循環小数のメモ

分数$\dfrac{n}{m}$を小数にしたときに、途中で終るものと、ある周期で循環するものがある。それらのことを「有限小数」と「循環小数」という。循環小数のなかにも、0.33333・・・・のように、小数部分が完全に循環している「純循環小数」と、0.833333・・・・のように、循環しない部分が入っている「混循環小数」がある。

（１）有限小数、循環小数、混循環小数の判別について
有限小数　⇔　分母が２か５でできている
純循環小数　⇔　分母が２と５を含まない
混循環小数　⇔　「２と５以外の数」と「２か５」の両方が入る

（証明）有限小数は$\dfrac{a}{10^n}$の形で表せるので、分母の約数は2^l5^mの形である。

また純循環小数は、$\dfrac{1}{9}=0.\dot{1}$，$\dfrac{1}{99}=0.\dot{0}\dot{1}$，$\dfrac{1}{999}=0.\dot{0}0\dot{1}$，・・・，$\dfrac{1}{99\cdots9}=0.\dot{0}00\cdots0\dot{1}$

が元になっており、一般には$\dfrac{a}{99\cdots9}$の形のものである。ゆえにこの分母には２と５は含まれない。

混循環小数ならば、それは有限小数の部分と循環小数の部分に分けられる。循環小数の部分は小数点の移動があるので、

$\dfrac{b}{2^l5^m}+\dfrac{1}{10^n}\cdot\dfrac{c}{p_1p_2\cdots p_k}$の形である。よって通分すれば分母は「２と５以外の数」と「２か５」の両方が入ると言える。

逆は、これらの場合分けがすべての場合を尽くすことから従う。

（２）分母が2^m5^nである分数は有限小数になるが、その小数の小数点以下の桁数はmax(m,n)である。

（証明）

m>n のとき、$\dfrac{a}{2^m5^n}=\dfrac{a}{2^n5^n}\cdot\dfrac{1}{2^{m-n}}=\dfrac{a}{10^n}\cdot\dfrac{5^{m-n}}{10^{m-n}}=\dfrac{1}{10^m}\cdot5^{m-n}a=0.0\cdots01\cdot5^{m-n}a$よりm桁である。

m<n のとき、$\dfrac{a}{2^m5^n}=\dfrac{a}{2^m5^m}\cdot\dfrac{1}{5^{n-m}}=\dfrac{a}{10^m}\cdot\dfrac{2^{n-m}}{10^{n-m}}=\dfrac{1}{10^n}\cdot2^{n-m}a=0.0\cdots01\cdot2^{n-m}a$より n 桁である。

m=n のとき、$\dfrac{a}{2^m5^m}=\dfrac{a}{10^m}=0.0\cdots01\cdot a$よりm桁である。

（3）分母は 2,5 以外のいくつかの素数の積からなる分数 $\frac{n}{m}$ の純循環小数展開について考える。この循環節の長さを k とすると、k は、99⋯9 の形の数で m の倍数になるような最小の数の桁数（すなわち 9 の個数）である。すなわち $10^k \equiv 1 \pmod{m}$ となる k である。

（証明）仮定より、k は $\frac{10^k n}{m} - \frac{n}{m} =$ 整数となる最小の数 k である。

$\frac{10^k n}{m} - \frac{n}{m} =$ 整数 を変形すると、$10^k n - n = (10^k - 1)n$ は m の倍数 となる。
今 m と n は互いに素だから $10^k \equiv 1 \pmod{m}$。よって示された。

逆に k を $10^k \equiv 1 \pmod{m}$ となる最小の数とすると、$\frac{n}{m}$ の小数展開は l 個の数字の繰り返しからなる。循環節の長さが k より小さいとすると、k の最小性に反する。よって循環節の長さは k である。

（4）分数 $\frac{n}{m}$ が混循環小数になる場合、その循環節の長さと循環しない部分の長さは次のようにして決まる。

$m = 2^k \cdot 5^l \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots \ (k > 0, l > 0)$ のように素因数分解されるとする。そのとき、

循環しない桁数は、$\max(k, l)$ である。

循環節の長さは、$10^l \equiv 1 \mod (p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots)$ となる最小の l である。

（証明） $\frac{n}{m} = \frac{n}{2^k \cdot 5^l \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots} = \frac{c}{2^k 5^l} + \frac{d}{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots}$ （c,d は整数）と変形できることを示せば、第 1 項は有限小数部分、第 2 項は純循環小数部分を表すので示される。

ユークリッドの互除法により、$2^k \cdot 5^l X + (p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots)Y = 1$ となる整数 X,Y が存在する。

この両辺に $\frac{n}{2^k \cdot 5^l \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots}$ を掛ければ求める式が得られる。以上により示された。

