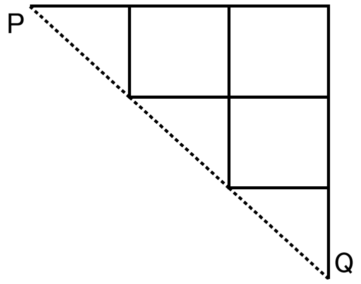
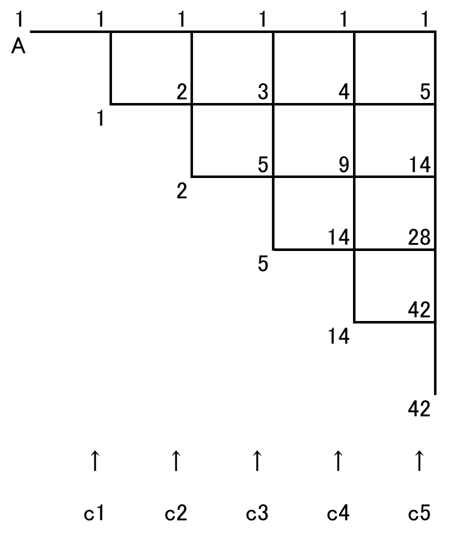
カタラン数について

図のＰからＱへ行く道順の数を知りたい。ただし点線に触れるのはよい。



横移動→と縦移動↓が、それぞれｎ回ずつでちょうどｐからＱへ行けるような地図を「制限されたｎ段の地図」と呼ぶ。上は３段の地図である。

ｎ段の地図の道順の数はカタラン数と呼ばれ、c_n で表される。
今の場合、書き込み法で求めれば、$c_3=5$ である。



（約束）$c_0=1$
また、簡単に分かることであるが、$c_1=1$、$c_2=2$ である。

（性質）この三角形から、カタラン数について次のことが成り立つ。

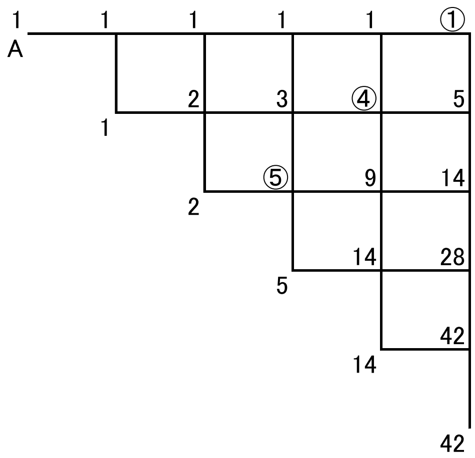
$1^2=1^2$

$2^2=1^2+1^2$

$5^2=1^2+2^2$

$14^2=1^2+3^2+2^2$

$42^2=1^2+4^2+5^2$



（理由）例えばカタラン数４２のところへいくには、①,④,⑤のどれかを通らなくてはならない。

①のところを通るものは、（A×①）－（①×B）で、$1\times1=1$

④のところを通るものは、（A×④）－（④×B）で、$4\times4=16$

⑤のところを通るものは、（A×⑤）－（⑤×B）で、$5\times5=25$

となるので、$42=1^2+4^2+5^2$　となる。

（パスカルの三角形にひそむカタラン数）

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	
1	3	6	10	15	21	28		
1	4	10	20	35	56			
1	5	15	35	70				
1	6	21	56					
1	7	28						
1	8							
1								

