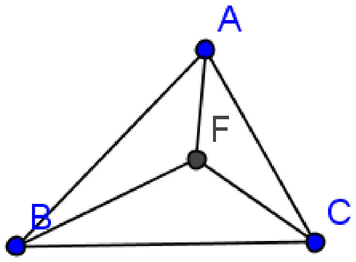
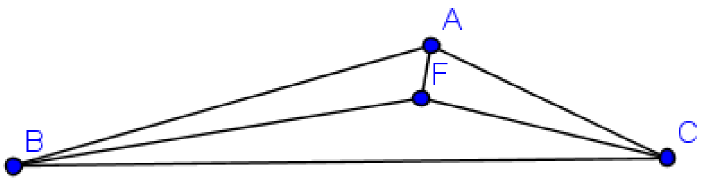
フェルマー点

【定義1】(フェルマー点) ⊿ABC 内で　$AFB=\ BFC=\ CFA=120°$　となる点 F を、⊿ABC のフェルマー点、あるいは第1フェルマー点という。

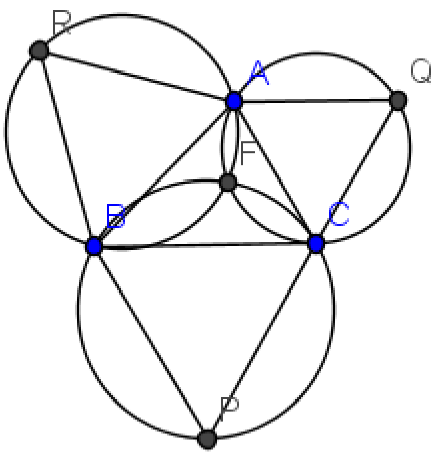


フェルマー点が三角形の内部にある場合は、三角形の最大角が 120°未満の三角形に限る。
なぜなら、もし下の図のようにフェルマー点が三角形の内部にあるとすると、　$BFC>\ BAC>120°$　となり、矛盾するからである。したがって、上の定義でフェルマー点を定義する場合、三角形の条件としては、「最大角が 120°未満」という条件がつく。

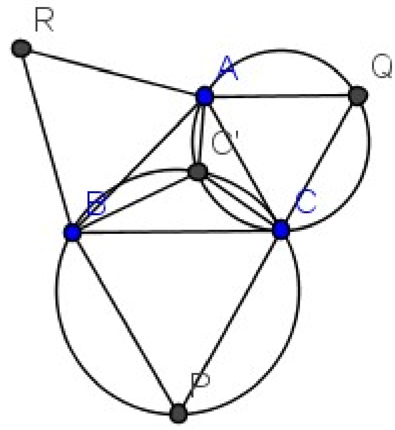


(フェルマー点の求め方)
フェルマー点の定義を次の定理のようにする場合もある。これは上の意味でのフェルマー点の求め方になっている。

【定理1】⊿ABC の3辺の外側に辺を共有する正三角形を作り、それを⊿BCP, ⊿CAQ, ⊿ABR とする。
これらの正三角形の外接円は1点で交わり、これがフェルマー点である。

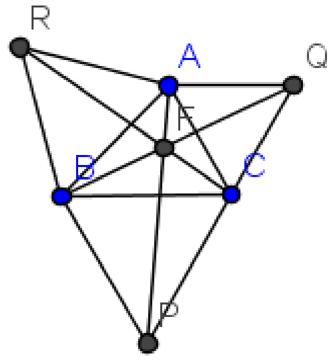


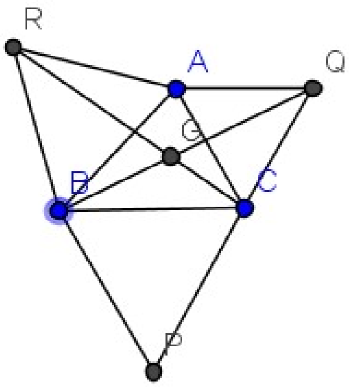
（証明）⊿BCP の外接円と⊿CAQ の外接円の交点で、C でない方を C’とする。
このとき　 $CPB=60°$ 　であるから　 $BC'C=120°$
同様にして　 $AC'C=120°$
したがって　 $AC'B=360°-120°-120°=120°$
ゆえに C’はフェルマー点である。（終）



定理1のようにフェルマー点を定義することでフェルマー点の定義を拡張することができる。
この場合、三角形の角の条件はつけなくてよい。

【定理2】⊿ABC の3辺の外側に辺を共有する正三角形を作り、それを⊿BCP, ⊿CAQ, ⊿ABR とする。このとき、AP, BQ, CR は 1 点で交わり、この点がフェルマー点である。