（5）分母は 2,5 以外のいくつかの素数からなる分数 $\frac{n}{m}$ の純循環小数展開について、循環節の長さは $\varphi(m)$ の約数である。

（証明）オイラーの関数の値 $\varphi(m)$ は、$10^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ を満たす。よって、k が $10^k \equiv 1 \pmod{m}$ となる最小の自然数とすると、$k \le \varphi(m)$ である。よって $\varphi(m) = kq + r$ （q, r は整数で $0 \le r < q$ ）と表すと、$10^{\phi(m)} \equiv 10^{kq+r} \equiv 10^r \equiv 1$ なので k の最小性より $r = 0$ でなければならない。すなわち $\varphi(m) = kq$ である。すなわち k は $\varphi(m)$ の約数である。

（例１）　$\dfrac{1}{7}$の循環節の長さについて

$\varphi(7) = 7 - 1 = 6$ なので、$10^k \equiv 1 \pmod 7$ となる最小の自然数 k の候補は 1,2,3,6 である。
順に調べると mod 7 で

$10^1 = 10 \equiv 3$　　$10^2 = 100 \equiv$　　$10^3 = 10^2 \cdot 10^1 \equiv 2 \cdot 3 \equiv$　　$10^6 = 6^2 \equiv 36 \equiv 1$

となるから、循環節の長さは 6 である。

（例２）　$\dfrac{3}{17}$の循環節の長さについて

$\varphi(17) = 17 - 1 = 16$ なので、$10^k \equiv 1 \pmod{17}$ となる最小の自然数 k の候補は 1,2,4,8,16 である。順に調べると mod 17 で

$10^2 = 100 \equiv 15$　　$10^4 \equiv 15^2 = 225 \equiv 4$　　$10^8 \equiv 4^2 = 16$　　$10^{16} \equiv 16^2 = 256 \equiv$

となるから、循環節の長さは 16 である。

（例３）　$\dfrac{1}{49}$の循環節の長さについて

$\varphi(49) = \varphi(7^2) = 7^2 - 7^1 = 42$ なので、$10^k \equiv 1 \pmod{49}$ となる最小の自然数 k の候補は 42 の約数である。また$10^k \equiv 1 \pmod{49}$ ならば$10^k \equiv 1 \pmod 7$ であるので、6 の倍数でもある。よって 6,42 に絞られるが、mod49 で

$10^2 = 100 \equiv 2$　　$10^6 \equiv 2^3 = 8$　　なので 6 は不適。よって 42 である。実際、

$10^{42} \equiv (10^6)^7 = 8^7 = 64 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 8 \equiv 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 8 \equiv 29 \cdot 22 \equiv 1$となる。

（６）循環節の長さについて、次の定理が成り立つ。

定理（ベルヌーイ 1773 年）

p,q を 2,5 以外の相異なる素数とする。このとき$\lambda(p)$で$\dfrac{1}{p}$を小数展開したときの循環節の長さを表す。このとき$\lambda(pq)$は$\lambda(p)$と$\lambda(q)$の最小公倍数である。

（証明）

$\lambda(pq) = l$，$\lambda(p) = k$，$\lambda(q) = h$ とおく。定義より l, k, h はそれぞれ

$10^l \equiv 1 \pmod{pq}$ となる最小の数

$10^k \equiv 1 \pmod p$ となる最小の数

$10^h \equiv 1 \pmod q$ となる最小の数である。

したがって、l が k の倍数であることが示されれば、同様にしてl が h の公倍数であることがわかり、よってl が k と h の公倍数であることがわかる。（①）

これは次のように示される。

l は$10^l \equiv 1 \pmod{pq}$ を満たすとすると$10^l \equiv 1 \pmod p$ でもある。よって$k \le l$ である。
ゆえに$l = kx + y$ （x, y は整数で$0 \le y < x$）とすると

$10^l \equiv 10^{kx+y} \equiv (10^k)^x \cdot 10^y \equiv 10^y \equiv 1 \pmod p$ である。よって k の最小性により y=0 である。
したがってl はk の倍数である。

次に s が k と h の任意の公倍数であるとすると、s が $10^s \equiv 1 \pmod{pq}$ を満たすことを示す。(②)
そうすれば①,②より $10^l \equiv 1 \pmod{pq}$ となる l の集合は l と k の任意の公倍数の集合に一致するので、l の最小性より l は k と h の最小公倍数になることがわかる。
②は次のように示される。
s が k と h の任意の公倍数なので、$s = ck = dh$ （c,d は自然数）と表せる。このとき $10^s \equiv 10^{ck} = (10^k)^c \equiv 1 \pmod{p}$, $10^s \equiv 10^{dh} = (10^h)^d \equiv 1 \pmod{q}$ である。p と q は互いに素であるから $10^s \equiv 1 \pmod{pq}$ である。

