

第8章 出来事の相対性と時空

問題の所在

モノの運動は別のモノに対する相対的な位置の変化としてのみ表現できる—ということを第3章で見た。それで、運動を記述するのに適当な座標系を選ぶことになる。ニュートンの運動の法則は、第1法則すなわち慣性の法則が成り立つ慣性系を選びなさいと指定する。それを立ち入って考えてみよう。

最新のリア・モーターカーに乗って出発するのを待っていたわたしはいつのまにか眠ってしまった。目が覚めたら窓のカーテンが閉められていて、ただ出発前と同じ機械音がするばかり。ぼんやりしているわたしには、列車が動いているのかどうかよく分からない。そこへ反対側の窓際に座っている友人が、リングを放ってくれと話しかけてきた。列車が速さ 100m/s もの速さで走っているとしたら、普通のように投げていいのか疑問がよぎったが、言われるままに友人の方へ投げた。友人がうまく受け止めてくれてほっとする。すると駅モニター・テレビで一部始終を観察していたあなたが、わたしの座席のテレビ電話に話しかけてきて、「何かためらったようだけど、どうかしたの？ あなたはその列車が動いているかどうか分からないんでしょう」とからかい気味に言った。たじろぐわたしも頭が働き始め反撃に出る。「ああ、しかし君にわたしを笑う資格があるのかい？ 君も 380m/s もの速さで動いていることを忘れていだろう」。頭の回転の速いあなたはすぐに、日本付近は自転軸を中心に24時間かけておよそ3万3千kmの円周を描くことを思い出す。二人がおもしろ半分「君の方が動いているのだ」と主張しあっても、この水かけ論争は果てしがない。

さいわい、リンゴを受け止めてくれた友人が仲裁をしてくれた。— 君たち二人の言っていることは両方正しい。われわれが地上にいるとき、地球が自転や公転をしていることを忘れてキャッチボールをしてもそれでよい。自転や公転は曲線運動で正確には加速度のある運動だ。しかしキャッチボールをするぐらいの場合には、地表はおおよそ一定速度の直進運動をしていると近似できる。まあ慣性系なのだ。君たちが0.1秒間跳び上がっても38m西に落ちることはない。ガリレイが言ったことはそういうことだ。実際ニュートン力学は、一定速度で直線運動しているどんな座標系からリンゴの運動を見ても、同じ運動の法則・同じ形の運動方程式が成り立つように出来ているのだ。だから、速さ380m/s、480m/sあるいはその他どんな速度であれ、列車が一定速度の直線運動をしているのなら、そこでも地上にいるのと同じように投げて全然問題ないのさ。逆にどんな力学実験をしても、その列車の速度を言い当てることはできない。太陽系は銀河系のなかでどう動いているか、銀河系は...、と考えてみなさい。そもそもわれわれの地球がどういう速度で動いているのか誰にも言えない。

自然言語での説明はあいまいさを残す。数学の言葉で書かれた力学法則を検討しよう。地上の駅にいるあなたの座標系を S と呼び、リンゴの位置座標を (x, y, z)

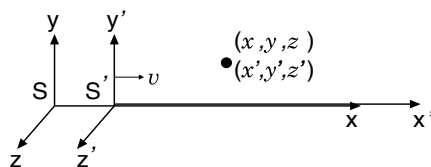


図 8.1: 相対速度 v の2つの慣性系.

と書き、列車の進行方向を x 軸正の方向としよう。一定の速さ v で x 方向に進んでいるわたしの座標系を S' と呼び、リンゴの位置座標を (x', y', z') と書こう。列車があなたのいる駅を通過した

時刻を 0 として、その後の時間 t をあなたとわたしの時刻合わせをした時計で計ろう。 y, z 方向の座標はあなたとわたしで同じだから、 x 方向の座標だけ考えればよい。わたしから見たリングの位置は x' だが、 t 秒後には列車は駅から距離 vt の場所に進んでいるから、あなたから見たリングの位置は $x = x' + vt$ である。あなたを尊重して、わたしの見る座標 (x', y', z') があなたの見る座標 (x, y, z) で表わせると書こう。

$$\text{座標変換} \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (8.1)$$

地上でリングの運動を観察するあなたは、ニュートンの運動方程式 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x$ が成り立っていると主張する。この式の加速度 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ を、変換式 $x = x' + vt$ を使って x' に対する式に書き換えてみよう。時間 t で 1 度微分すると、 $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v$ が得られる。あなたの見るリングの速さ $\frac{dx}{dt}$ は、わたしの見るリングの速さ $\frac{dx'}{dt}$ よりも、リニア・モーターカーの速さの分 v ほど速いということを示している。さらに t で微分すると $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt^2}$ となる。リングの加速度はあなたから見てもわたしからみても等しいということである。したがって、あなたが運動方程式 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x$ を主張すれば、わたしも同一の形の運動方程式 $m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F_x$ が成り立つと主張できる。この関係を逆にしても正しい。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \quad \longleftrightarrow \quad m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F_x. \quad (8.2)$$

2 つの慣性系の間は (8.1) の関係式で結ばれていて、どちらでも同一の形の運動方程式 (8.2) が成立している。つまり、「力学法則はどの慣性系で記述しても同一の形式をもつ」と言うことができる。これをガリレイの相対性原理という。また、(8.1) の座標変換をガリレイ変換と呼ぶ。慣性の法則を見つけたガリレイ

にちなんで名づけられた。すべての慣性系は、互いに相手が自分に対して動いた、と主張できる対等な地位にあるのだ。この意味で、絶対静止の座標系を力学によって選び出すことはできない。ガリレイの相対性原理は、「力学法則はガリレイ変換に対して不変にできている」と言うこともできる。このように「どの座標系でも物理法則は同一の形をしている」という主張を原理として採用するのが、物理学で言う相対性原理である。

