Buffonの針の問題について

「Buffonの針の問題」とは、平面上に水平な平行線を何本か引き、その上に針を落として針が平行線と交わる回数を数えます。その回数から平行線と交わる確率を求めて、その値から円周率の近似値を求めるというものです。ただし、針の長さは平行線の間隔よりも短いとします。

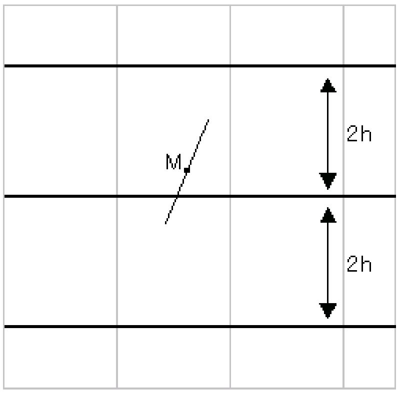
今回はこれを表計算ソフトExcelでシュミレーションしてみました。

以下では「Buffonの針の問題」でなぜ円周率が求まるかということについて、簡単に説明をします。

（説明と定式化）

平行線の間隔を $2h$, 針の長さを 2ℓ とすれば、仮定より $\ell < h$ である。

針の中点を M とし、M から、それに最も近い平行線までの長さを x, 針と平行線とのなす角を θ とすると、針の位置は $(\theta,\ x)$ で表すことができる。



ここでは y 軸方向の $2h \times$（整数）の平行移動をして重なる場合には同じ位置にあると考えていることになる。したがって x は $-h \leqq x \leqq h$ であり、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ である。（ここで x を最も近い平行線までの「距離」とすることもできるが、ここではそうしなかった。）

このとき x と θ は独立で、それぞれの区間内のどの位置をとることも同様に確からしい。

針が平行線と交わるのは

$$x - \ell \sin\theta \leqq 0 \leqq x + \ell \sin\theta$$

のときであるから、

$$-\ell \sin\theta \leqq x \leqq \ell \sin\theta$$

を満たす場合である。（次のグラフ参照）

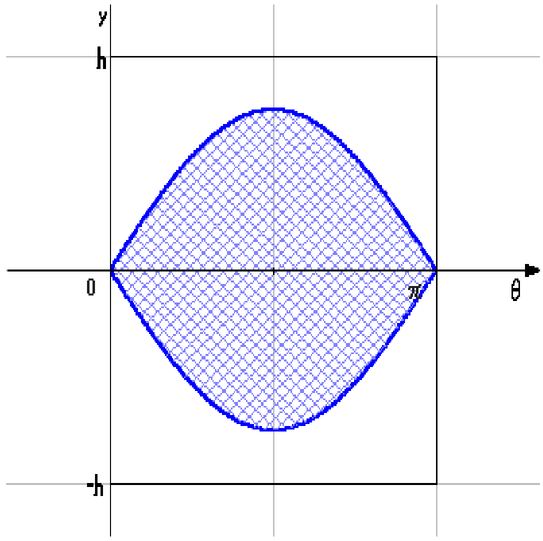


図 1: 針が交わる場合の確率のグラフ

斜線部の面積は θ 軸について対称であるから、求める確率は

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\pi} \ell \sin\theta d\theta}{\pi h} = \frac{2\ell}{\pi h}$$

となる。