回帰分析の基礎４

crimsonbach

2004 年 9 月 25 日

行列を使って、回帰モデルを記述しなおしてみよう。重回帰モデル

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i, \qquad i = 1, \cdots, n. \tag{1}$$

において以下のような行列を利用する。

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ 1 & X_{23} & X_{33} & \cdots & X_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

これらより（1）式は

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}. \tag{2}$$

と、より簡潔になった。ここで $\boldsymbol{x}_n'$ は $\boldsymbol{x}_n$ の転置ベクトルである。

次に誤差項についてだが、 $\boldsymbol{uu}'$ （ $n \times n$ ）の行列の要素を $u_i u_j$ とする。行列の期待値は

$$E(\boldsymbol{uu}') = \begin{bmatrix} E({u_1}^2) & E(u_1 u_2) & \cdots & E(u_1 u_n) \\ E(u_2 u_1) & E({u_2}^2) & \cdots & E(u_2 u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_n u_1) & E(u_n u_2) & \cdots & E({u_n}^2) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

分散 $V(u_i) = E(u_i^2)$ および共分散 $Cov(u_i, u_j) = E(u_i u_j)$ より（3）式を u の分散共分散行列（variance covariance matrix）という。これまでのように、各誤差項に系列相関がないこと、および均一分散の仮定をおくと分散共分散行列は

$$V(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{I}_n$ は（ $n \times n$ ）の単位行列である。

因みに、（ $n \times n$ ）の正方行列 $\boldsymbol{A}$ の主対角成分 a_{ii} の和をトレース（trace）といい、

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{5}$$

と表現する。