ガリレイの相対性原理は力学内では無矛盾であったが、電磁気学が疑問を投げかけた。電磁波の方程式(??), (??) はマクスウェルの方程式が含んでいた。そんな大事な方程式から、どうして基準の座標系から測ってはじめて意味のある速さ c が出てくるのか。その座標系とはどんなものか。光速 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 中の誘電率 ϵ_0 とか透磁率 μ_0 は真空中に固有の値をとるのであってみれば、光速 c の値はどんな座標系から見るかに関係しないのではないか。他方で、あなたが駅で発した光が光速 c で進むとすると、速さ v で駅から遠ざかるわたしには光の速さは v ほど遅くなり、 $c-v$ の速さで見えるのではないか。もしそうなら、光速が c と見えるあなたの座標系は特別な絶対静止の系ということができる。

A.A. マイケルソンと W.M. モーレイがこの問題を実験的に検証した。われわれの地球は公転速度おおよそ 30km/s で太陽のまわりを周回している。これは太陽系に張り渡した座標系 (A と呼ぼう) から見た言い方である。実験をしている間実験装置は、座標系 A に対して速さ $v = 30\text{km/s}$ で直進する座標系 (B と呼ぼう) に固定されていると見なすことができる。光を用いる実験を工夫すれば、その差が観測にかかるのではないか。実験室 (座標系 B) で光源から出た光を分けて、地球の公転の方向とそれに垂直な方向に等距離往復させた後、一緒にして干渉させる。座標系 A

から見て2筋の光の道筋を作図すると、それぞれの光の走った距離が異なることになり、干渉縞を生じるだろう。この装置を90°回転させて、2筋の光がさっきと入れ替わって公転方向に垂直な方向と公転方向とを往復するようにすれば、干渉縞はさっきと違う場所に移動するはずである。これがマイケルソン＝モーレイの実験の概要である。その干渉計は、公転速度30km/sもの速さがあれば、干渉縞の移動を検出するのに十分な精度を持っていた。ところが、干渉縞の移動は観測されなかった。季節が移って公転による地球の進行方向が変化しても同じ結果であった。

実験結果は、光速 c と結びつく特別な(絶対静止の)座標系は見いだせないことを意味した。光に関してもすべての慣性系が対等だということ、光はどの慣性系に対しても光速 c で進むという結論を受け入れなければならないのだろうか。ローレンツは、運動方向に長さが $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍ほど収縮するという考え方をし、慣性系の変換式を出した。しかし、問題は本当の解決を見ないまま時が経過した。力学の殿堂を揺るがすほどの大問題であったことが判明したのは、この実験の18年後のことである。

8.1 特殊相対性理論が明らかにした時空

ローレンツ変換

1905年A. アインシュタインは、上の問題を根本的に解決する特殊相対性理論を発表した。慣性系だけを対象とするので、後の一般相対性理論と区別するために特殊という言葉が付いている。彼は、どの物理法則も相対性原理を満たすべきことを提唱した。そのためにはガリレイ変換(8.1)を放棄すべきこと、したがってニュートンの運動方程式(8.2)も一度見捨てるべきだとした。あ

れほど成功をおさめている力学法則がおかしいというのである。代わりにマクスウェルの方程式こそむしろ相対性原理を満たしていると考えた。そこから出てくる光速 c は普遍定数で、どの慣性系から見ても同一であり、相対性原理に反していないのだ。そうすればマイケルソン＝モーレイの実験結果の説明がつく。光速度不変の原理と呼ばれるものである。特殊相対性原理と光速度不変の原理から出発すると、ガリレイ変換に代わる座標変換の式はどんなものになるだろうか。それを得るのに高等数学は要らないから、それに挑戦することをあなたも望むだろう¹。

図 8.1 のあなたとわたしの慣性系で考えていこう。まず第 1 に、マイケルソン＝モーレイの実験を受け入れると、時間の常識が通用する保証がない。清水の舞台から飛び降りる覚悟で、わたしの時計が示す時間 t' はあなたの時計の示す時間 t と等しくないとしよう。(8.1) の代わりに、わたしの慣性系 S' の時空座標 (t', x', y', z') は、あなたの慣性系 S の時空座標 (t, x, y, z) と別の関数形で結ばれることになる。その表現を簡単にするために、図 8.1 と同じく S' 系の x' 軸は S 系の x 軸上を $+$ 方向に速さ v で進んでいるとする。 S 系と S' 系の原点が一致していた時刻を $t = 0$, $t' = 0$ として、その後の時間 t と t' をそれぞれ計ることにしよう。

時刻 $t = 0$, $t' = 0$ の瞬間に S 系の原点で光を発したら、あなたから見て t 秒後には光は半径 ct の球面に達している。光の到達点の座標は、 $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ という球面の式を満たす。光速度不変の原理から、 S' 系にいるわたしから見ても光は光速 c で進むから、 S' 系でも光は t' 秒後に $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (ct')^2$ の球面に達している。この 2 つの関係式が、 S 系と S' 系の時空座標の変換式の形を限定する。2 つの球面の式には 2 乗の項しか

¹この章は文中に数式が多くなってしまったが、とりあえず了解したつもりで字面を追ってほしい。そうすれば、特殊相対性理論の成果を知ることができる。

現われていない。もし変換式が 2 乗よりも大きい次数の項を含んでいれば、それを 2 乗して 4 乗以上の項が出てしまう。それでは困るから、 (t, x, y, z) を (t', x', y', z') に変換する式は、2 乗以上の項がない 1 次式でなければならない。

あなたの S 系から見て、わたしの S' 系の原点 ($x' = 0$) は、 t 秒後に vt 遠ざかって $x = vt$ の位置にある。この関係が t のどんな値のときにも成り立ち、しかも 1 次式だとすると、 x と x' の変換式は $x' = \alpha(x - vt)$ でなければならない。しかもここで、 $t = 0$ で $x = 0$ の場合、 y と z の座標がどんな値であろうと $x' = 0$ でなければならないから、 $x' = \alpha(x - vt)$ に y や z が現われてはいけない。