（７）分数 $\dfrac{1}{p}$ の分母は 2,5 以外の素数であるとする。この小数展開の循環節の長さ l が偶数のとき、循環節を半分に切って加えると $99\cdots9$ となる。

（証明）$10^l - 1 = (10^{\frac{l}{2}} - 1)(10^{\frac{l}{2}} + 1) \equiv 0 \pmod{p}$ であるが、ここで $10^{\frac{l}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ とすると循環節の長さが $\dfrac{l}{2}$ であることになり矛盾。よって、$10^{\frac{l}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ではないので、$10^{\frac{l}{2}} - 1$ で両辺を割ることができて、$10^{\frac{l}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ となる。これは言い換えると、$\dfrac{10^{\frac{l}{2}}}{p} + \dfrac{1}{p} =$ 整数となる。この式は $\dfrac{1}{p}$ の小数部分と、それを $\dfrac{l}{2}$ だけずらして加えたものは整数になるということを意味する。ここで左辺の第１項、第２項の小数部分に着目すると、同様に $\left[\dfrac{10^{\frac{l}{2}}}{p}\text{の小数部分}\right] + \left[\dfrac{1}{p}\text{の小数部分}\right]$ ＝整数となっている。
この左辺は２を超えることはないので左辺は１に等しい。$1 = 0.99\cdots9$ なので、循環節を半分に切って加えると $99\cdots9$ となる。

（８）分数 $\dfrac{1}{p}$ の分母は 2,5 以外の素数であるとする。循環節の長さ l が３で割り切れるとき、循環節を３等分して加えると、$99\cdots9$ となる。

（証明）$10^l - 1 = (10^{\frac{l}{3}} - 1)(10^{\frac{2l}{3}} + 10^{\frac{l}{3}} + 1) \equiv 0 \pmod{p}$ より（５）と同様にして $10^{\frac{2l}{3}} + 10^{\frac{l}{3}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ を得る。これは言い換えれば $\dfrac{10^{\frac{2l}{3}}}{p} + \dfrac{10^{\frac{l}{3}}}{p} + \dfrac{1}{p} =$ 整数となる。

よって $\left[\dfrac{10^{\frac{2l}{3}}}{p}\text{の小数部分}\right] + \left[\dfrac{10^{\frac{l}{3}}}{p}\text{の小数部分}\right] + \left[\dfrac{1}{p}\text{の小数部分}\right]$ ＝整数となるが、

$\dfrac{10^{\frac{2l}{3}}}{p}$の小数部分$\leq 1-\dfrac{1}{p}$ ，$\dfrac{10^{\frac{l}{3}}}{p}$の小数部分$\leq 1-\dfrac{1}{p}$であるから

$$\left[\frac{10^{\frac{2l}{3}}}{p}\text{の小数部分}\right]+\left[\frac{10^{\frac{l}{3}}}{p}\text{の小数部分}\right]+\left[\frac{1}{p}\text{の小数部分}\right]\leq 1-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=2-\frac{1}{p}$$

となり、やはり$\left[\dfrac{10^{\frac{2l}{3}}}{p}\text{の小数部分}\right]+\left[\dfrac{10^{\frac{l}{3}}}{p}\text{の小数部分}\right]+\left[\dfrac{1}{p}\text{の小数部分}\right]=1$となる。

よってこの場合も循環節を３等分して加えると、99…9 となる。

（９）1/13 と 2/13 では循環節のパターンは異なる。このように循環節のパターンがいくつあるかは次のように求められる。

$\dfrac{1}{p}$の循環節の長さを l とすると、循環節のパターンは$\dfrac{p-1}{l}$個である。

（証明）分母 p は 2,5 以外の素数であるとする。$\dfrac{a}{p}$と$\dfrac{b}{p}$の小数展開が同じパターンをもつとする。よって適当なkが存在して、$10^k a \equiv b \pmod{p}$となる。これをa □ bと表すと、これは同値関係である。よって$1,2,3,\cdots,p-1$は同値類に分けられる。この１つ同値類の元の個数を求めよう。そのために、$\dfrac{a}{p}$の循環節の長さを k としたとき、k が分子が１の分数$\dfrac{1}{p}$の循環節の長さlに等しいことを証明しよう。

仮定より$10^k a \equiv a \pmod{p}$である。a と p は互いに素なので両辺を a で割って、$10^k \equiv 1 \pmod{p}$。分母が１の分数$\dfrac{1}{p}$の循環節の長さをlとすると、lは$10^l \equiv 1 \pmod{p}$を満たす最小の数なので、k の最小性と合わせると$l=k$である。

このことから、各同値類には$\dfrac{1}{p}$の循環節の長さlに等しいだけの元が含まれる。ゆえに循環節のパターンは$\dfrac{p-1}{l}$個である。