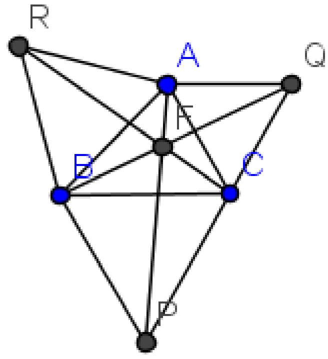




（証明）BQ と CR の交点を G とすると、　 $ABQ\equiv \ ARC$ 　であることは容易にわかる。
よって、　 $GRA= \ GBA$ 　である。
したがって円周角の定理の逆により、A,R,B,G は同一円周上にある。
ゆえに　 $BGR= \ BAR=60°$ 　 $AGR= \ ABR=60°$
同様に、　 $ACP\equiv \ QCB$ 　から、A,Q,C,F は同一円周上にあるので、
　 $AGQ= \ ACQ=60°$ 　 $CGQ= \ CAQ=60°$
したがって　 $BGC=360°-120°-120°=120°$ 　となる。
これより G はフェルマー点である。

AP, BQ, CR が 1 点で交わることについては、G が AP 上にあることを示せばよい。
　 $ACP\equiv \ QCB$ 　から　 $CPA= \ CBQ$ 　であるから、4 点 B,P,C,G は同一円周上にある。
よって　□ $BGP=$□ $BCP=60°$ 　。したがって　□ $AGQ=$□ $BGP=60°$ 　であるから、線分 AF と線分 FP は F において折れ曲がることはない。すなわち、F は AP 上にある。（終）

【定理3】右の図において、
(1) AP=BQ=CF
(2) AP=AF+BF+CF
が成り立つ。



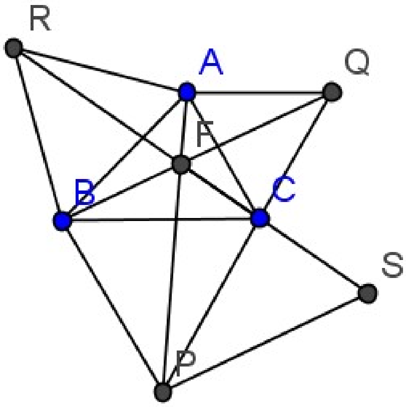
(証明)AP=AF+BF+CF であることを示せば
同様にして、BQ=AF+BF+CF、CF=AF+BF+CF
であることもわかるので証明されたことになる。

点 S を◿FPS が正三角形になるようにとる。
このとき　$\triangle BPF \equiv \triangle CPS$　が成り立つ。
なぜなら、BP=CP かつ

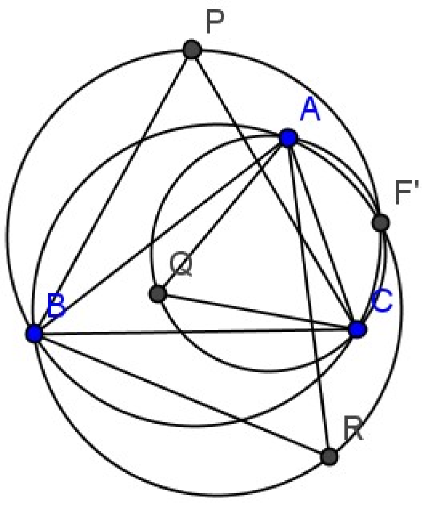
$$\angle FBP = \angle FBC + \angle CBP = \angle FBC + 60° = \angle FPC + 60° \angle FPC + \angle PFC = \angle PCS$$

$$\angle FPB = \angle CPB - \angle CPF = 60° - \angle CPF = \angle FPS - \angle CPF = \angle SPC$$

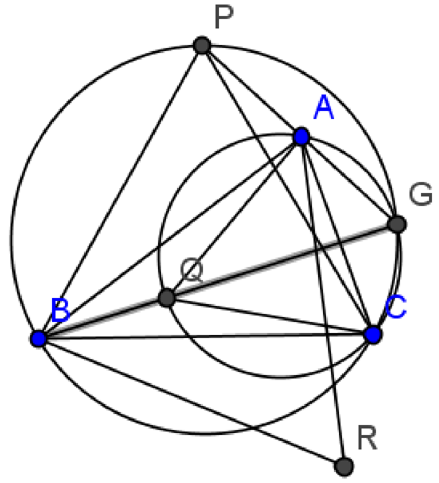
したがって FB=SC・・・①
①より、FP=FS=FC+CS=FC+FB ・・・②となる。
②より、AP=AF+FP=AF+FC+FB となる。
同様にして BQ=AF+BF+CF、CF=AF+BF+CF
も成り立つので証明された。(終)



【定義2】(第2フェルマー点)
◿ABC の辺を1辺とし、他の頂点が BC に関して A と同じ側にあるような正三角形を◿BCP、
CA を1辺とし、他の頂点が CA に関して B と同じ側にあるような正三角形を◿CAQ、
AB を1辺とし、他の頂点が AB に関して C と同じ側にあるような正三角形を◿ABR とする。
このとき、◿BCP、◿CAQ、◿ABR のそれぞれの外接円は1点で交わる。
この点を◿ABC の 第2フェルマー点という。記号は F'で表す。



