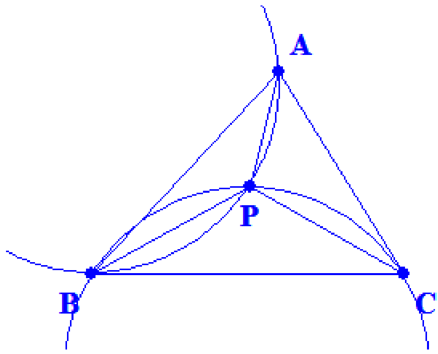
ブロカール（Brocard）点

⊿ABC において、　$PAB = \quad PBC = \quad PCA = \alpha$　を満たす点 P を第 1 ブロカール点といい、
$QAC = \quad QCB = \quad QBA = \beta$　を満たす点 Q を第 2 ブロカール点という。

まず、このようなブロカール点の存在と唯一性を証明する。
（証明）【存在性】⊿ABC において、次の 2 つの円　C_1, C_2　を考える。

C_1:　2 点 A,B を通り、B において直線 BC に接する円

C_2:　2 点 B,C を通り、C において直線 CA に接する円



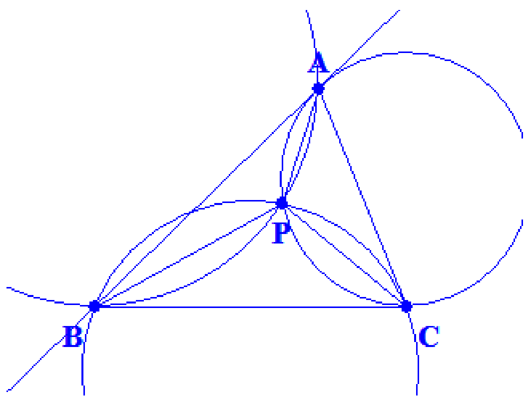
このとき円　C_1　と　C_2　の交点 P は第 1 ブロカール点の条件を満たしている。
なぜなら　C_1　において接弦定理により、　$PAB = \quad PBC$　･･･①

C_2　において接弦定理により、　$PCA = \quad PBC$　･･･②

①②より、　$PAB = \quad PBC = \quad PCA$　となるからである。
【唯一性】点 X が　$XAB = \quad XBC = \quad XCA$　を満たす点であるとする。このとき X は P と一致することを示す。
$XAB = \quad XBC$　であるから、接弦定理の逆により、点 X は 2 点 A,B を通り、B において BC に接する円の円周上にある。
また、　$XBC = \quad XCA$　であるから、接弦定理の逆により、点 X は 2 点 B,C を通り、C において CA に接する円の円周上にある。
ゆえに点 X はこの 2 つの円の交点であるが、この交点は先ほど存在を示した点 P に他ならない。（終）

【系】⊿ABC において、　C_1, C_2, C_3　は第 1 ブロカール点 P で交わる。

（証明）　$PAB = \quad PCA$　と接弦定理の逆により、P は 2 点 B,C を通り、A において直線 AB に接する円の円周上にある。よって成り立つ。（終）



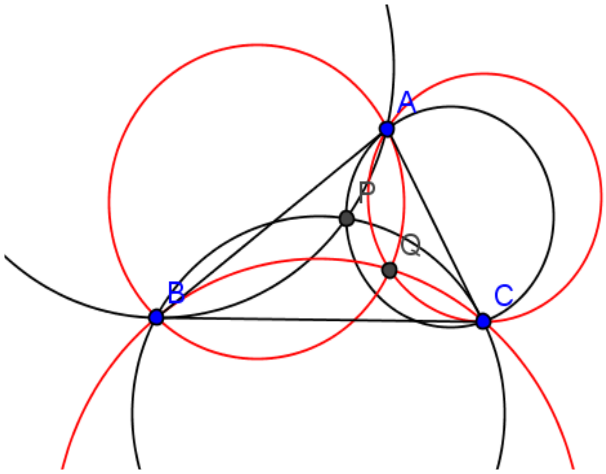
同様にして、第 2 ブロカール点 Q は　$QAC = \quad QCB = \quad QBA$　を満たす唯一の点であり、

C_1'： 2 点 A,B を通り、A において直線 AC に接する円

C_2'： 2 点 B,C を通り、B において直線 AB に接する円

C_3'： 2 点 A,C を通り、C において直線 BC に接する円

もまた 1 点 Q で交わる。



【定理1】

第 1 ブロカール点と第 2 ブロカール点は互いに等角共役点である。

(証明)