（黄色）－（赤色）がカタラン数になる。例えば

$1=1$

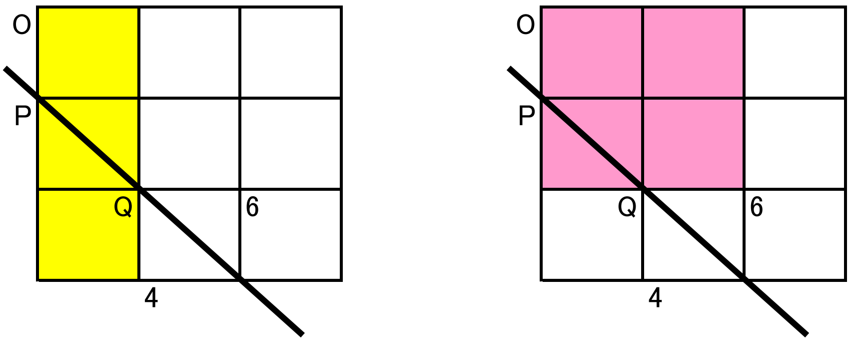
$2-1=1$

$6-4=2$

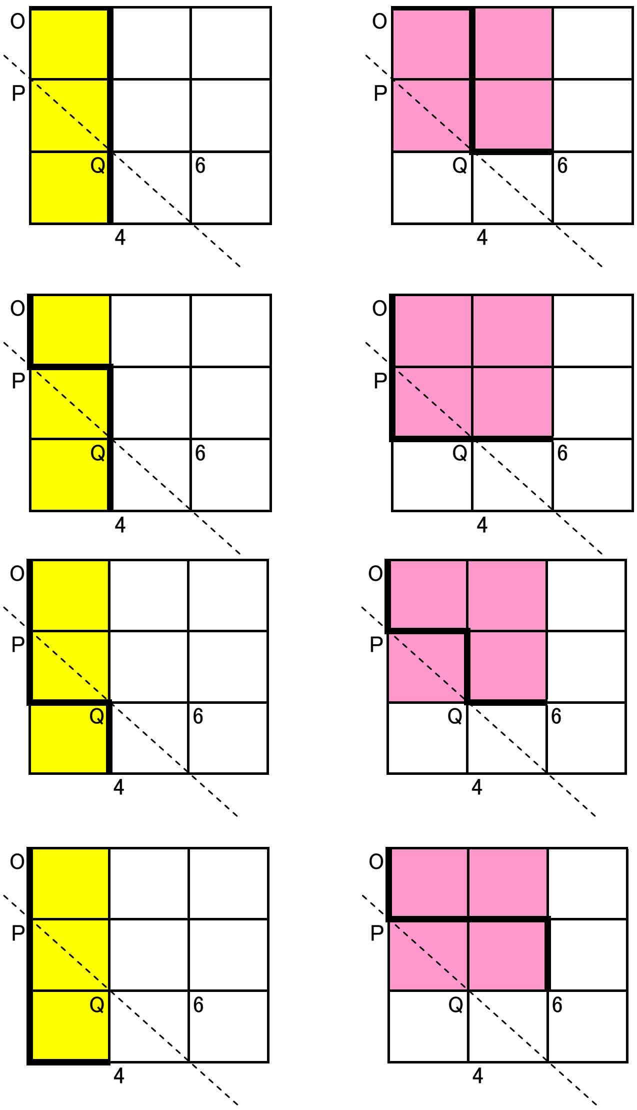
$20-15=5$

$70-56=14$

これは最短経路を用いた証明の具体例となっている。
（理由）例えば$6-4=2=c_2$となる理由について



黄色の部分の４通りある行き方を、赤色の６通りの行き方のうちの６通りに対応させる。
その対応は、P と Q を通る初めの線（太線）までは同じ行き方で、そこから先はその線について対称に折り返した行き方とする。
例えば

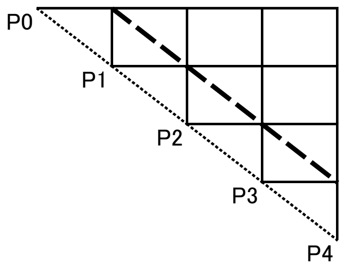


６通りのうちで、上の折り返しで得られた道以外の２通りは、PQ を通る線と交わらない行き方である。よって、$6-4=2=c_2$

（カタラン数を求める漸化式）

$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + c_2 c_{n-3} + \cdots + c_{n-2} c_1 + c_{n-1} c_0$

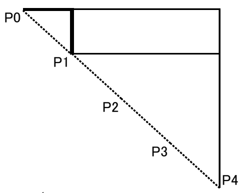
（証明）



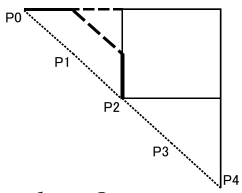
ｎ＝４の場合を証明する。

P0 から P４への道順は、まず P0 から右に１進むことが絶対必要であり、その後どこかで対角線 P0Pn に接触する。（接触するのは許される）

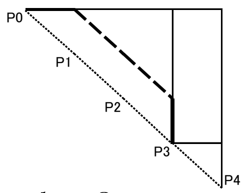
そこで最初に接触した場所を Pk とする。ただし k は 1 以上 n 以下で k=n ならば途中で対角線 P0Pn に接触しなかった場合ということになる。