ところで、 (y', z') を (y, z) で表わす式に t の項があると、S 系の原点 ($x = y = z = 0$) が、S' 系から見て時間 t とともに $y' \neq 0$, $z' \neq 0$ の位置に動くことになって、S' 系の x' 軸が S 系の x 軸上を進んでいるという想定に反する。また x の項があつて $y'z'$ 平面に x 座標がからんでくるのも奇妙だ。簡単に $y' = y$, $z' = z$ と仮定して先に進もう。

そうすると、S' 系の時空座標は S 系の時空座標と次の関係式で結びつけられる。

$$x' = \alpha(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \beta x + \gamma t.$$

この変換式をわたしの見る光の球面の式 $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (ct')^2$ に代入しよう。整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & (\alpha^2 - c^2\beta^2)x^2 + y^2 + z^2 \\ & = (c^2\gamma^2 - v^2\alpha^2)t^2 + 2(v\alpha^2 + c^2\beta\gamma)xt. \end{aligned}$$

ここに出る (t, x, y, z) は、 $t = 0$ に原点を出発した光の球面の S 系での座標である。それは、 $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ になってい

なければならないから、 x^2 の係数は $\alpha^2 - c^2\beta^2 = 1$ 、 t^2 の係数は $c^2\gamma^2 - v^2\alpha^2 = c^2$ 、 xt の係数は $v\alpha^2 + c^2\beta\gamma = 0$ でなければいけない。3つの条件式は、 $c^2\beta^2 = \alpha^2 - 1$ 、 $c^2\gamma^2 = v^2\alpha^2 + c^2$ 、 $c^4\beta^2\gamma^2 = v^2\alpha^4$ と書ける。前の2つの式を3番目に代入すれば α^2 だけの式になり、それを解けば $\alpha^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$ が求まる。これを使えば、1番目と2番目の式から、 $\beta^2 = (v^2/c^2)/(1 - v^2/c^2)$ と $\gamma^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$ が得られる。求める変換式は、 $(v/c) \rightarrow 0$ の極限でガリレイ変換に一致すべきだとすれば、平方根 α, β, γ の符号も定まる。あなたは成果を手にした。

相対論を満足する慣性系の間の関係式を次のように得た。

ローレンツ変換

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ct - \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x, \\ x' &= -\frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x, \\ y' &= y, \quad z' = z. \end{aligned} \quad (8.3)$$

ここで、時間・空間の順に式を書き、また ct, ct' と表記して位置座標と同じく長さの次元をもつようにした。それで係数には「速さ割る速さ v/c 」だけ現われて、どの係数も無次元になっている。変換式 (8.3) に対してマクスウェルの方程式の形が不変に保たれていることが証明でき、実験もこの関係式を支持する。アインシュタインのこの変換式は時空についてまったく新しい見方を提起したのだが、ローレンツが示していた式と形が同じなのでローレンツ変換と呼ぶのが慣わしだ。ところで、あなたとわたしは互いに相対運動をしていて、わたしから見ればあなたが x' 軸の負の方向へ速さ v で遠ざかっている。あなたの S 系から見た時空座標 (t, x, y, z) をわたしのいる S' 系の (t', x', y', z') で表

わずには、(8.3) 式の左辺の $'$ をなくし、右辺に $'$ を付けて、 v を $-v$ に変えればよい。その式は (8.3) の逆変換である。

ローレンツ変換 (8.3) には次のような条件が付随している。時空座標が現実測定できるものであるためには、係数が複素数になってはならない。それゆえ平方根の中が負になってはいけない。つまり、 $v \leq c$ でなければならない。さらに、 $v = c$ だと、係数 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ が無限大に発散して、時空座標が確定しなくなるので、それもあってはならない。それゆえ $v < c$ 、すなわち慣性系の間の相対速度は光速 c 以上になってはいけないことになる。光子に固定した慣性系はとらないのである。質量が 0 で光速 c で走る素粒子は光子以外には見つかっていず、その他のモノの速さが光速 c よりも小さいことは後で見る。ローレンツ変換はこの点で無矛盾に出来ている。

時間と長さの再考

ローレンツ変換は時空のあり方を規定して、われわれの常識を改めることを要求する。宇宙にただ一つの絶対時間があってどこでも同じように時間が流れるのではなく、時間は空間座標とからまっているのである。あなたとわたしの時計の進み方が違うことになった。なぜガリレイ変換は正しいとされてきたのだろうか。それは、光の速さがとても速くて、地上の出来事で出会う速さはそれに比べれば圧倒的に遅いからであった。(8.3) 式で $v/c = 0$ とすれば (8.1) のガリレイ変換に戻る。つまり、ガリレイ変換は、ローレンツ変換の近似式で、2 つの慣性系の相対速度 v が光速 c に比べてずっと小さい場合に成り立つ。

相対論では、関係のない 2 つの事象が別の場所で起きたとき、その前後関係はどういう慣性系で観察するかによって違う。同時という言葉がわれわれの常識とは異なるのである。時間間隔

も観測する慣性系ごとに違うことになる。あなたの時計が S 系の原点に固定されていて、わたしの時計は S' 系の原点に固定されているとして考えよう。時刻 $t = 0$, $t' = 0$ に 2 つの時計は同じ場所 (原点) にあったとしてそこから時間を計るのであった。わたしにとって τ (タウ) 秒後にも時計は原点 $x' = 0$ にある。そのときあなたの時計では T 秒経ったのであるが、わたしの時計はあなたから見て $x = vT$ の位置に移動している。この関係はローレンツ変換では、 $c\tau = (cT - (v/c)vT)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 、 $x' = (-(v/c)cT + vT)/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0$ と表わされる。最初の式は次の関係を教える。

$$\text{時間間隔の関係} \quad \tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} T. \quad (8.4)$$

あなたから見て、わたしの時計の刻む時間間隔は短い ($\tau < T$)。すなわち、わたしの時計は遅れて見える。逆の計算をしてみると、わたしから見てあなたの時計が遅れる。観測者に対して運動している時計は遅れて見えるのである。