第 1 ブロカール点 P の等角共役点を R とする。

このとき、 $\alpha = \quad PAB = \quad RAC$

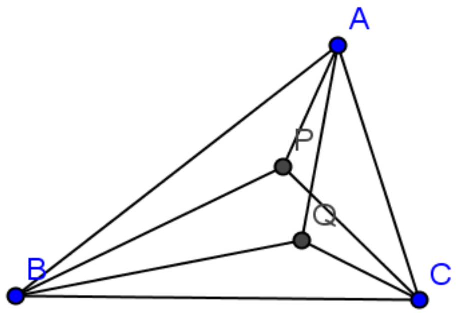
$\alpha = \quad PBC = \quad RBA$

$\alpha = \quad PCA = \quad RCB$

ゆえに　$RAC = \quad RBA = \quad RCB = \alpha$

であるから R は第 2 ブロカール点である。

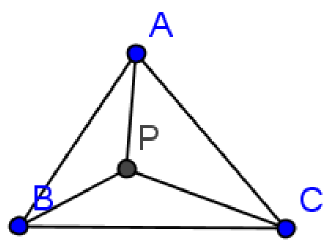
(ブロカール点の唯一性) (終)



定理2により、次のことが成り立つ。

【定理3】

$\alpha = \beta$　である。(この角をブロカール角といい、ω で表す。)



ブロカール点の重心座標を求める。第 1 ブロカール点の重心座標を求めれば、第 2 ブロカール点は等角共役点の関係から求めることができる。

第 1 ブロカール点の重心座標は

$(\quad PBC, \quad PCA, \quad PAB)$　である。

よってこれらの三角形の面積を計算する。

⊿PBC において正弦定理より、 $\dfrac{a}{\sin \quad BPC} = \dfrac{CP}{\sin\omega}$

ここで　$\sin \quad BPC = \sin(180° - \omega - \quad PCB) = \sin(180° - \omega - (C - \omega)) = \sin C$　・・・③であるから

$\dfrac{a}{\sin C} = \dfrac{CP}{\sin\omega}$　よって、 $CP = \dfrac{a\sin\omega}{\sin C}$

同様にして、 $AP = \dfrac{b\sin\omega}{\sin A}$　, $BP = \dfrac{c\sin\omega}{\sin B}$　となる。

これより、　$PBC=\frac{1}{2}BP\cdot a\sin\omega=\frac{1}{2}\frac{ca\sin^2\omega}{\sin B}$

$$PCA=\frac{1}{2}CP\cdot b\sin\omega=\frac{1}{2}\frac{ab\sin^2\omega}{\sin C}$$

$$PAB=\frac{1}{2}AP\cdot c\sin\omega=\frac{1}{2}\frac{bc\sin^2\omega}{\sin A}$$

であるから、

$$(\quad PBC,\quad PCA,\quad PAB)=\left(\frac{ca}{\sin B},\frac{ab}{\sin C},\frac{bc}{\sin A}\right)=\left(\frac{ca}{b},\frac{ab}{c},\frac{bc}{a}\right)$$

$$=\ \left(\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2},\frac{1}{a^2}\right)=\left(c^2a^2,a^2b^2,b^2c^2\right)$$

となる。（これは三角形の「心」ではない。なぜなら　$\overrightarrow{OA}$　の係数が　b　と　c　についての対称式ではないからである。）

【定理4】第１ブロカール点の重心座標は　$\left(c^2a^2,a^2b^2,b^2c^2\right)$　であり、第２ブロカール点の重心座標は　$\left(a^2b^2,b^2c^2,c^2a^2\right)$　である。

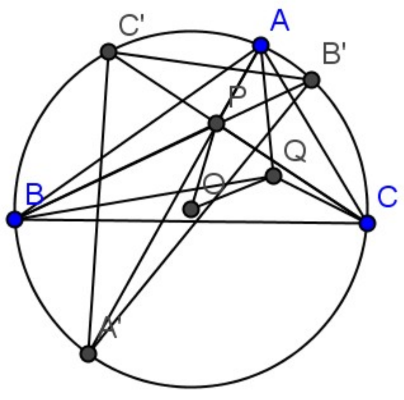
【定理5】第１ブロカール点をP、第２ブロカール点をQとする。AP,BP,CPの延長と⊿ABCの外接円との交点をそれぞれA', B', C'とすると、
(1)⊿ABCの第１ブロカール点と⊿A'B'C'の第２ブロカール点は一致する。
(2)⊿ABC≡⊿C'A'B'
(3)外接円の中心をOとすれば、PO=QO
(4)　$POQ=2\omega$

