最適化問題の基礎 3

crimsonbach

2004 年 8 月 27 日

前回までは 1 変数のみの問題（ $f(x)$ ）を扱ってきた。ここでは 2 変数以上の関数の問題に進もう。まずは変数を 2 つ持つ関数 $z = f(x, y)$ の 1 次偏導関数は

$$f_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad f_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{1}$$

2 次偏導関数は

$$\begin{aligned} f_{xx} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(f_x), &\qquad f_{yy} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(f_y) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}), &\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}). \end{aligned} \tag{2}$$

そして交差（混合）偏導関数は

$$f_{xy} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}), \qquad f_{yx} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}). \tag{3}$$

ヤングの定理により、2 つの交差偏導関数がともに連続である限りそれらは互いに等しい。これは 2 次以上にもいえる。

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

たとえば、 $z = x^3 + 5xy - y^2$ の 1 次および 2 次偏導関数はそれぞれ

$$f_x = 3x^2 + 5y, \qquad f_y = 5x - 2y$$
$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yx} = 5, \quad f_{xy} = 5, \quad f_{yy} = -2.$$

2 つの交差偏導関数が等しいことがわかる。また $z = x^2 e^{-y}$ の 1 次および 2 次偏導関数はそれぞれ

$$f_x = 2xe^{-y}, \qquad f_y = -x^2 e^{-y}$$
$$f_{xx} = 2e^{-y}, \quad f_{yx} = -2xe^{-y}, \quad f_{xy} = -2xe^{-y}, \quad f_{yy} = x^2 e^{-y}.$$

これも交差偏導関数は等しい。

続いて一般的に関数 $z = f(x, y)$ の 1 次導関数は

$$dz = f_x dx + f_y dy. \tag{4}$$

そして 2 次導関数は

$$
\begin{aligned}
d^2 z \equiv d(dz) &= \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy \\
&= (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy \\
&= f_{xx}dx^2 + f_{xy}dydx + f_{yx}dxdy + f_{yy}dy^2 \\
&= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

たとえば、 $z = x^3 + 5xy - y^2$ の 1 次および 2 次導関数は

$$
\begin{aligned}
dz &= (3x^2 + 5y)dx + (5x - 2y)dy \\
d^2 z &= 6xdx^2 + 10dxdy - 2dy^2
\end{aligned}
$$

次回は更に話を進める。