円の接線の幅広い見方についての考察

円の接線の公式における接点を円外や円内に動かすことにより、接線の公式の持つ意味が広がってくる。
ここではその2通りの見方について述べる。

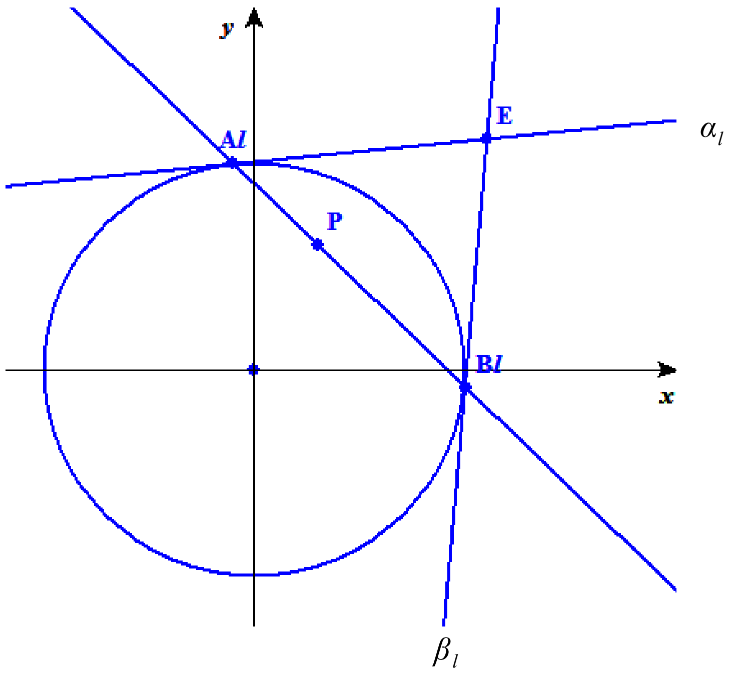
円　$O : x^2 + y^2 = r^2$　および点　$P(x_0, y_0)$　について、方程式　$x_0 x + y_0 y = r^2$　は

(1)点 P が円周上にあるときは、点 P における接線の方程式を表す。

(2)点 P が円の外部にあるときは、点 P から円 O に2本の接線を引き、接点を A,B とするとき、
2点 A,B を通る直線の式を表す。

((2)の理由)　$A(x_1, y_1)$　における接線の式は　$x_1 x + y_1 y = r^2$　であり、これが点 P を通るので
　$x_1 x_0 + y_1 y_0 = r^2$　・・・①。同様にして、　$B(x_2, y_2)$　とすれば、　$x_2 x_0 + y_2 y_0 = r^2$　・・・②。
①②は直線　$x_0 x + y_0 y = r^2$　が点 A,B を通ることを示している。

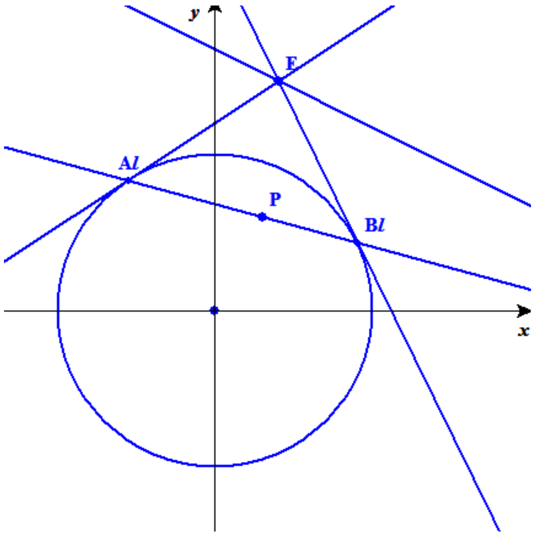
(3)点 P が円の内部にあるとき
　$P(x_0, y_0)$　を通る任意の直線　l　を考え、　l　と円 O との2つの交点を　A_l, B_l　とする。
また、　A_l, B_l　における円 O の接線を、　α_l, β_l　とする。



　α_l　と　β_l　の交点を点　$E(X_l, Y_l)$　とすると、　l　が点 P を通ってかつ、傾きを変えながら変化するときに、
点 E の描く軌跡が　$x_0 x + y_0 y = r^2$　となる。

(理由)　l　を任意にとり固定する。このとき、　$E(X_l, Y_l)$　は円 O の外部にあるので、(2)のことより
　$x_l x + y_l y = r^2$　は　A_l, B_l　を通る直線である。これが点　$P(x_0, y_0)$　を通るので代入すると
　$x_l x_0 + y_l y_0 = r^2$　が成り立つが、この式は　$x_0 x + y_0 y = r^2$　上に　$E(X_l, Y_l)$　があることを表している。
よって、　l　を点　P　を通る任意の直線とすれば、点 E は直線　$x_0 x + y_0 y = r^2$　上にある。
逆に、　$x_0 x + y_0 y = r^2$　上の任意の点を　$E(X, Y)$　とると、E から円に2つの接線が引ける。

(点 E が円の外部にあることは、直線　$x_0 x+y_0 y=r^2$　と原点との距離が、か　$\dfrac{|-r^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}>\dfrac{r^2}{r}=r>0$　らわかる。)その接点を A,B とすれば、2 点 A,B を通る直線は　$X x+Y y=r^2$　･･･①である。
一方、は　$E(X,Y)$　$x_0 x+y_0 y=r^2$　上にあるので、　$X x_0+Y y_0=r^2$　を満足しているので、このことは①,すなわち、A,B を通る直線は点 P を通るということを表している。よって逆も成り立つ。
以上により、証明された。(終)
(このことは Fcview で実験できる)



このことは実は反転と関係がある。
下の図のように、OP を直径とする円 K を考えると　α_l　と　β_l　の交点　E　は、円 K と直線 OE との交点 F の円 O に関する反転であることがわかる。
(理由)Q を半直線 OP と直線　$x_0 x+y_0 y=r^2$　との交点とすると、　$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{EQ}$　であることが容易にわかるので、∠OQE=90°である。∠FOP=∠QOE　であるから、⊿OFP□ □ OQE となる。
ゆえに、　$OP:OE=OF:OQ$　であるから、　$OE\cdot OF=OP\cdot OQ=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot\dfrac{|-r^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=r^2$
であるので、点 E は点 F の円 O に関する反転であり、また、点 Q は点 P の円 O に関する反転である。(終)

結局、点 E の軌跡は円 K の反転像であり、その描き方を2つの接線の交点から描いたということだけのことであった。