公式 $r\,{}_nC_r = n\,{}_{n-1}C_{r-1}$ と二項分布の平均と分散の計算

(0) 公式 $r\,{}_nC_r = n\,{}_{n-1}C_{r-1}$ の証明

$\frac{r}{n}\,{}_nC_r = \frac{r}{n}\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = {}_{n-1}C_{r-1}$ よって成り立つ。

(1) 二項分布 $B(n, p)$ の平均 $E(X)$ について

$E(X) = \sum_{r=0}^{n} r\,{}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} n\,{}_{n-1}C_{r-1}\,p^r(1-p)^{n-r} = n\sum_{r=0}^{n} {}_{n-1}C_{r-1}\,p^r(1-p)^{n-r}$

$= \; np\sum_{r=0}^{n} {}_{n-1}C_{r-1}\,p^{r-1}(1-p)^{n-r} = np\{p+(1-p)\}^{n-1} = np$ （終）

(2) 二項分布 $B(n, p)$ の分散 $V(X)$ について

ここで $E(X^2) = \sum_{r=0}^{n} r^2\,{}_nC_r\,p^r q^{n-r}$ （ただし $p+q=1$ ）である。

ここで公式を変形して、 $r\,{}_nC_r = n\,{}_{n-1}C_{r-1}$ から $(r-1)\,{}_{n-1}C_{r-1} = (n-1)\,{}_{n-2}C_{r-2}$ であるから

$r^2\,{}_nC_r = r\cdot r\,{}_nC_r = r\cdot n\,{}_{n-1}C_{r-1} = nr\,{}_{n-1}C_{r-1} = n\{(r-1)+1\}\,{}_{n-1}C_{r-1}$

$= \; n\{(r-1)\,{}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r-1}\} = n\{(n-1)\,{}_{n-2}C_{r-2} + {}_{n-1}C_{r-1}\}$

$= \; n(n-1)\,{}_{n-2}C_{r-2} + n\,{}_{n-1}C_{r-1}$

ゆえに $r^2\,{}_nC_r\,p^r q^{n-r} = n(n-1)\,{}_{n-2}C_{r-2}\,p^r q^{n-r} + n\,{}_{n-1}C_{r-1}\,p^r q^{n-r}$

$= \; n(n-1)p^2\,{}_{n-2}C_{r-2}\,p^{r-2}q^{n-r} + np\,{}_{n-1}C_{r-1}\,p^{r-1}q^{n-r}$

よって $E(X^2) = \sum_{r=0}^{n} r^2\,{}_nC_r\,p^r q^{n-r}$

$= \; n(n-1)p^2\sum_{r=2}^{n} {}_{n-2}C_{r-2}\,p^{r-2}q^{n-r} + np\sum_{r=1}^{n} {}_{n-1}C_{r-1}\,p^{r-1}q^{n-r}$

$= \; n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1}$

$= \; n(n-1)p^2 + np$

これから

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

$= \; n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$= \; npq$ （終）