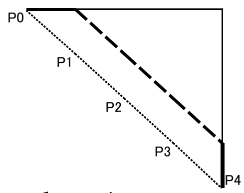
ｋ＝１



ｋ＝２



ｋ＝３



ｋ＝４

P0 から Pk までは途中で対角線に触れないのだから、$1 \times c_{k-1} \times 1 = c_{k-1}$ 通りある。

またその後の道順は、Pk から P４まで行けばよいので、c_{4-k} 通りある。

よって、$c_{k-1} \times c_{4-k}$ 通りある。よって、$c_4 = \sum_{k=1}^{4} c_{k-1} \times c_{4-k}$ である。

一般に、$c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} c_{n-k}$ が成り立つ。（終）

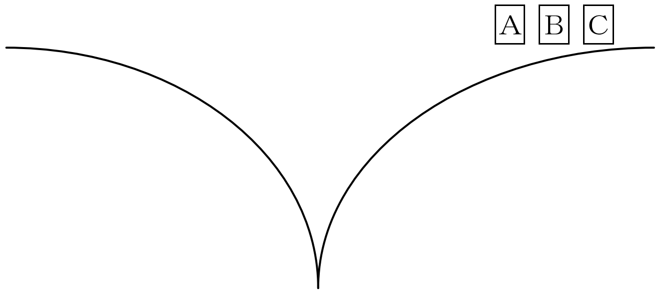
カタラン数の応用

１、引込み線を使った貨車の並べ替え

図のような引込み線を使って、右側の貨車を左側に並べ替える。

ただし、条件は「左方向に動かした貨車は右方向に戻すのは許さない」

貨車の数をｎとすると、並べ替える仕方はカタラン数 c_n である。



n=1 のとき、並べるといっても１個だから１通り。

n=2 のとき、ＡＢ、ＢＡの２通り。

ＡＢにするには、まずＡだけ引込み線に入れて左へ移動し、次にＢを同じようにして異動する。

ＢＡにするには、ＡＢをまとめて引込み線に入れ、次にＢを左へ移動し、最後にＡを左へ移動すればよい。

n=3 のときは、ＡＢＣ、ＡＣＢ、ＢＡＣ、ＢＣＡ、ＣＢＡの５通りである。

この貨車の移動は制限されたｎ段の地図での道順に自然に置き換えられる。

対応関係は次である。

「入」貨車を１台右側から引込み線に入れる　・・・右に１つ進む

「出」貨車を１台引込み線から左側に移動する・・・下に１つ進む

「出」の回数は「入」以下　・・・下への移動は右への移動以下

よって貨車の移動の仕方の数と制限されたｎ段の地図上での道順の数とは一致する。（終）

２、$n \geq 3$ のとき、凸ｎ角形を対角線によってｎ－２個の三角形に分ける方法の数 T_n とすると、$T_n = c_{n-2}$ が成り立つ。

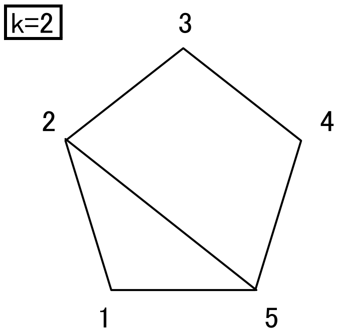
（証明）

n=2 のとき、$T_2 = 1$ と約束しておく。

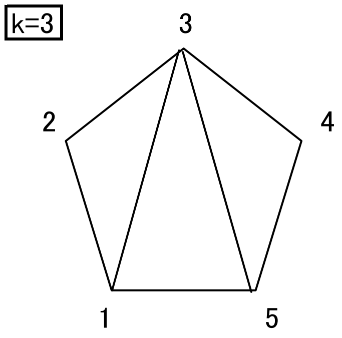
n=3 のとき、$c_{n-2} = c_1 = 1$ であるから成り立つ。

n=4 のとき、$c_{n-2} = c_2 = 2$ で、成り立つ。

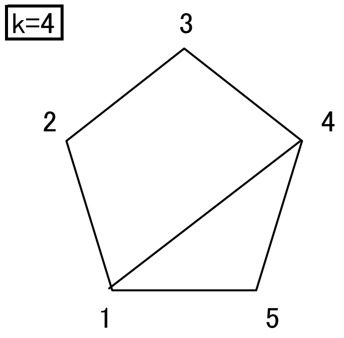
n=5 のときは底辺を含む三角形の第３の頂点で場合分けして数えれば、次のようになる。