例えば位数が３５である 1/71 では循環節は01408450704225352112676056338028169
なので、５桁ごとに区切って加えると、以下のように 299997 となる。

$$
\begin{array}{r}
1408 \\
45070 \\
42253 \\
52112 \\
67605 \\
63380 \\
28169 \\
\hline
299997
\end{array}
$$

次に７桁ごとに区切って加えると、以下のように 19999998 となる。

$$
\begin{array}{r}
140845 \\
704225 \\
3521126 \\
7605633 \\
8028169 \\
\hline
19999998
\end{array}
$$

1/123551 では

$$\frac{1}{123551} = 0.00000809382360320839167631180646049000000080938\cdots$$

となるから、循環節は00000809382360320839167631180646049 となる。
５桁ごとに区切って加えると、以下のように 199998 となる。

$$
\begin{array}{r}
0 \\
80938 \\
23603 \\
20839 \\
16763 \\
11806 \\
46049 \\
\hline
199998
\end{array}
$$

これを７桁ごとに区切って足すと、以下のように

$$
\begin{array}{r}
80 \\
9382360 \\
3208391 \\
6763118 \\
646049 \\
\hline
19999998
\end{array}
$$

となる。
これらは 9999999×2 や 9999999×3 が現れているとみることができる。
以上を参考にして、一般化してみる。実際、次が成り立つ。

（１０）p を 2,5 以外の素数とする。分数$\dfrac{1}{p}$について、その循環節が２以上の素数 q で割り切れるとき、循環節 P を前から q 等分して加えると $99\cdots999\times n$ の形になる。

（証明）循環節の長さを qk とする。循環節 P を前から q 組に分けて

$A_{q-1}, A_{q-2}, \cdots, A_2, A_1, A_0$ とすると

$P = A_{q-1}\cdot 10^{q-1} + A_{q-2}\cdot 10^{q-2} + \cdots + A_2\cdot 10^2 + A_1\cdot 10^1 + A_0$ と表せる。

ゆえに

$$\frac{1}{p} = \frac{P}{10^{qk}-1} = \frac{A_{q-1}\cdot 10^{(q-1)k} + A_{q-2}\cdot 10^{(q-2)k} + \cdots + A_2\cdot 10^{2k} + A_1\cdot 10^k + A_0}{10^{qk}-1}$$

$$= \frac{A_{q-1}\cdot 10^{(q-1)k} + A_{q-2}\cdot 10^{(q-2)k} + \cdots + A_2\cdot 10^{2k} + A_1\cdot 10^k + A_0}{(10^k-1)(10^{(q-1)k} + 10^{(q-2)k} + \cdots 10^k + 1)}$$

ここで、循環節の最小性により、$10^{(q-1)k} + 10^{(q-2)k} + \cdots + 10^k + 1$ は p で割り切れるので

$$\frac{10^{(q-1)k} + 10^{(q-2)k} + \cdots + 10^k + 1}{p} = \frac{A_{q-1}\cdot 10^{(q-1)k} + A_{q-2}\cdot 10^{(q-2)k} + \cdots + A_2\cdot 10^{2k} + A_1\cdot 10^k + A_0}{10^k-1}$$

は整数である。

この右辺を次のように変形する。

$$\frac{A_{q-1}\cdot 10^{(q-1)k} + A_{q-2}\cdot 10^{(q-2)k} + \cdots + A_2\cdot 10^{2k} + A_1\cdot 10^k + A_0}{10^k-1}$$

$$= \frac{A_{q-1}\cdot(10^{(q-1)k}-1) + A_{q-2}(10^{(q-2)k}-1) + \cdots + A_2(10^{2k}-1) + A_1(10^k-1) + A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{q-2} + A_{q-1}}{10^k-1}$$

$$= \frac{A_{q-1}\cdot(10^{(q-1)k}-1) + A_{q-2}(10^{(q-2)k}-1) + \cdots + A_2(10^{2k}-1) + A_1(10^k-1)}{10^k-1} + \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{q-2} + A_{q-1}}{10^k-1}$$

第 1 項は整数なので、第 2 項も整数である。よって

$\dfrac{A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{q-2} + A_{q-1}}{10^k-1} = h$ とおける。

したがって $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{q-2} + A_{q-1} = h(10^k-1) = h\times 99\cdots 99 \quad (1 \le h \le q-2)$ となる。

（9）互いに素である p, q, r に対して、分数 $\dfrac{r}{pq}$ の小数展開を考える。これを $\dfrac{r}{pq} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q}$ と分解することができれば簡単に計算できる。

この分解は、ユークリッドの互除法により $pa + qb = 1$ となる整数 p,q の存在が保証されているので成り立つ。

参考文献

[1] 松下大介 ： 数学セミナー　循環小数の秘密

[2] 近藤年示 ： 新・高校数学外伝【第３話】循環小数

[3] 松田康雄 ： 数学セミナー　NOTE　$\dfrac{1}{pq}$ の分割和