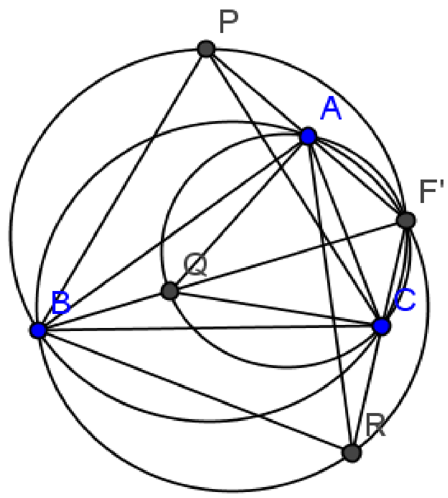
（証明）（⊿BCP、⊿CAQ、⊿ABR のそれぞれの外接円は1点で交わることについて）



⊿BCP の外接円と⊿CAQ の外接円の交点を G とする。
円周角の定理より　□ $BGP = $ □ $BCP = 60°$
すなわち　□ $BGA = 60°$　であり、
また　□ $BRA = 60°$　であるから
円周角の定理の逆により、4 点 B,R,G,A は
同一円周上にある。
この 4 点を通る円は⊿ABR の外接円であるから、
⊿ABR の外接円も G を通る。
以上により、⊿BCP、⊿CAQ、⊿ABR のそれぞれの
外接円は1点で交わることが示された。（終）

【定理4】上のように P,Q,R を定めると、第 2 フェルマー点 F'は直線 AP,BQ,CR の交点である。

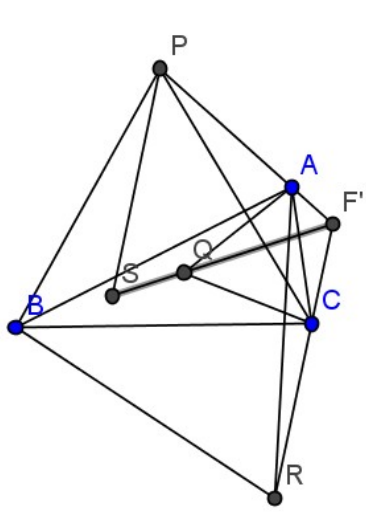
（証明）図において、



□ $CF'P = 180° -$ □ $CBP = 120°$
□ $CF'A = 180° -$ □ $CQA = 120°$
この 2 式より、P,A,F'は一直線上にあることがわかる。
同様にして
□ $PF'Q = $ □ $ACQ = 60°$
□ $PF'B = $ □ $PCB = 60°$
この 2 式より、B,Q,F'は一直線上にあることがわかる。
同様にして
□ $AF'C = 180° -$ □ $AQC = 120°$
□ $AF'R = 180° -$ □ $ABR = 120°$
この 2 式より、R,C,F は一直線上にあることがわかる。
以上により、第 2 フェルマー点 F'は直線 AP,BQ,CR の交点である（終）

【定理5】
(1)　$AP = BQ = CR$
(2) AP の長さは AF', BF', CF' の最大の長さのものから、他の2つの長さを引いたものに等しい。

（証明）例として AF', BF', CF' の最大の長さのものが BF'のときを考える。



⊿F’PS が正三角形となるように点 S を図のようにとる。
このとき、　□ $F'PC \equiv$ □ SPB　･･･①
（なぜなら　$PF' = PS$, $PC = PB$,
□ $F'PC = 60° -$ □ $CPS = $ □ SPB　）
したがって、　$F'C = SB$
また　$BF' = BS + SF' = F'C + F'P$　。
よって、　$PF' = BF' - CF'$　･･･②
$PF' = AP + AF'$　･･･③
②③より、　$AP = PF' - AF' = BF' - CF' - AF'$
①と同様にして、　□ $PCA \equiv$ □ BCQ　から　$AP = BQ$
□ $QAB \equiv$ □ CAR　から　$BQ = CR$　となるので、
証明された。（終）

最後に、フェルマー点（第１フェルマー点）の幾何学的な性質について触れる。

【問題】（フェルマーの問題）与えられた鋭角三角形 ABC 内に 1 点 P をとり、P から各頂点 A,B,C へいたる距離を最小にするような点 P はどこか？

これに対する答えは次で与えられる。

【定理6】与えられた鋭角三角形内にフェルマー点は任意の点 P に対して、 $AP+BP+CP$ の値を最小にする点である。

（証明）鋭角三角形◿ABC 内に任意の点 P をとり、P と各頂点を結ぶ。
◿APB を点 B の周りに 60°回転したものを、◿A'P'B とする。
このとき◿ABA'と◿PBP'は正三角形であるから、
$AP+BP+CP=A'P'+P'P+PC$ となり、
これは A'から C への折れ線 A'P'PC の長さに等しい。
$AP+BP+CP$ の値が最小になるのは、この折れ線
A'P'PC が直線になるときである。
このとき、 □ $BPC=180°-$□ $BPP'=180°-60°=120°$
□ $APB=$□ $A'P'B=180°-$□ $BP'P=120°$
となるので、 □ $APC=120°$ となる。
したがって、P はフェルマー点である。（終）
（参考　幾何学入門上 p61　コクセター）