$T_2 \times T_4$通り



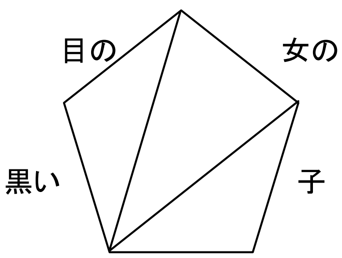
$T_3 \times T_3$通り



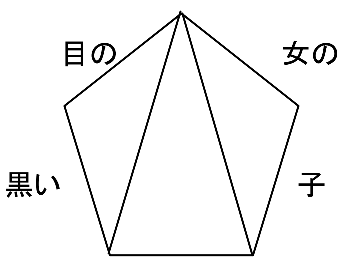
$T_4 \times T_2$通り

よって、$T_5 = T_2 \times T_4 + T_3 \times T_3 + T_4 \times T_2 = c_0 \times c_2 + c_1 \times c_1 + c_2 \times c_0 = c_3$　　であるので成り立つ。
以下、正確には数学的帰納法によって示される。（終）

３、ｎ個の語句の構文解釈はc_{n-1}である。
（証明）ｎ個の語句に括弧をつける仕方とｎ＋１角形の三角形分割の鹿谷１対１がつくことを示せばよい。
ｎ＝４の場合で説明する。例として「黒い　　目の　　女の　　子」を考える。
１対１対応は「隣り合う語句を囲む括弧を隣り合う線の両端を結ぶ対角線に置き換える。」と考える。

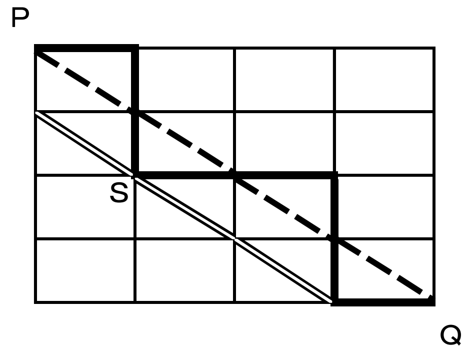


これは（((黒い目の）女の）子）と対応がつく。なぜなら
「黒い」と「目の」は対角線で結ばれているし、「(黒い目の)」と「女の」は対角線で結ばれているからである。

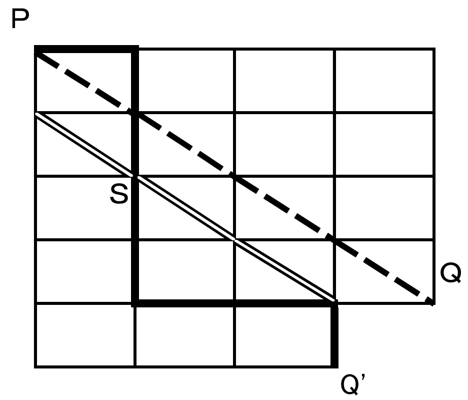


これは（(黒い目の)（女の子)）となる。
以上のように１対１対応がつくので、ｎ個の語句に括弧をつける仕方は
$T_{n+1}=c_{n-1}$ である。（終）

４、カタラン数の閉じた公式
（最短経路による証明）
カタラン数は、Ｐから出発して点線ＰＱより下には行かないようにＱに行く道筋の数である。ｎ＝４の場合を考える。



点線ＰＱより下を通らないという条件がもしなければ、道順の総数は ${}_{2n}C_n$ である。
よって ${}_{2n}C_n$ から規則違反になるような道順の総数を引けばよい。
規則違反の道順は、図の太線で示したものが例である。
規則違反の道順は、ＰＱより下の２重線に接触する。
そこで、最初に接触した点をＳとし、Ｓから先の道を２重線に対称に折り返す。



するとＰからＱ’への道ができる。
逆にＰからＱ’への任意の道は必ず２重線を横切るので、そこで２重線に対称に折り返せば、ＰからＱにいく規則違反の道ができる。
よって「ＰからＱにいく規則違反の道」と「ＰからＱ’への道」の間に１対１対応ができる。
したがって、ＰからＱ’への道順を数えればよく、それはＳの位置に依らず、常に ${}_{2n}C_{n-1}$ である。ゆえに

$$c_n = {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1!)}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{n}{n+1}$$

$$= \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= \frac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n$$

となる。（終）

この他にも超過数による証明もある。（数セミ２００８　４月　　数学雑記帳１２）

参考文献　　離散数学「数え上げ理論」　野崎昭弘　ブルーバックス