最適化問題の基礎 6

crimsonbach

2004 年 9 月 7 日

選択変数が 3 つある場合の定符号テストに入る。関数 $z = f(x_1, x_2, x_3)$ において全微分は

$$z = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3.$$

瞬間的に停留点（ $dz = 0$ ）になる必要条件は偏導関数が

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0.$$

また特別な例で、関数 z が陰関数 $F(z, x_1, x_2, x_3) = 0$ で定義される場合は

$$f_i \equiv \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{-\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}.$$

関数 z の 2 階の全微分は

$$\begin{aligned}
d^2 z = d(dz) &= \frac{\partial(dz)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(dz)}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial(dz)}{\partial x_3}dx_3 \\
&= f_{11}dx_1^2 + f_{12}dx_1 d_2 + f_{13}dx_1 x_3 \\
&+ f_{21}dx_2 x_1 + f_{22}x_2^2 + f_{23}dx_2 x_3 \\
&+ f_{31}dx_3 x_1 + f_{32}dx_3 x_2 + f_{33}dx_3^2
\end{aligned}$$

この 2 階の全微分において、 dx_i を変数、 f_{ij} をある制約に従う係数とすれば、ヘッセの行列式

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

このヘシアンの首座小行列式はそれぞれ

$$|H_1| = f_{11}, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad |H_3| = |H|.$$

よって 2 階条件は $d^2 z$ がもし $\begin{Bmatrix} |H_1| > 0\,;\ |H_2| > 0\,;\ |H_3| > 0 \\ |H_1| < 0\,;\ |H_2| > 0\,;\ |H_3| < 0 \end{Bmatrix}$ であれば、$\begin{Bmatrix} \text{正値定符号} \\ \text{負値定符号} \end{Bmatrix}$ となる。同様に固有根による定符号テストも可能だ。ヘッセ行列 $\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots \\ \ldots\ldots\ldots & \\ \cdots & f_{33} \end{bmatrix}$ の全ての固有根が $\begin{Bmatrix} \text{正} \\ \text{負} \end{Bmatrix}$ なら、$\begin{Bmatrix} \text{正値定符号} \\ \text{負値定符号} \end{Bmatrix}$ になる。

たとえば、

$$z=-x_1^3+3x_1x_3+2x_2-x_2^2-3x_3^2.$$

の極値を調べる。

$$f_1=-3x_1^2+3x_3,\quad f_2=2-2x_2,\quad f_3=3x_1-6x_3$$

$$\begin{aligned} -3x_1^2 \qquad\quad &+3x_3=0 \\ -2x_2 \qquad &=-2 \\ 3x_1 \qquad &-6x_3=0 \end{aligned}$$

$$(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)=\left\{\begin{matrix} (0,1,0)\text{ で}\overline{z}=1 \\ (\frac{1}{2},1,\frac{1}{4})\text{ で}\overline{z}=\frac{17}{16} \end{matrix}\right\}$$

$$|H|=\begin{vmatrix} -6x_1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

$\overline{x}=0$ では 2 階条件をみたさないので（ $|H_1|=0$ ）、 $\overline{x}=\frac{1}{2}$ から

$$|H_1|=-3,\quad |H_2|=6,\quad |H_3|=-18.$$

よって、 $\overline{z}=\frac{17}{16}$ にて極大になる。

選択変数が n 個の目的関数

$$z=f(x_1,\cdots,\ x_n).$$

において、全微分は

$$dz=f_1dx_1+\cdots,\ f_ndx_n.$$

から極値のための必要条件は

$$f_1=\cdots=f_n=0.$$

そしてヘシアン

$$|H|=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

より、十分条件（2 階条件）にて首座小行列 $|H_1|,\cdots,|H_n|$ が全て正なら正値定符号で、首座小行列が最初が負で順々に符号が変わるなら負値定符号になる。

説明変数が 1 つの関数 $y=f(x)$ において、微分可能で 2 次編微分と d^2z が定義できるとする。関数が強い意味で凹性なら逆 U の字型で、同じく強い意味で凸性なら U 字型になる。これを n 個の説明変数をもつ $z=f(x_1,\cdots,x_n)$ において、強い意味で凹性なら負値定符号（極大）であり、強い意味で凸性なら正値定符号（極小）である。つまり、関数に強い意味での凸性（凹性）をもつという仮定を加えれば、極値をもつことと同義であろう。