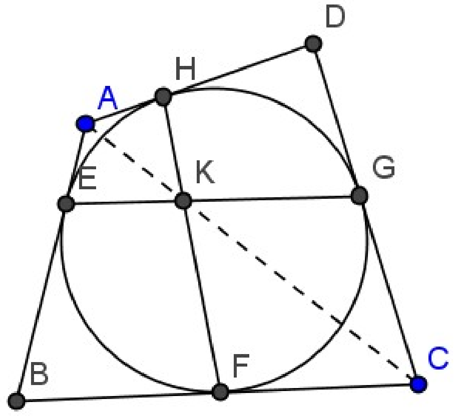
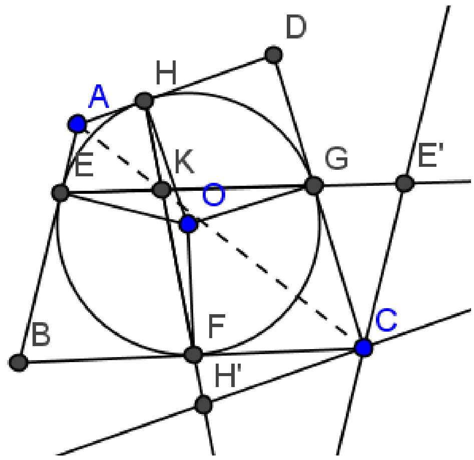
円に外接する四角形の性質について

【定理1】
四角形ABCDが円Oに外接し、辺EGと辺FHとの交点Kとするとき、A, K, Cは同一直線上にある。

【系】
四角形ABCDが円Oに外接するとき、辺AB, BC, CD, DAと円Oとの交点をそれぞれE, F, G, Hとするとき、4つの線分AC, BD, EG, FHは1点で交わる。



（証明1）
点Cを通り、AE,AHに平行な直線を引き、EG,HFとの交点をそれぞれE', H'とする。



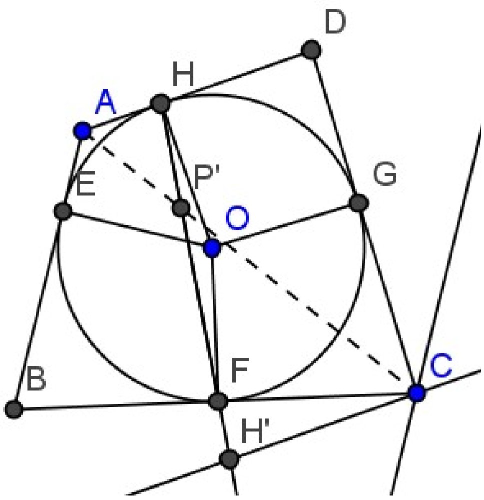
∠CE’G=∠AEK（錯角）
＝∠AEK= 90°　－∠OEG＝ 90°　－∠OGE
＝∠DGK=∠CGE’
よって∠CE’G=∠CGE’なので、CE’=CG・・・①
（ここの証明はE’が四角形の外部に入るか入らないかで同位角を使う場合もあるが、基本的に同じやり方で示すことができる。）
同様にして
∠CH’F=∠KHA（錯角）=90°　－∠OHF
=90°　－∠OFH＝∠KFB＝∠CFH’
ゆえにCH’＝CF・・・②

EGとACの交点をPとする。
⊿APE∽⊿CPE’（2角相等）より

$AP:CP = AE:CE' = AE:CG$　（①を用いた）

CG=CFであるから

$AP:CP = AE:CF$　・・・③



同様に、EGとACの交点をPとする。
⊿AP’H∽⊿CP’H’（2角相等）より

$AP':CP' = AH:CH' = AH:CF$　（②を用いた）

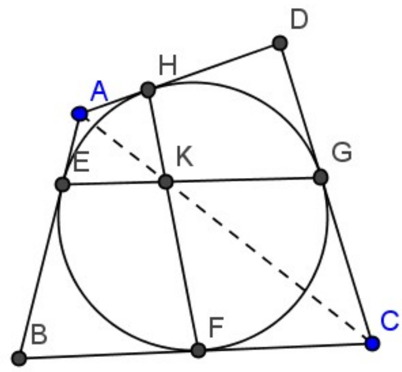
AH=AEであるから

$AP':CP' = AE:CF$　・・・④

③④より　$AP:CP = AP':CP'$
これよりPとP’は一致する。したがって証明された。（終）
以上の証明は鈴木丈喜氏に教わった。（2015年第68回関東都県数学山梨大会資料より）

次にこの別証明ということで複素数を用いて示す。

(証明2)点A,C,E,F,G,Hの位置を表す複素数をそれぞれa,c,e,f,g,hとする。このとき、円を単位円とすると、円に外接する辺の方程式は次のようになる。