自身が静止している座標系で測定する時間をそのモノの固有時間という。速さが光速 c に近いようなモノの運動を観察するとき、観測する時間は固有時間と異なる。素粒子の寿命という場合、固有時間で話であって、実験室系から見た寿命はそれよりも長い。実際に宇宙線として地球に降りそそぐ素粒子や、加速器の中を高速で走る素粒子では、その差は大きい。改めて、微小な時間を考えて、運動しているモノに固定した座標系の固有時間 ($d\tau$) を、モノが速さ v で動いていると見る座標系での時間 (dt) で表現しよう。

$$\text{固有時間} \quad d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt. \quad (8.5)$$

こうすれば、あなたの座標系から見てモノの速さが刻々と変化

している場合にも、この関係式を適用できる。S系で0秒から t 秒まで経過する間に、そのモノにとって経過した固有時間 τ は、(8.5)を足し上げて計算すればよい。そのやり方で、双子の一人が地球にいて他方が宇宙旅行をして帰還した場合に、宇宙旅行の初めと終わりに加速度運動をしたとしても時間を比べることができて、宇宙旅行をしてきた方がより若いという結論が得られる。

今度は物体の長さを考えてみよう。S'系にいるわたしに対して静止している物体の長さを測るとする。S系にいるあなたがわたしの列車の長さを測るには、同時刻に両端の位置座標 x_1, x_2 を測定すればよい。あなたは $l = x_2 - x_1$ として長さを求める。2つの時空座標 $(t, x_1), (t, x_2)$ は、S'系では $(t'_1, x'_1), (t'_2, x'_2)$ に対応する。しかしS'系にいるわたしには、時刻が変わっても位置座標 x'_1, x'_2 は変化しないから、列車の長さは $l_0 = x'_2 - x'_1$ と求めればよい。このことをローレンツ変換に当てはめれば、 $l_0 = l / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ という関係が得られる。自身が静止している座標系での物体の長さ l_0 を固有長という。逆に物体が速さ v で運動していると見る慣性系から見ると、長さが次の関係で短縮して見える。

$$\text{ローレンツ収縮} \quad l = \sqrt{1 - v^2/c^2} l_0. \quad (8.6)$$

運動している物体は運動方向に短縮して観測されるのである。

速度の合成則

列車にいるわたしが列車に対して速度 (u'_x, u'_y, u'_z) でリンゴを投げたら、あなたの見るリンゴの速度 (u_x, u_y, u_z) はどうなるだろうか。ローレンツ変換(8.3)の逆変換 — 左辺と右辺で'を入れ替えて、速さ v を $-v$ にしたもの — で、時空座標の微小変化

のあいだの関係を書いてみよう。

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz',$$

$$dt = \frac{dt' + (v/c^2) dx'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

これから $u_x = dx/dt$ を計算するのであるが、おおざっぱに割り算の計算をしよう。 $dx/dt = (dx' + v dt')/(dt' + (v/c^2) dx')$ というふうに。ここで右辺の分母と分子をそれぞれ dt' で割り算すれば、 $dx/dt = (dx'/dt' + v)/(1 + (v/c^2) dx'/dt')$ を得る。同様に dy/dt , dz/dt を計算すれば、次のような速度の合成則を得る。

$$\text{速度の合成則} \quad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + v u'_x/c^2},$$

$$u_y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v u'_x/c^2} u'_y, \quad u_z = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v u'_x/c^2} u'_z. \quad (8.7)$$

この式をよく見ると、慣性系の相対速度 v が光速 c に比べて小さければ、 $u_x = u'_x + v$, $u_y = u'_y$, $u_z = u'_z$ となってわれわれの常識に一致し、あなたから見たリンゴの速さ u_x は、列車の速さ v にその列車に対するリンゴの速さ u'_x を足したものになっている。つまりガリレイ変換 (8.1) による速度の合成則になっている。そして $u'_x = c$ だと $u_x = c$ となるようにできている。 S' 系で光速で走るモノは、 S 系からも見ても光速で走っていることになる。光速度不変の原理だ。さらにこの速度の合成則は、 v や u'_x が光速よりも小さければ、 $u_x = (u'_x + v)/(1 + v u'_x/c^2) < c$ であることを保証し、いくら速度を合成しても u_x が光速 c を超えることはないと言っている。ただ (8.7) 式は、2つの慣性系が $x(x')$ 方向に相対運動しているせいで、モノの y 方向と z 方向の速さ

も慣性系ごとにちがって見えることを示す。それは、慣性系ごとに時間の進み方がちがうからだ。

8.2 相対論的力学

力学が暗黙の前提としていたガリレイ変換が修正されたのだから、力学法則もローレンツ変換に対して不変な形に、つまり特殊相対性原理を満たすように修正されなければならない。

ミンコフスキー空間

相対論が発見されて以来、4次元時空という言葉が普通に使われるようになった。それは、H. ミンコフスキーの提唱したミンコフスキー空間と呼ばれるものである。その表現をとると相対論的力学の見通しがよくなるので、その形式で考えていこう。時空は4つの座標 (ct, x, y, z) で記述され、出来事(事象)はこの時空の1点で起きる。その点を世界点と呼べば、モノの運動のような出来事の時間的経過は、世界点がミンコフスキー空間でたどる世界線によって表現される。ミンコフスキー空間で、原点とある世界点との“距離” s を次のように定義する。

$$(\text{世界長さ})^2 \quad s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (8.8)$$

このように定義された距離 s を世界長さと呼ぶ。この式では、 $(ct)^2$ の前に - 記号が付いているから、ユークリッド空間において3平方の定理で定義される常識的な距離とは違う。世界長さは $s^2 < 0$ となることもあるのだ。4次元時空は奇妙なものというイメージが定着しているけれども、モノゴトが不定になってヒトの理解を超えることがわれわれの世界に起きるのではない。

