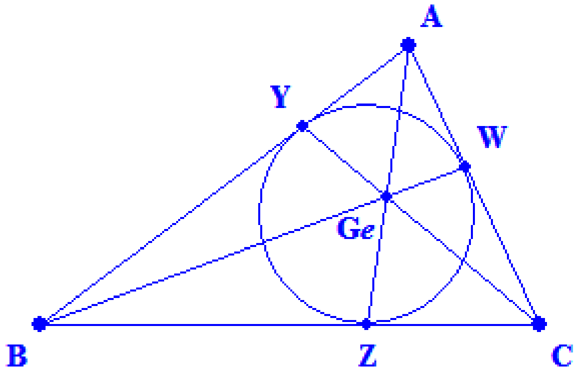
ジェルゴンヌ(Gergonne)点

【定理】⊿ABC の内接円と、BC,CA,AB との接点をそれぞれ D,E,F とすれば、AD,BE,CF は1点で交わる。この点をジェルゴンヌ点という。

(証明)接点の性質より、 $AE=AF=s-a$, $BF=BD=s-b$, $CD=CE=s-c$ であるから、

$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}=\frac{s-a}{s-b}\frac{s-b}{s-c}\frac{s-c}{s-a}=1$ よってチェバの定理の逆により、AD,BE,CF は1点で交わる。(終)



ジェルゴンヌ点の位置ベクトルを求める。 $ZGe=m\,,GeA=n$ とおく。

メネラウスの定理より、 $\frac{s-a}{s-b}\frac{a}{s-c}\frac{m}{n}=1$ これより、 $\frac{m}{n}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2a(-a+b+c)}$

また、 $\overrightarrow{AZ}=\frac{s-c}{a}\overrightarrow{AB}+\frac{s-b}{a}\overrightarrow{AC}=\frac{a+b-c}{2a}\overrightarrow{AB}+\frac{a-b+c}{2a}\overrightarrow{AC}$

したがって、 $\overrightarrow{AGe}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AZ}=\frac{2a(-a+b+c)}{(a-b+c)(a+b-c)+2a(-a+b+c)}\overrightarrow{AZ}$

ここで、

$(a-b+c)(a+b-c)+2a(-a+b+c)=-a^2-b^2-c^2+2ab+2bc+2ca$

$=\ a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=\{a^2-(b-c)^2\}+\{b^2-(c-a)^2\}+\{c^2-(a-b)^2\}$

$=\ (a+b-c)(a-b+c)+(b+c-a)(b-c+a)+(c+a-b)(c-a+b)$

$=\ (a+b-c)(a-b+c)+(-a+b+c)(a+b-c)+(a-b+c)(-a+b+c)$

$=\ (2s-2c)(2s-2b)+(2s-2a)(2s-2c)+(2s-2b)(2s-2a)$

$=\ 4\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}$ ･･･①

また、 $2a(-a+b+c)=2a(2s-2a)=4a(s-a)$ ･･･②

よって、①②より $\overrightarrow{AGe}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AZ}=\frac{4a(s-a)}{4\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}}\overrightarrow{AZ}$

$=\ \frac{a(s-a)}{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}\overrightarrow{AZ}$

$=\ \frac{a(s-a)}{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}\left(\frac{s-c}{a}\overrightarrow{AB}+\frac{s-b}{a}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\ \frac{(s-a)(s-c)}{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}\overrightarrow{AB}+\frac{(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}\overrightarrow{AC}$

これより

$$\overrightarrow{OGe}=\vec{a}+\frac{(s-a)(s-c)}{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$+\ \frac{+(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}(\vec{c}-\vec{a})$$

これを整理すると

$$\overrightarrow{OGe}=\frac{1}{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)}\left\{(s-b)(s-c)\vec{a}+(s-a)(s-c)\vec{b}+(s-a)(s-b)\vec{c}\right\}$$

となる。

したがって、重心座標は

$$((s-b)(s-c),(s-a)(s-c),(s-a)(s-b))$$

$$=\left(\frac{1}{4}(a-b+c)(a+b-c),\frac{1}{4}(-a+b+c)(a+b-c),\frac{1}{4}(-a+b+c)(a-b+c)\right)$$

すなわち、 $((a-b+c)(a+b-c),(-a+b+c)(a+b-c),(-a+b+c)(a-b+c))$ である。

・ジェルゴンヌ点の性質

【定理1】ジェルゴンヌ点とナーゲル点は等距離共役点である。

(証明)

「内接円と外接円の接点」で示したように

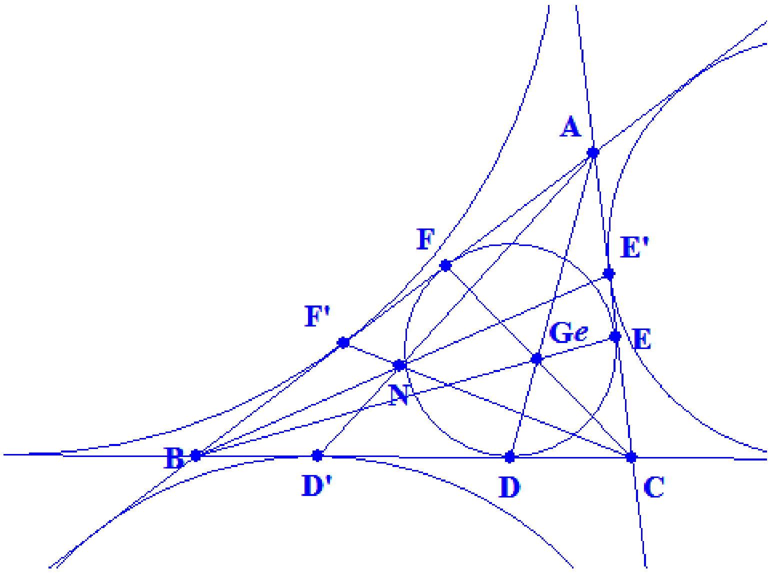
$BD'=CD\,,BF'=AF\,,CE=AE'$ が成り立つから、

DとD'はBCの中点に関して対称

EとE'はACの中点に関して対称

FとF'はABの中点に関して対称である。

したがってナーゲル点Nとジェルゴンヌ点は等距離共役点である。(終)



定理1の性質を使えば、ナーゲル点が存在することより、ジェルゴンヌ点の存在もわかる。

【定理2】⊿ABCのジェルゴンヌ点は⊿DEFのルモアーヌ点と一致する。

証明はルモアーヌ点を参照。

【定理3】ジェルゴンヌ点Ge、重心G、ミッテンプンクトMは同一直線上にあり、 $GeG:GM=2:1$ である。

証明はミッテンプンクトを参照。