辺ABはE(e)を接点とする接線である。これは原点と2eを結ぶ直線の垂直二等分線であるから、 $|z-0|=|z-2e|$

これを整理すると、 $\bar{e}z+e\bar{z}=2$

両辺にeを掛けて $z+e^2\bar{z}=2e$ ・・・①

同様に辺BCはF(f)を接点とする接線であるので

$z+f^2\bar{z}=2f$ ・・・②

辺CDはG(g)を接点とする接線であるので、 $z+g^2\bar{z}=2g$ ・・・③

辺DAはH(h)を接点とする接線であるので、 $z+h^2\bar{z}=2h$ ・・・④

これらを連立してA,Cの位置を求めると

$\bar{a}=\dfrac{2}{e+h}$, $\bar{c}=\dfrac{2}{f+g}$ となる。

次に線分EGは $z+eg\bar{z}=e+g$ ・・・⑤

線分FHは $z+fh\bar{z}=f+h$ ・・・⑥である。

EGとFHの交点をK(k)とすると、kは⑤⑥の解である。

⑤⑥より $(eg-fh)\bar{z}=e+g-f-h$ よって $\bar{z}=\dfrac{e+g-f-h}{eg-fh}=\bar{k}$ である。

$$\bar{k}-\bar{a}=\frac{e+g-f-h}{eg-fh}-\frac{2}{e+h}=\frac{(e+g-f-h)(e+h)-2(eg-fh)}{(eg-fh)(e+h)}$$

$$=\frac{e^2-eg+gh-ef+fh-h^2}{(eg-fh)(e+h)}=\frac{(e-h)(e+h-f-g)}{(eg-fh)(e+h)}$$

同様に $\bar{k}-\bar{c}=\dfrac{e+g-f-h}{eg-fh}-\dfrac{2}{f+g}=\dfrac{(e+g-f-h)(f+g)-2(eg-fh)}{(eg-fh)(f+g)}$

$$=\frac{ef-eg+g^2-f^2+fh-hg}{(eg-fh)(f+g)}=\frac{(f-g)(e+h-f-g)}{(eg-fh)(f+g)}$$

したがって $\dfrac{\bar{k}-\bar{c}}{\bar{k}-\bar{a}}=\dfrac{\dfrac{f-g}{f+g}}{\dfrac{e-h}{e+h}}=\dfrac{(f-g)(e+h)}{(e-h)(f+g)}$ となる。

この共役複素数をとれば $\dfrac{k-c}{k-a}=\dfrac{(\bar{f}-\bar{g})(\bar{e}+\bar{h})}{(\bar{e}-\bar{h})(\bar{f}+\bar{g})}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{f}-\dfrac{1}{g}\right)\left(\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{h}\right)}{\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{h}\right)\left(\dfrac{1}{f}+\dfrac{1}{g}\right)}$

$$=\frac{(g-f)(h+e)}{(h-e)(g+f)}=\frac{(f-g)(e+h)}{(e-h)(f+g)}$$

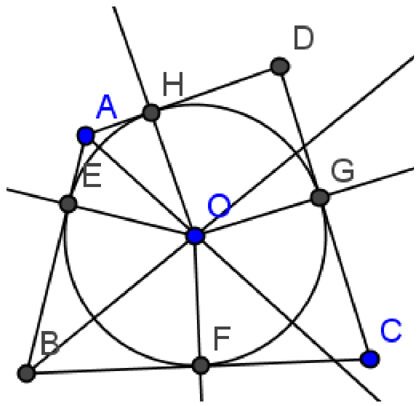
ゆえに $\dfrac{k-c}{k-a}=\overline{\left(\dfrac{k-c}{k-a}\right)}$ であるから $\dfrac{k-c}{k-a}\in R$

よって $k-c=t(k-a)$ $(t\in R)$ であるからA,K,Cは一直線上にある。(終)

【定理2】

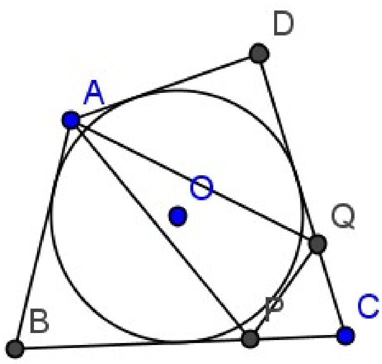
四角形 ABCD が円に外接するための必要十分条件は2組の対辺の和が等しいことである。

必要性は明らかなので十分性を示す。



(証明1) ∠A と∠B の二等分線の交点を O とする。
O から辺 AB, BC, CD, AD に垂線を下ろし、
その足を E,F,G,H とする。
条件から CF=CG・・・①が成り立つことに注意する。
⊿BOE≡⊿BOF であるから OE=OF。同様に OE=OH。
したがって OE=OF=OH である。
示すべきことは OF=OG である。
⊿OCF と⊿OCG において、
これらは直角三角形であり、斜辺は共通、①より CF=CG
であるから合同。
ゆえに OF=OG であるので示された。ゆえに四角形は円に外接する。
その接点は E,F,G,H である。(終)

(証明2)



BP=BA となる点 P を BC 上にとる。また CP=CQ となる点 Q を
CD 上にとる。
このとき条件から DA=DQ が成り立つ。
∠B,∠C,∠D の二等分線は二等辺三角形 BAP,二等辺三角形 CPQ,
二等辺三角形 DQA の底辺の垂直二等分線であるので、⊿APQ の外
心である。
このとき⊿BOA≡⊿BOP(3辺が等しい)であるから点 O から BA,BP ま
での距離は等しい。
同様に CB,CD と DC,DA までの距離も等しいので四角形は円に外接
する。点 O は四角形 ABCD に内接する円の中心である。(終)

(参考文献)

[1]2015 年第68回関東都県数学山梨大会資料
[2]複素数と幾何学　梅沢敏夫・後藤達生