(8.8) 式があなたのいる S 系で書かれているとすれば、わたしのいる S' 系での世界長さ s' の2乗は、 (ct', x', y', z') で置き換えた式になる。その式にローレンツ変換 (8.3) を代入してみると元の (8.8) 式に戻ることが確認できる。

$$\text{世界長さの不変性} \quad (s')^2 = (s)^2. \quad (8.9)$$

世界長さは慣性系によらない不変な量であることが分かる。ユークリッド空間で、原点からある点までの距離 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ が、原点を中心とする座標軸の回転によっても不変である—ということに対応する。ローレンツ変換は、ミンコフスキー空間での原点のまわりの4つの座標軸の回転なのだ。その回転で世界長さや世界点間隔は不変に保たれる。 $s^2 = 0$ の場合には、(8.8) 式は光の到達する球面の式を表わし、別の慣性系でも同じ光速 c の球面の式になる、つまり光速度が不変であることを意味する。

モノを質点として扱い、質点が慣性系 S に対して速さ v で動いていて、質点に固定した慣性系を S' とすれば、今までと同じ2つの慣性系を考えていることになる。 S 系で微小時間 dt のあいだに質点の空間座標が (dx, dy, dz) ほど変化したとしよう。この間の世界間隔の2乗 $(ds)^2$ は、 $(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ である。 S' 系でも世界間隔の2乗 $(ds')^2$ は、「 $'$ 」を付けただけの同形になる。ところが、 S' 系から見れば質点は動かない、すなわち $dx' = dy' = dz' = 0$ である。そして、質点と一緒に動いている S' 系で計る時間 dt' は、固有時間 $d\tau$ に等しい。したがって、ローレンツ変換に対して不変である世界間隔の2乗は、 $(ds)^2 = (ds')^2 = -(cd\tau)^2$ と書ける。この関係式は、先に定義した固有時間が不変量であることを示している。ここで、速さ v で微小時間 dt の間に移動する距離の関係式 $(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (vdt)^2$ を使えば、 dt と固有時間 $d\tau$ との比率が、 $dt/d\tau = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

であることが確認できる。(8.5) で見た関係にほかならない。不変量である固有時間 $d\tau$ を用いて、諸量をミンコフスキー空間の 4 元量として表わす方法が、以下に見るように有効である。

最初に、ミンコフスキー空間での 4 元速度 u を定義してみよう。時空座標 (ct, x, y, z) に対応する 4 つの速度成分 (u^0, u_x, u_y, u_z) を次のように決める。

$$4 \text{ 元速度 } u^0 = \frac{d(ct)}{d\tau}, \quad u_x = \frac{dx}{d\tau}, \quad u_y = \frac{dy}{d\tau}, \quad u_z = \frac{dz}{d\tau}. \quad (8.10)$$

ここでは固有時間 $d\tau$ で速度を考えていることに注意しよう。4 元速度の 2 乗を計算すると、 $(u)^2 = -(cdt/d\tau)^2 + (dx/d\tau)^2 + (dy/d\tau)^2 + (dz/d\tau)^2 = (ds)^2/(d\tau)^2$ となる。ところが、 $(ds)^2 = -(cd\tau)^2$ だったから、 $(u)^2 = -c^2$ と書けることになる。こうして、4 元速度の 2 乗 $(u)^2$ はローレンツ変換に対して不変になっていることが分かる。

4 元運動量とエネルギー

ローレンツ変換に対して不変な大きさをもつ 4 元速度が得られたので、ニュートン力学と類似に、考えているモノの質量 m を掛けて 4 元運動量を定義することができる。

$$4 \text{ 元運動量 } p = mu \quad (p^0 = mu^0, \quad p_x = mu_x, \dots). \quad (8.11)$$

4 元運動量の中身を検討してみよう。 x 方向には $p_x = m dx/d\tau$ である。ここで $dt/d\tau = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ という関係を使えば、 $p_x = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = m \frac{dx}{dt} / \sqrt{1-v^2/c^2}$ となる。すなわち、 p_x が S 系で見たときの x 方向の速さ dx/dt で書けた。 y 方向と z 方向についても同様である。整理すると次のように書ける。

$$p_x = m(v) \frac{dx}{dt}, \quad p_y = m(v) \frac{dy}{dt}, \quad p_z = m(v) \frac{dz}{dt}, \quad (8.12)$$

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (8.13)$$

こう書けば、この運動量は、ニュートン力学の運動量と同じ形をしている。S系で観測して、速さ dx/dt の係数 $m(v)$ はニュートン力学の質量に当たるが、速さ v に依存して $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 倍大くなる点が違う。モノと一緒に動く慣性系では $m(v=0) = m$ となる。この質量 m が、そのモノの固有の質量 (固有質量) である。静止系で見た質量という意味で静止質量とも呼ばれる。

今度は残る $p^0 = mu^0$ を検討しよう。 u^0 の定義式 (8.10) にある $dt/d\tau$ は $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ だったから、 $p^0 = mc/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ と書ける。これに光速 c を掛けると、 cp^0 の次元は [質量 \times (長さ)²/(時間)²] である。つまり何かエネルギーを意味する量である。ここで、変数 x が小さい場合には $(1-x)^a = 1 - ax + \dots$ と展開できるという数学公式を使えば、 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}v^2/c^2 + \dots$ と書けることを利用しよう。すると cp^0 は、

$$cp^0 = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots, \quad (8.14)$$

のように書ける。モノの速さ v が光速 c に比べて小さければ、「 \dots 」で表わした項は、 v^2/c^2 よりもさらに小さいので無視できる。第1項 mc^2 は定まった値で、第2項 $\frac{1}{2}mv^2$ はニュートン力学の運動エネルギーに当たる。ところが、エネルギーという量はいつもどこかを基準にして測る量で、運動エネルギーとはモノが静止しているときに比べて余分にもつエネルギーのことであった。だから、(8.14) の cp^0 という量は、エネルギーを表わしていて、その基準値を mc^2 としなさいと提案している。アインシュタインはそれを素直にあるいは大胆に受け入れた。 cp^0 をモノの