(証明)AP,BP,CPの延長と⊿ABCの外接円との交点をA',B',C'とする。

(1)円周角の定理より
$\omega=\square\ BAA'=\square\ BB'A'$
$\omega=\square\ CBB'=\square\ CC'B'$
$\omega=\square\ ACC'=\square\ AA'C'$
よって、Pは⊿A'B'C'の第２ブローカル点である。

(2)円周角の定理の逆より、
(弧BA')=(弧CB')=(弧AC')であるから、⊿ABCを点Oを中心にして弧BA'の分だけ回転させた、ものが⊿C'A'B'になる。したがって、⊿ABC≡⊿C'A'B'　である。

(3)QO=(⊿ABCの第２ブロカール点とOとの距離)
=(⊿C'A'B'の第２ブロカール点とOとの距離)
　(回転しても距離は不変だから)
=(⊿ABCの第１ブロカール点とOとの距離)
　((1)より)
=PO

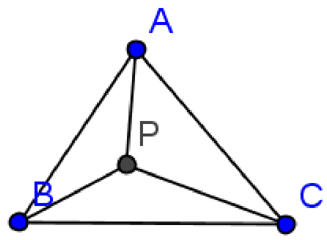


(4)　(2)における回転角はBがA'に重なるような回転角であるので、中心角で言えば　2ω　である。

【定理6】ブロカール角と角 A,B,C の間には次の関係がある。

$\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C$

(証明)



⊿ABC に着目して $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$

よって $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sin C}{\sin A}$ ・・・④

⊿PAB に着目して

$\dfrac{BP}{\sin\omega}=\dfrac{AB}{\sin\Box\ BPA}$

ここで【定理3】の③と同様にして

$\sin\Box\ BPA=\sin B$ が成り立つから

$\dfrac{BP}{\sin\omega}=\dfrac{AB}{\sin B}$

よって $\dfrac{BP}{AB}=\dfrac{\sin\omega}{\sin B}$ ・・・⑤

⊿PBC に着目して $\dfrac{BP}{\sin(C-\omega)}=\dfrac{BC}{\sin\Box\ BPC}=\dfrac{BC}{\sin C}$

よって $\dfrac{BC}{BP}=\dfrac{\sin C}{\sin(C-\omega)}$ ・・・⑥

④⑤⑥をかけあわせて $\dfrac{\sin^2 C\sin\omega}{\sin A\sin B\sin(C-\omega)}=1$

分母を払って、 $\sin^2 C\sin\omega=\sin A\sin B\sin(C-\omega)$

加法定理より、 $\sin^2 C\sin\omega=\sin A\sin B(\sin C\cos\omega-\cos C\sin\omega)$

$=\sin A\sin B\sin C\cos\omega-\sin A\sin B\cos C\sin\omega$

両辺÷ $\sin A\sin B\sin C\sin\omega$ として $\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}=\dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}-\dfrac{\cos C}{\sin C}$

$\sin C=\sin(180°-(A+B))=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ だから

$\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\sin B}=\dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}-\dfrac{\cos C}{\sin C}$

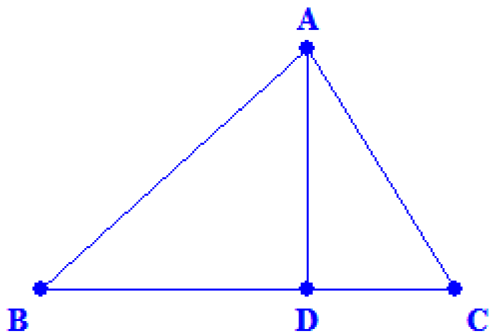
これより $\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C$ となる。(終)

【定理7】ブロカール角 ω について、 $\omega\leq 30°$ が成り立つ。

(証明)三角形を適当に回転、縮小しても一般性を失わない。

よって A を最大角としてよい。このとき $A\geq 60°$ である。

A から辺 BC へ下した垂線の足を D とする。



$AD=1,\ BD=x$ とおくと

$\cot B=\dfrac{1}{\tan B}=x$ $\cot C=\dfrac{1}{\tan C}=a-x$

よって、 $\cot B+\cot C=x+(a-x)=a$ となる。

定理6より

$\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C$

$=\cot A+a$

$=\cot\{180°-(B+C)\}+a$

$=\dfrac{1}{\tan(180°-(B+C))}+a=-\dfrac{1}{\tan(B+C)}+a$

$$= \ -\frac{1-\tan B\tan C}{\tan B+\tan C}+a=a-\frac{1-\dfrac{1}{\cot B\cot C}}{\dfrac{1}{\cot B}+\dfrac{1}{\cot C}}=a-\frac{\cot B\cot C-1}{\cot B+\cot C}$$

$$= \ a-\frac{x(a-x)-1}{a}=\frac{x^2-ax+a^2+1}{a}$$

$$= \ \frac{1}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{a}\right)\geq\frac{3}{4}a+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{3}{4}a\cdot\frac{1}{a}}=\sqrt{3}$$ （最後は相加相乗平均の関係を使った）

