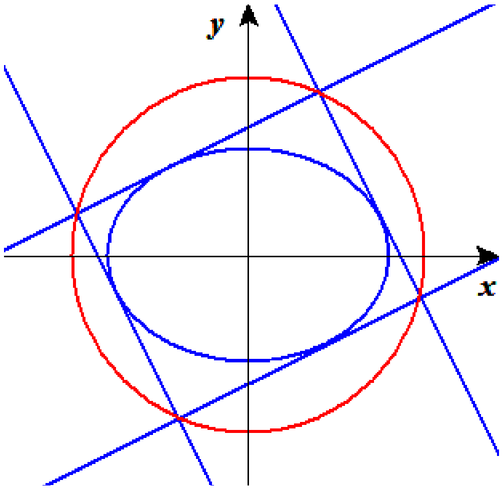
2次曲線の準円について

【定理1】楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において、互いに垂直な接線の交点は1つの円周上にある。
（これを楕円の準円という。）



（証明） $y=mx+k$ が $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に接するとして、 k が満たすべき条件を判別式により求める。

y を消去して、 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+k)^2}{b^2}=1$

展開して整理すれば

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2mk}{b^2}x+\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)=0$$

判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{mk}{b^2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}\right)\left(\dfrac{k^2}{b^2}-1\right)=\dfrac{1}{a^2b^2}(-k^2+b^2+m^2a^2)=0$ より $k^2=m^2a^2+b^2$ である。

したがって接線の方程式は $y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$ ・・・①である。

また、この接線に垂直な傾きをもつ楕円の接線の方程式は、 $y=-\dfrac{1}{m}x\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{m^2}+b^2}$ （ $m\neq 0$ ）・・・②

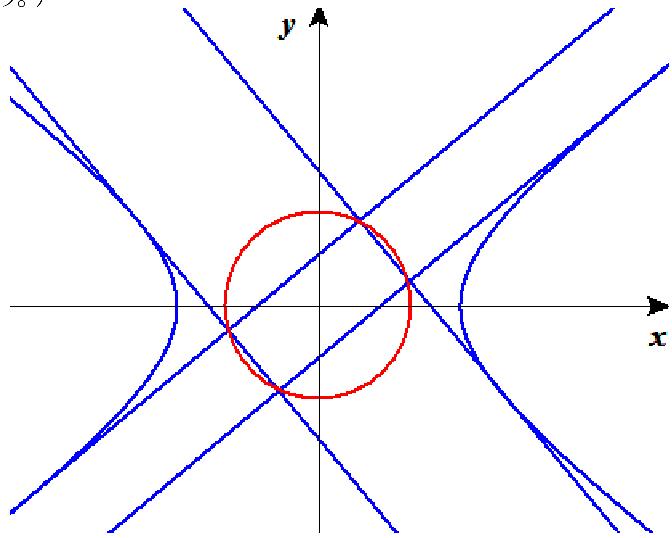
となる。

①②を次のように変形しておく。
①より $(y-mx)^2=m^2a^2+b^2$ ・・・③
また②より $(my+x)^2=a^2+b^2m^2$ ・・・④

③と④の表す接線の交点（4つ）は③＋④という方程式も満足する。
ここで③＋④を計算すると
$(y-mx)^2+(my+x)^2=(m^2a^2+b^2)+(a^2+b^2m^2)$ すなわち、 $x^2+y^2=a^2+b^2$ を得る。
このことは、③と④の表す接線の交点（4つ）は円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上にあることを意味している。

4つの接線の1つが x 軸または y 軸に平行なとき、4つの交点は $(\pm a,\pm b)$ であるので、この交点も方程式 $x^2+y^2=a^2+b^2$ を満足する。以上により証明された。（終）

【定理2】双曲線　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　，　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$　の互いに垂直な接線の交点は1つの円周上にある。
(これを双曲線の準円という。)



(証明)　$y=mx+k$　が　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　に接するとして、　k　が満たすべき条件を判別式により求める。

y　を消去して、　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{(mx+k)^2}{b^2}=1$

展開して整理すれば

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{b^2}\right)x^2-\frac{2mk}{b^2}x-\left(\frac{k^2}{b^2}+1\right)=0$$

判別式を　D　とすると

$\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{mk}{b^2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{m^2}{b^2}\right)\left(\dfrac{k^2}{b^2}+1\right)=\dfrac{1}{a^2b^2}(-k^2+b^2+m^2a^2)=0$　より　$k^2=m^2a^2-b^2$　である。

したがって接線の方程式は　$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2}$　･･･⑤である。ただしこの接線が定義されるためには

$m\leq-\dfrac{b}{a},\dfrac{b}{a}\leq m$　であることが必要である。

また、この接線に垂直な傾きをもつ楕円の接線の方程式は、　$y=-\dfrac{1}{m}x\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{m^2}-b^2}$　(　$m\neq0$　)･･･⑥

となる。ただしこの接線が定義されるためには、　$-\dfrac{a}{b}\leq m\leq\dfrac{a}{b}$　であることが必要である。

⑤⑥を次のように変形しておく。
⑤より　$(y-mx)^2=m^2a^2-b^2$　･･･⑦
また⑥より　$(my+x)^2=a^2-b^2m^2$　･⑧
⑦と⑧の表す接線の交点(4つ)は⑦＋⑧という方程式も満足する。
ここで⑦＋⑧を計算すると

$(y-mx)^2+(my+x)^2=(m^2a^2-b^2)+(a^2-b^2m^2)$　すなわち、　$x^2+y^2=a^2-b^2$　を得る。

このことは、⑤と⑥の表す接線の交点(4つ)は円上　$x^2+y^2=a^2-b^2$　にあることを意味している。

4つの接線の1つが　y　軸に平行であるとき、それに垂直な接線の傾きは　x　軸に平行ではない。
よって示された。

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ の場合、 $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ と変形すれば、同様にして接線の交点(4つ)は円 $x^2+y^2=b^2-a^2$ 上にあることを意味している。(終)

【定理3】放物線 $y=mx+k$ の互いに垂直な接線の交点は1つの直線上にある。
(これは放物線の準線になっている。)

(証明)接線を $y=mx+k$ とし、判別式を使って、この直線が放物線に接するための必要十分を求めると、
$\dfrac{D}{4}=4p(p-mk)=0$ となる。ゆえに、 $k=\dfrac{p}{m}$ 。したがって、 $y=mx+\dfrac{p}{m}$
これに垂直な接線は同様にして、 $y=-\dfrac{1}{m}x-mp$
よってこの2つの接線の交点は、 $mx+\dfrac{p}{m}=-\dfrac{1}{m}x-mp$ を満足するので、 $x=-p$ となる。これは準線に他ならない。(終)