もつエネルギーだとするのである。改めて E と書こう。

$$\text{エネルギー} \quad E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (8.15)$$

こうしてわれわれは、有名な $E = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ というエネルギーの式にたどり着いた。

これを受け入れると、 $v=0$ でモノが静止しているときも mc^2 のエネルギーをもつという思いがけない結論に至る。この静止しているモノのもつエネルギーを静止エネルギーという。静止エネルギーを E_0 と表わせば、質量 m との間に $E_0 = mc^2$ という関係がある。観測事実はこの考え方が正しいことを告げる。原理上、氷が水になると融解熱分だけ質量が増えるのだし、炭素が燃えて二酸化炭素になるとき発熱すれば、合計質量は減るのである。ただ質量に掛っている $c^2 = (3 \times 10^8)^2$ はとても大きいので、化学反応での質量変化は観測にかからないくらい小さい。だから、化学では質量が変化したと考える必要はなく、状態のエネルギーの大小や発熱・吸熱の量だけを問題にすればよい。ところが原子核や素粒子の反応では、モノのエネルギー変化は、質量の変化として観測にかかるほど大きくなる。太陽の中で起きている核融合反応では、質量としてモノに秘められていたエネルギーが、生成核の運動エネルギーとして解放されるのである。

4元運動量 p を4元速度 u に質量 m を掛けたものとして定義した。その2乗 p^2 は $m^2 u^2$ であり、 $u^2 = -c^2$ であったから、 $p^2 = -m^2 c^2$ ということになる。4元運動量もローレンツ変換に対して不変な形をしているのだ。 p^2 に c^2 を掛けると $(cp)^2 = -(cp^0)^2 + c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = -m^2 c^4$ という関係式が得られる。ここで $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ は3次元空間での運動量の2乗 p^2 のことだから、書き換えれば $-(cp^0)^2 + c^2 p^2 = -m^2 c^4$ となる。さら

に、 cp^0 はエネルギー E なのだから、 $E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$ となつて、エネルギー E を運動量の大きさ p を用いて書き表わすことができる。

$$\text{エネルギー } E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2} \quad (p \text{ は運動量}). \quad (8.16)$$

この式は、光についておもしろいことを教えてくれる。光子を素粒子の一員にすると、質量 $m = 0$ の光子のエネルギー E は $E = pc$ となる。すると、運動量の大きさ p は、 $p = E/c$ と書けることになる。質量 0 の光子についても運動量が定義できるのである。改めて書けば、

$$\text{光のエネルギーと運動量の関係 } E = pc \quad (p = E/c). \quad (8.17)$$

ところで電磁波である光子のエネルギーは $h\nu$ であったから、光子の運動量は $p = h\nu/c$ とも表わせることになる。運動量は波動としての振動数 ν に比例するのである。振動数 ν の大きい光子は大きな運動量で他のモノにぶつかることになる。実際このことは、光が電子をはじきとばすコンプトン散乱という現象で観測される。さて、第3章でフェルマーの原理と最小作用の原理の類似性を話したとき、「光の運動量は光速 c の逆数に対応する」ことにふれたが、その関係が上で示された。この関係を用いれば、フェルマーの原理は最小作用の原理に含ませることができて、光をモノに含める見方を後押しする。

相対論的運動方程式

いよいよニュートンの運動方程式がどのように修正されるべきかを考えよう。4元運動量 p を定義したから枠はすでに出来ている。最初に外力が働かない簡単な場合で見通しを得よう。外力な

しに自由に動いているモノに対する運動方程式は、次のように書けるだろう。

$$\text{外力のない運動方程式} \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 0 \quad \left(\frac{dp^i}{d\tau} = 0 \right). \quad (8.18)$$

ここで 4 元運動量の 4 成分 p^i は、 (p^0, p_x, p_y, p_z) を表わしている。4 元運動量と固有時間とは共にローレンツ変換の不変量であるから、その変化率 $d\mathbf{p}/d\tau$ もローレンツ変換に対して不変量で、(8.18) は特殊相対性原理を満足する運動方程式と言える。

右辺の外力が 0 だから、4 元運動量 $\mathbf{p} = (p^0, p_x, p_y, p_z)$ は固有時間が経過しても変化しないことになる。つまり、外力が働かなければ 4 元運動量は保存する。中身を見ると、 (x, y, z) 方向の運動量 (p_x, p_y, p_z) が保存し、かつ時間軸成分 p^0 が保存するということである。後者は $cp^0 = E$ すなわちエネルギーが保存することを言っている。エネルギーと運動量はミンコフスキー空間での 4 元運動量として一体のものであり、エネルギーが時間に、運動量が 3 次元空間に関係する物理量なのである。エネルギー保存則と運動量保存則が一連のものとしてあるのだ。相対性理論は、エネルギーと運動量を統一的に見ることを可能にした。

外力がある場合は、(8.18) 式の右辺に外力を加えればよいだろう。もちろん外力は、ミンコフスキー空間での 4 元ベクトルとして表わされなければならないけれども。その式を書こう。

$$\text{運動方程式} \quad \frac{dp^i}{d\tau} = f^i. \quad (8.19)$$

この式は、4 元運動量の固有時間についての変化率 $d\mathbf{p}/d\tau$ が力である、という 4 元力の定義式の働きをする。個々の問題で、4 元力 f^i がどの慣性系でも同じとなるように書けるかどうかの問題となる。たとえば荷電粒子の運動を考える場合には、電場が存

在すれば慣性系の運動によって磁場が顔を出すようになる。それを、力が4元ベクトルで書かれ、ローレンツ変換に対して不変な形になるようにしなければならない。現在、重力を例外として、知られている力は4元ベクトルに書かれるようになった。