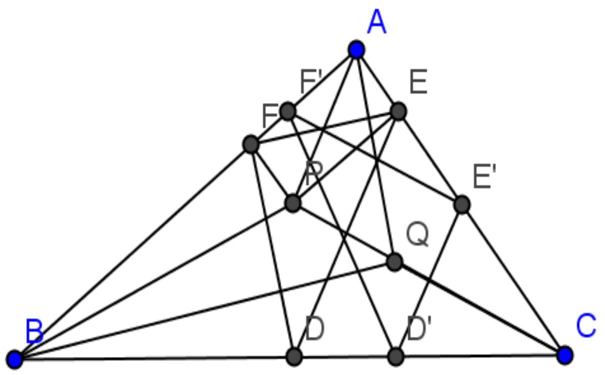
すなわち、 $\cot\omega=\dfrac{1}{\tan\omega}\geq\sqrt{3}$ である。

これより $\tan\omega>0$ であるから $0°<\omega<90°$ である。

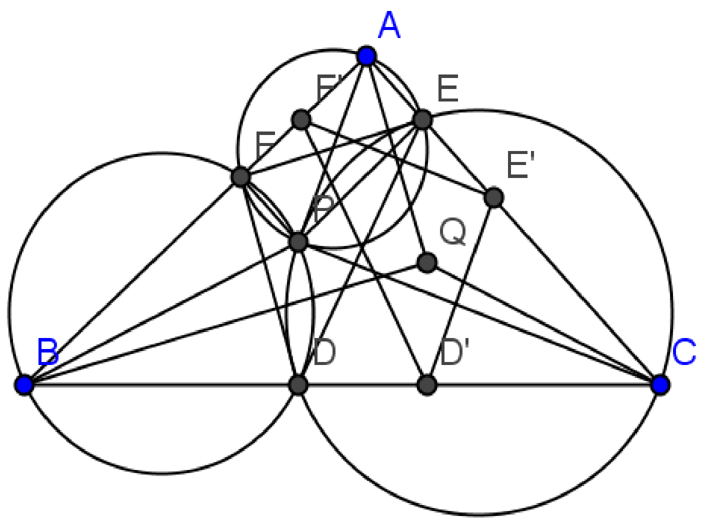
このとき、 $0<\tan\omega\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ よって $0<\omega\leq 30°$ である。

等号成立は $x=\dfrac{a}{2}$ かつ $\dfrac{3}{4}a=\dfrac{1}{a}$ すなわち $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときであるので、⊿ABC が正三角形のときである。（終）

【定理8】
第1ブロカール点と第2ブロカール点の垂足三角形は合同であり、かつ⊿ABC と相似である。
すなわち、 $DEF\equiv\ F'D'E'\sim\ BCA$



（証明）
四角形 AFPE は円に内接するから
円周角の定理より
□ $PEF=$□ $PAF=\omega$
同様に、四角形 CDPE は円に内接するから円周角の定理より
□ $PED=$□ $PCD=C-\omega$
よって $DEF=\ C$ である。
同様にして $EFD=\ A$
したがって $DEF\sim\ BCA$ 。
⊿D'E'F'についても同様にして
⊿ $F'D'E'\sim$⊿ BCA 。
ここで等角共役点の定理5により
⊿DEF と⊿D'E'F'は外接円を共有する。
したがって⊿DEF≡⊿F'D'E'
となる。（終）



【定理9】
次のように点を定める。
P : 第 1 ブロカール点
Q : 第 2 ブロカール点
O : 外心
K : ルモワーヌ点
B1 : CP と AQ の交点
B2 : AP と BQ の交点
B3 : BP と CQ の交点
C1 : A,B を通り B で接する円と B,C を通り B で接する円の交点
C2 : A,C を通り C で接する円と B,C を通り C で接する円の交点
C3 : A,B を通り A で接する円と A,C を通り A で接する円の交点
このとき、10 点 P,Q,O,K,B1,B2,B3,C1,C2,C3 は同一円周上にあり、その中心はルモワーヌ点 K と外心 O の中点である。この円をブロカール円という。

また⊿B1B2B3 を第 1 ブロカール三角形、⊿C1C2C3 を第 2 ブロカール三角形という。
第 1 ブロカール三角形は⊿CBA に相似である。