \quad g''(x) = 6x - 6.$$

1 次導関数テストで

$$g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0.$$

臨界値は $x_1 = 0$ および $x_2 = 2$ 。

$$\begin{aligned}
g(0) &= 2, \qquad g''(0) = -6 < 0 \\
g(2) &= -2, \qquad g''(2) = 6 > 0.
\end{aligned}$$

2 次導関数テストの結果から関数 $g(x)$ は $x = 0$ のとき最大値を、 $x = -2$ のとき最小値をもつ。より経済学で扱われるような例題にかえよう。選択変数を生産量 Q 、目的関数を利潤関数 $\pi(Q)$ 、総収入関数 $R(Q)$ 、

および費用関数 $C(Q)$ を考える。

$$
\begin{gathered}
\pi(\text{利潤}) = \pi(Q) = R(Q) - C(Q) \\
\frac{d\pi}{dQ} = \pi'(Q) = R'(Q) - C'(Q) = 0 \\
R'(\overline{Q}) = C'(\overline{Q}) \\
\frac{d^2\pi}{dQ^2} \equiv \pi''(Q) = R''(Q) - C''(Q) < 0 \\
R''(\overline{Q}) < C''(\overline{Q}).
\end{gathered}
$$

2 次導関数の値を負としたのは、利潤の最大化が目的だからである。

次回はテーラー級数の話をしよう。