運動方程式 (8.19) を、モノが速度 v で運動していると見る S 系での時間で表現してみよう。 $dt/d\tau = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ の関係を使えば、 x 方向について $dp_x/dt = \sqrt{1-v^2/c^2} f_x$ となる。 $\sqrt{1-v^2/c^2} f_x$ を F_x と書き換えれば、 $dp_x/dt = F_x$ である。 y, z 方向についても同様の式になる。これは、あなたのいる S 系で見たモノの運動を記述していて、ニュートンの運動方程式と同じ形をしている。ところが (8.12) 式から、運動量は $p_x = m(v)dx/dt$ と表わせるが、 S 系で見た質量に当たる $m(v) = m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ が固有質量 m とちがう。注目しているモノに力が働いて速さ v がしだいに大きくなると、 $m(v)$ もだんだん大きくなり、どんどん加速されにくくなる。 $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ の形は、あなたから見たモノの速さが光速 c に達したり、それを超えることはないと宣言している。誰かほかの人から見るとあなたが光速 c に近い速さで遠ざかっているとしても、速度の合成則 (8.7) からして、その人が見るモノの速さも決して光速 c を超えることはない。この世界でモノの最高の速度は光速 c ということになる。

マクスウェルの方程式がローレンツ変換に対して不変であることは、一見ただけでは分からない。それがより明瞭になる記述の仕方を共変形式と呼ぶ。物理法則を、ローレンツ変換と歩調を合わせて変換されるような形式に表現するのである。上で考えた力学の式はそうになっていた。残念なことに、マクスウェルの方程式がニュートンの運動方程式よりも複雑であったように、共変形式の電磁場方程式は (8.19) の運動方程式ほど単純でない。

それを鑑賞するには習熟が必要である。ここでは省略しよう。

モノの運動は、以上見てきた相対論的力学に基づいて理解しなければならないことになった。ニュートンの力学は、慣性系の速さやモノの速さが光速 c よりもずっと小さい場合に近似的に成り立つものへと後退した。しかしニュートン力学は、多くの現象に適用できる十分精度のよい現役の法則である。ほとんどあらゆる日常生活上の力学的問題はニュートン力学で考えてよい。相対論がぜひとも必要なのは、宇宙と素粒子を論じるときである。ただし、微視的世界では別の問題が発生して、ニュートン力学を放棄しなければならない。それは次章で見よう。

8.3 一般相対性理論へのはしがき

電気力は電荷に対して働く。電荷が 0 の素粒子には電気力は働かない。これに対して重力は万有引力と呼ばれるように、電荷その他の指標が何であろうと働く。ところで相対論では $E = mc^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ であって、質量はエネルギーにほかならない。重力はエネルギーに対して働くのである。実はその重力を含む力学を、ローレンツ変換に関する共変形式に書くことができない。それは、特殊相対性理論の限界を示している。もともと特殊相対性理論は、加速度運動する座標系を含めないという限界をもっていた。本来相対性原理を真理とするならば、あなたとわたしが加速度運動していようがいまいが、どんな座標系にいても、あなたとわたしにすべての物理法則が同じ形式に書かれるべきではないか。アインシュタインはさらなる一步を踏み出して、一般相対性理論へと進んだ。物理法則は、一般の座標変換に対して不変になっている、言い換えれば、一般の座標変換に対して共変な形式

に書けるのでなければならない。

一般相対性理論が重力をどのように処理するのか見ておこう。わたしが綱の切れたエレベーターに乗っていて、わたしの手から離れたリングもわたしと一緒に落ちているとしよう。これは自由落下と呼ばれる運動で、ニュートン力学で単純化して記述すると、重力加速度 g の等加速度運動である。落下方向に x 軸をとると、あなたから見て運動方程式は $d^2x/dt^2 = g$ である。一方わたしの座標系から見ると、リングはその位置座標 x' を変えない。ニュートン力学の表現で $d^2x'/dt^2 = d^2x/dt^2 - g = 0$ となる。リングに他の力が働かなければ、リングは速度を変えないと見える。すると、わたしの座標系は慣性の法則を満たす慣性系だと主張できるのではないか。重力が存在する場合もこのような座標系にすることができる — という考え方を等価原理という。ただしこの議論は、運動方程式に出てくる左辺の慣性質量と右辺の重力質量が等しい場合にだけ成り立つ。つまり等価原理は、慣性質量と重力質量が等しいとすることでもある。39 ページでふれたのはこの問題であった。

さてわたしが落下中のエレベーターの中にいてリングも一緒に落ちているというのは、現実には束の間のことで、たとえ話にすぎない。そうでなければわたしも困る。現実の宇宙 — 中国語の元の字義では空間と時間だから、つまり時空 — は、大きさが一定の重力が働く場ではない。等価原理を根拠に、運動方程式の右辺に重力が現われないような座標系を、広い宇宙にわたって定義することはできない。しかし、宇宙の局所ごとにそのような座標系を設定することはできるだろう。それを局所慣性系と呼ぶ。

アインシュタインは、この考えを推し進めて一般相対性理論を建設した。その依拠した数学的手法をリーマン幾何学という。

世に言う曲った空間の幾何学である。重力を含めて一般相対性原理が成り立つとするなら、われわれの空間は曲った空間でなければならない。残念ながら、その高度な数学的記述を物語るのは、わたしには荷が重すぎる。これ以上の話は他の書物に譲ることにする。時空の問題が宇宙の問題になることは推量してもらえただろう。一般相対性理論は宇宙論へとつながるのだ。あなたが関心を抱いているに違いない宇宙論、古くからヒトの世界観に重要な位置をしめてきた宇宙論を、この本は語らないことになる。

モノとコトの世界の歴史と現在

それにしても宇宙の在り方は、われわれの考えているモノとコトの世界の基本的な条件を決定しているわけだから、一言もふれずに済ますことはできないだろう。現代の宇宙論が語ることを聴こう。

次章で垣間見る量子力学は、真空というのは本当に何も無い場ではなく、陽子や中性子や電子などの素粒子とその反粒子との対の生成を試みてはまた消滅することを繰り返す、揺らいだ状態にあるとする。真空はエネルギー最低の状態なので、現実には粒子と反粒子を顕在させることができないだけなのだ。このモノゴトを秘めた真空が相転移を起こしてよりエネルギーの低い状態に変化し、その結果顕在化した素粒子が質量をもつモノとそうでないモノに分岐を起こして、モノとコトの世界が展開を始めたのではないか。そのような相転移が、宇宙の生まれた超高温の瞬間に、想像することが困難なほど短い時間のうちに段階的に起きて、現在知られている4つの力で相互作用する素粒子に分岐したのではないか、—とするのが現代の標準的な理解である。

素粒子実験は、「鏡像と入れ替える操作に関して、あるいはそれに電荷 $+$ - の入れ替えを追加した操作に関して、素粒子のふるまいが対称的でない」ことを教える。そして今では、素粒子が内部構造をもつことが知られており、クォークと呼ばれる構成粒子の理論は、宇宙創世のとき粒子と反粒子が同数生まれたとしても、この対称性の破れによって、陽子や中性子などの強い相互作用をする素粒子が、その反粒子よりもよけいに残存することを予言する。それが、われわれの宇宙が反物質でない物質によって構成されている理由であろう。

相転移の身近な例として、第2章で話した水が氷に変わる変化がある。水を静かに冷やすと、摂氏0度よりも低い温度になってもしばらく凍らない。その過冷却の状態は、実際に水が氷になり始めるまでしばらく続く。液体から固体に変わると、全融解熱に相当するポテンシャル・エネルギーを減らすことになる。初期宇宙の相転移の場合にも、水の例のような過冷却の時期には、真空のエネルギーは相転移後の真空のエネルギーに比べて高いままである。その落差分ほどのエネルギーが、一般相対性理論の重力場についての方程式で斥力の働きをして、宇宙空間を指数関数的に急激に膨張させることになる。急膨張は相転移が完了するまでの短時間続き、宇宙のビッグバンを引き起こす。相転移で解放されたエネルギーは、新しい状態に存在する素粒子の運動エネルギーになって、「火の玉」のようになった宇宙が膨張を続けることになる。宇宙が膨張を続けるとき物質密度の揺らぎがあれば、それは膨張した宇宙に持ち越され、銀河団や銀河系とそれらのほとんどない空間をつくるであろう。

膨張は運動エネルギー密度の減少でもある。つまり温度の低下ということになる。宇宙最初期には、光があふれ、陽子や中性

子や電子などの素粒子は激しく運動していたのだが、その運動エネルギーが小さくなると、陽子や中性子や電子などは互いの引力で結合するようになる。最初に、陽子と中性子が結合してヘリウムあたりまでの軽い原子核を形成し、原子核反応が終息するほど温度が下がるのに 30 分ぐらいかかる。その温度よりも低くなれば、形成された水素やヘリウムなどの原子核はもう壊されない。さらに時が経過すると、宇宙は十分冷えて、電子が原子核にとらえられて水素やヘリウムの原子になってしまう。すると光は、激しく飛び回っていた荷電粒子に散乱されることがなくなり、まっすぐに進めるようになる。宇宙が晴れあがって向こうが見えるようになるのだ。宇宙の晴れあがりまでにおよそ 38 万年かかったと推定されている。この時期の熱放射が宇宙が冷えた現在も残っているであろうと考えられ、実際に宇宙の背景放射の電磁波として観測された。観測された背景放射は方向に偏りがなく、絶対温度 2.7 度の電磁波の放射の式によく一致することが確かめられた。ビッグバン宇宙論の証拠と考えられている。

太陽や地球が形成されるにはもう少しの物語が必要であった。銀河系の物質の密度の高い所では、物質のかけらの渦流から太陽系が形成される。中心部は特に質量が集中して恒星が生まれる。水素のような軽いモノも逃げ出さず極度の集中が生じて高温になれば、原子核融合反応が始まり、質量として秘められていたエネルギーが解放されてさらに高温になる。その炉の中で、軽い原子核がさらに融合してより重い鉄ぐらいまでの原子核がそこで形成されたであろう。太陽の外側でも物質の集中が起きるが、原子核融合反応を引き起こすこともなく自らは光らない惑星が生まれ、その中に地球のような物理的条件をもつものもあった。恒星の中にも種類があって、その質量の大小によって、内部にた

まるエネルギーがそれほど大きくなってゆるやかに膨張し収縮するおだやかな星や、たまるエネルギーがあまりに大きく緩やかな変化をたどれなくて、ある段階で超新星爆発を起こすものもある。鉄よりも重い原子核は、超新星爆発の際に形成されると考えられている。ところが地球にはそのような重い元素まで見つまっているから、地球が形成される前に、何度か大きな恒星が一生を終えるほどの時が流れたのであろう。

地球の形成期にも、物質が激しくぶつかりながら集まったはずだから、高温であったにちがいない。その熱は低温の宇宙に放たれて冷えていったと考えられる。しだいに、原子の集合体や分子は安定した物質の存在形態となり、第2章でスケッチした地上での物質の多様な在り方が許されるだろう。そして、海と大地と大気が生まれ、生命が誕生した。太陽の光は大気圏と海と大地に降り注ぎ、光合成を始めた植物が大気中に酸素分子を遊離させて、生態圏が形成された。降り注ぐ太陽の光のエネルギーが生物を生かす一方、物質の構造をつくりだす生命活動はエントロピーを増大させる。地球の熱放射がそれを冷たい宇宙に引き取ってもらって、この生態系は循環する。つけ足せば地球内部では、放射性元素の原子核変換によって、質量のエネルギーの一部がゆっくりと解放されるので高温の状態が続き、物質は流動状態にあって大陸の移動が続いている。ここに人は、他の生き物と一蓮托生の生を許されている。

137億年の宇宙史をたった4ページ足らずで語るとするのは無鉄砲なことであった。それでもこれまで話してきた物語につながるだろうか。残っているのは、原子がどのようにして比較的安定に存在できるか、さらに地上での出来事を支えているかという話である。